УДК 517.2/.3
ББК 22.161.61
Т 49

Тлячев В.Б.
Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-08, e-mail: stvb2006@rambler.ru
Ушхо А.Д.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-08, e-mail: uschho76@mail.ru
Ушхо Д.С.
Кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой информатики и вычислительной техники факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-01, e-mail: damirubych@mail.ru

Оценка числа прямых изоклин полиномиальных векторных полей на плоскости

(Рецензирована)

Аннотация

Решается задача оценки числа прямых изоклин автономной дифференциальной системы с полиномиальной правой частью на плоскости. Показано, что если система имеет хотя бы одну особую точку и удовлетворяет условиям: правые части системы – взаимно простые многочлены степени n, правая часть хотя бы одного из уравнений системы содержит однородный многочлен степени меньше n, – то число ее прямых изоклин не превосходит $6n-5$ $(n \geq 2)$. *При этих же условиях доказано, что число инвариантных прямых системы не превосходит* $3n-1$ $(n \geq 1)$. *Кроме этого, доказаны различные теоремы о числе параллельных прямых изоклин, а также прямых изоклин, инцидентных отдельно взятой особой точке.*

Ключевые слова: *изоклины, полиномиальное векторное поле, особая точка.*

Tlyachev V.B.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Physics Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-08, e-mail: stvb2006@rambler.ru
Ushkho A.D.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Theoretical Physics Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-08, e-mail: uschho76@mail.ru
Ushkho D.S.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Informatics and Computer Equipment Department of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-01, e-mail: damirubych@mail.ru

Assessment of the number of straight-line isoclines of the polynomial vector fields on the plane

Abstract

The problem to be solved is to assess the number of straight line – isoclines of autonomous differential system with polynomial right part on the plane. It is shown that if the system has at least one special point and meets the following conditions: the right parts of system are mutually simple polynomials of n degree and, the right part of at least one of the equations of system contains the uniform polynomial of less than n degree, then the number of its straight line-isoclines does not exceed $6n-5$ $(n \geq 2)$. *Under the same conditions, the number of invariant straight line-isoclines of system is proved not to exceed* $3n-1$ $(n \geq 1)$. *Besides, various theorems about the number of parallel straight line-isoclines and straight line-isoclines, incidental to separately taken special point, are proved.*

Keywords: *isoclines, polynomial vector field, special point.*

При изучении поведения траекторий автономной дифференциальной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} P_i(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i(x,y) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} a_{rs} x^r y^s$, $Q_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} b_{rs} x^r y^s$, b_{rs}, $a_{rs} \in R$, $n \geq 1$, определенную роль играют прямые изоклины.

В данной работе решается задача оценки числа прямых изоклин системы (1).

Будем говорить, что система (1) удовлетворяет условиям (α), если:

1) $\deg(P_n^2(x,y) + Q_n^2(x,y)) = 2n$;

2) $(P,Q) = 1$;

3) выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\sum_{i=0}^{n-1} |P_i(x,y)| \not\equiv 0 \tag{2}$$

и

$$\sum_{i=0}^{n-1} |Q_i(x,y)| \not\equiv 0\,. \tag{3}$$

Для краткости условимся писать, что на изоклине L системы (1) индуцировано направление m, если угловой коэффициент касательных к траекториям системы (1) в точках L, отличных от особых точек (1), равен m. Под символом $\ell_j^{m_i}$ будем понимать прямую изоклину ℓ_j, на которой индуцировано направление m_i.

Теорема 1. Какие бы $n+1$ прямых изоклин системы (1) ни взять, среди них найдутся хотя бы две прямые, на которых индуцированы различные направления.

Доказательство. Следуя работе [1], применим к системе (1) преобразование $x = \overline{y}$, $y = \overline{x} + m\overline{y}$, переводящее каждую прямую, на которой индуцировано направление m, в изоклину бесконечности системы:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \overline{Q}(\overline{x},\overline{y}) - m\overline{P}(\overline{x},\overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{P}(\overline{x},\overline{y}), \end{cases} \tag{4}$$

где $\overline{P}(\overline{x},\overline{y}) = P(\overline{y}, \overline{x} + m\overline{y})$, $\overline{Q}(\overline{x},\overline{y}) = Q(\overline{y}, \overline{x} + m\overline{y})$.

Изоклина бесконечности $\overline{Q}(\overline{x},\overline{y}) - mP(\overline{x},\overline{y}) = 0$ системы (4) является кривой не выше n-го порядка. Следовательно, эта система имеет не более n прямых изоклин бесконечности, и теорема доказана.

Следствие 1. Дифференциальное уравнение траекторий системы (1) имеет не более n различных интегральных прямых с одним и тем же угловым коэффициентом.

Замечание 1. В статье [2] доказано утверждение 1, являющееся частным случаем теоремы 1 при $n = 3$.

Замечание 2. На основании теоремы 1 нетрудно доказать, что система (1), имеющая хотя бы одну особую точку и удовлетворяющая условиям (α), имеет конечное число прямых изоклин.

Теорема 2. Если система (1) имеет хотя бы одну особую точку и удовлетворяет условиям (α), то число ее прямых изоклин не превосходит $6n-5$ $(n \geq 2)$.

Доказательство. Пусть $y = kx + b$ – изоклина системы (1). Тогда выполняется равенство

$$Q(x, kx+b) - mP(x, kx+b) \equiv 0. \quad (5)$$

В силу замечания 2 сумма числа прямых изоклин и числа направлений, индуцированных на них системой (1), конечна. Поэтому, не сужая общности, считаем, что координатные оси не являются изоклинами и пересекают все прямые изоклины, но никакие две прямые изоклины не пересекаются на осях координат, т.е. $k, m \in R \setminus \{0\}$. Кроме того, все особые точки (1) расположены в первом квадранте, исключая сами оси координат.

Из (5) при $x = 0$ получаем равенство

$$m = \frac{Q(0,b)}{P(0,b)}. \quad (6)$$

Продифференцируем дважды по x обе части (5):

$$[Q'_y(x,kx+b)P(0,b) - P'_y(x,kx+b)Q(0,b)]k + Q'_x(x,kx+b)P(0,b) - P'_x(x,kx+b)Q(0,b) \equiv 0, \quad (7)$$

$$\begin{gathered}Q''_{x^2}(x,kx+b)P(0,b) - P''_{x^2}(x,kx+b)Q(0,b) + 2[Q''_{xy}(x,kx+b)P(0,b) - P''_{xy}(x,kx+b)Q(0,b)]k + \\ +[Q''_{y^2}(x,kx+b)P(0,b) - P''_{y^2}(x,kx+b)Q(0,b)]k^2 \equiv 0.\end{gathered} \quad (8)$$

Из (7) и (8) при $x = 0$ получаем уравнения:

$$[Q'_y(0,b)P(0,b) - P'_y(0,b)Q(0,b)]k + Q'_x(0,b)P(0,b) - P'_x(0,b)Q(0,b) = 0, \quad (9)$$

$$\begin{gathered}Q''_{x^2}(0,b)P(0,b) - P''_{x^2}(0,b)Q(0,b) + 2[Q''_{xy}(0,b)P(0,b) - P''_{xy}(0,b)Q(0,b)]k + \\ +[Q''_{y^2}(0,b)P(0,b) - P''_{y^2}(0,b)Q(0,b)]k^2 = 0.\end{gathered} \quad (10)$$

Нетрудно показать, что выражения $Q'_y(0,b)P(0,b) - P'_y(0,b)Q(0,b)$ и $Q''_{y^2}(0,b)P(0,b) - P''_{y^2}(0,b)Q(0,b)$ являются многочленами степени не выше $2n-2$ и $2n-3$ соответственно относительно переменной b. Выразив k из уравнения (9) и подставив в уравнение (10), получим уравнение степени не выше $6n-5$. Так как на оси ординат нет точек пересечения прямых изоклин, то число прямых изоклин (1) не превосходит $6n-5$. Теорема доказана.

Так как инвариантная прямая системы (1) является ее изоклиной, то для оценки сверху числа инвариантных прямых будем рассуждать так же, как и при доказательстве теоремы 2.

Пусть $y = kx + b$ – инвариантная прямая системы (1), то есть имеет место равенство

$$\frac{Q(x,kx+b)}{P(x,kx+b)} \equiv k. \quad (11)$$

Из (11) при $x = 0$ получаем равенство

$$k = \frac{Q(0,b)}{P(0,b)}, \qquad k \in R \setminus \{0\}. \quad (12)$$

С учетом (12) перепишем уравнение (9) в виде:

$$Q'_x(0,b) \cdot P^2(0,b) + [Q'_y(0,b) - P'_x(0,b)]P(0,b)Q(0,b) - P'_y(0,b)Q^2(0,b) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) является уравнением степени не выше $3n-1$ относительно b, следовательно, оно имеет не более $3n-1$ корней. Тем самым доказана теорема:

Теорема 3. Число инвариантных прямых системы (1), удовлетворяющей условиям (α) и имеющей хотя бы одну особую точку, не превосходит $3n-1$ ($n \geq 1$).

Замечание 3. В работе [3] получено уравнении (13) иным способом, а именно с использованием условия равенства нулю кривизны прямой.

Замечание 4. В статье [2] отмечается, что можно доказать утверждение: максимальное число прямых изоклин системы (1) больше максимального числа ее инвариантных прямых, разумеется, при $n \geq 2$. При $n=1$ через особую точку системы (1) проходит бесконечное множество прямых изоклин.

Действительно, при $n \geq 2$ $\quad 6n-5 > 3n-1$.

Далее рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i=r}^{n} P_i(x,y) \equiv \widetilde{P}(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{j=s}^{n} Q_j(x,y) \equiv \widetilde{Q}(x,y), \end{cases} \tag{14}$$

где $P_i(x,y) = \sum\limits_{k+\ell=i} a_{k\ell} x^k y^\ell$, $Q_j(x,y) = \sum\limits_{k+\ell=j} b_{k\ell} x^k y^\ell$, $a_{k\ell}$, $b_{k\ell} \in R$, $n \geq 2$, $i, j \in N$.

Теорема 4. Пусть система (14) удовлетворяет условиям: $(\widetilde{P}, \widetilde{Q}) = 1$, $P_n(x,y) Q_n(x,y) \not\equiv 0$, и кроме этого, $P_r(x,y) \not\equiv 0$, $r \leq s$ ($Q_s(x,y) \not\equiv 0$, $s \leq r$), $\max(r,s) < n$. Тогда через особую точку $(0,0)$ системы (14) проходит не более $r+n$ ($s+n$) прямых изоклин.

Доказательство. Рассуждения проведем для случая $P_r(x,y) \not\equiv 0$, $r \leq s$, так как случай $Q_s(x,y) \not\equiv 0$, $s \leq n$ сводится к первому заменой $x = \bar{y}$, $y = \bar{x}$.

Пусть прямая $y = kx$ – изоклина системы (14). Не уменьшая общности, считаем, что $m \in R \setminus \{0\}$, так как этого можно добиться с помощью преобразования $x = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$, $y = \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}$.

Таким образом, имеет место равенство $\dfrac{\widetilde{Q}(x,kx)}{\widetilde{P}(x,kx)} \equiv m$, из которого следует система уравнений:

$$\begin{cases} f_r(k)m = 0, \\ f_{r+1}(k)m = 0, \\ ----- \\ f_{s-1}(k)m = 0, \\ f_s(k)m = g_s(k), \\ ----- \\ f_{n-1}(k)m = g_{n-1}(k), \\ f_n(k)m = g_n(k), \end{cases} \tag{15}$$

где $f_i(k)$ ($i = \overline{r,n}$) и $g_j(k)$ ($j = \overline{s,n}$) – многочлены степеней i и j соответственно.

В силу условия $P_n(x,y) \not\equiv 0$ выполняется неравенство $f_n(k) \not\equiv 0$. Поэтому, исключив m в системе (15), получим:

$$
\begin{cases}
f_r(k)\cdot g_n(k)=0,\\
f_{r+1}(k)\cdot g_n(k)=0,\\
-----\\
f_{s-1}(k)\cdot g_n(k)=0,\\
-----\\
f_s(k)\cdot g_n(k)=g_s(k)\cdot f_n(k),\\
-----\\
f_{n-1}(k)\cdot g_n(k)=g_{n-1}(k)\cdot f_n(k).
\end{cases} \qquad (16)
$$

Уравнение $f_r(k)\cdot g_n(k)=0$ не вырождено, следовательно, система (16) имеет не более $r+n$ решений. Это означает, что число прямых изоклин системы (14), инцидентных особой точке $(0,0)$, не превосходит $r+n$. Теорема доказана.

Следствие 2. Число прямых изоклин (14), инцидентных особой точке $(0,0)$, при выполнении условий теоремы 4 не превосходит $2n-1$, причем если $r=s$, $|P_i(x,y)|+|Q_j(x,y)|\equiv 0$, $i,j\in\overline{r+1,n-1}$, r и n – числа разной четности, то существует хотя бы одна прямая изоклина системы (14), проходящая через особую точку $(0,0)$.

Действительно, при $r=s=n-1$ из теоремы 4 следует, что число прямых изоклин, инцидентных особой точке $(0,0)$, не более $2n-1$.

Если $r=s$, $|P_i(x,y)|+|Q_j(x,y)|\equiv 0$, $i,j\in\overline{r+1,n-1}$, то система (16) вырождается в уравнение

$$f_r(k)g_n(k)=g_r(k)f_n(k). \qquad (17)$$

Уравнение (17) запишем в развернутом виде:

$$(a_{0r}b_{0n}-a_{0n}b_{0r})k^{n+r}+...+(a_{r0}b_{n-1,1}+a_{r-1,1}b_{n0}-a_{n0}b_{r-1,1}-a_{n-1,1}b_{r0})k+a_{r0}b_{n0}-a_{n0}b_{r0}=0. \qquad (18)$$

Так как n и r – числа разной четности, то уравнение (18) имеет хотя бы один действительный корень, которому соответствует прямая изоклина системы (14). Если $a_{0r}b_{on}-a_{0n}b_{0r}=0$, то прямая $x=0$ – изоклина системы (14). Следствие доказано.

Замечание 5. В статье [4] рассматривалась система

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt}=P_m(x,y)+P_n(x,y),\\
\dfrac{dy}{dt}=Q_m(x,y)+Q_n(x,y),
\end{cases} \qquad (19)
$$

где P_i, Q_i – однородные многочлены степени $i=m,n$. Для нее доказано, что через особую точку $(0,0)$ проходит хотя бы одна прямая изоклина, если m и n – числа разной четности. При этом, если правые части уравнений системы (19) взаимно просты, то число таких изоклин не превосходит $m+n$. Таким образом, результат работы [4], приведенный нами, является частным случаем теоремы 4, а именно случаем, когда $r=s=m$, $|P_i(x,y)|+|Q_j(x,y)|\equiv 0$ $\forall_{i,j}\in\{m+1,m+2,...,n-1\}$.

В статьях [1, 5] доказано утверждение о том, что через любую особую точку квадратичной системы проходит хотя бы одна прямая изоклина, и их число не более трех. Оно является следствием теоремы 4 и теоремы, доказанной в работе [4].

Замечание 6. Система (14) может вовсе не иметь ни одной прямой изоклины, проходящей через точку $(0,0)$ при выполнении условий теоремы 4.

Пример 1. Не существует ни одной прямой изоклины, инцидентной точке $(0,0)$ для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y + x^3 - 7x^2 y - 38xy^2 + 420y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 - 3xy + 2y^2 + x^3 - 13xy^2 - 12y^3. \end{cases}$$

Действительно, система (16) применительно к данной дифференциальной системе имеет вид:

$$\begin{cases} (1-3k)(1-13k^2-12k^3) = 0, \\ (1-3k+2k^2)(1-7k-38k^2-420k^3) = 0 \end{cases} \tag{20}$$

Первое уравнение системы (20) имеет четыре решения, ни одно из которых не удовлетворяет второму уравнению этой системы.

В работе [2] отсутствие прямой изоклины, проходящей через особую точку $(0,0)$ дифференциальной системы, рассмотренной в примере 1, объясняется наличием в правой части хотя бы одного из уравнений системы однородных многочленов степеней только одинаковой четности. Теперь уже очевиден ответ на возникший в [2] вопрос.

Пример 2. Прямые $y = 3x$, $y = -5x$, $y = 5x$, $y = -x$, $y = -10x$ являются изоклинами системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x^2 - 2xy + y^2 + (y+5x)(y-5x)(y+10x), \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x^2 - 2xy + y^2 + 4(y+5x)(y-5x)(y+10x). \end{cases}$$

Пример 3. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x^2 - 15xy - 8y^2 + 20x^3 + 36x^2 y + 36xy^2 + 16y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x^2 + 15xy + 8y^2 - 4x^3 - 11x^2 y - 26xy^2 - 16y^3 \end{cases}$$

имеет пять прямых изоклин, в том числе: $x = 0$, $y = -2x$, $x = -2y$, $y = -6x/5$, $y = -7x/8$. Направления, индуцированные на этих прямых, равны соответственно $m_1 = -1$, $m_2 = -\dfrac{7}{6}$, $m_3 = -\dfrac{1}{3}$, $m_4 = -\dfrac{37}{64}$, $m_5 = -\dfrac{2}{5}$.

Пример 4.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-k_1 x)(y-k_2 x)\sum\limits_{i=0}^{3} f_i(x,y) + \prod\limits_{j=3}^{7}(y-k_j x), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-k_1 x)(y-k_2 x)\sum\limits_{i=0}^{3} f_i(x,y), \end{cases} \tag{21}$$

где $\prod\limits_{\ell=1}^{7} k_\ell \neq 0$, $k_r \neq k_s$, если $r \neq s$, $r, s \in \overline{1,7}$, $f_i(x,y)$ – однородные многочлены степени i, $f_i(x,y) \not\equiv 0 \forall i \in \{0,1,2,3\}$. Система (21) имеет семь прямых изоклин, в том числе: $y - k_s x = 0$, $s = 1,2$, $y - k_j x = 0$, $j = \overline{3,7}$.

Пример 5.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \prod_{i=1}^{3}(y-k_i x)\sum_{j=0}^{2} f_j(x,y) + \prod_{s=4}^{8}(y-k_s x), \\ \dfrac{dy}{dt} = \prod_{i=1}^{3}(y-k_i x)\sum_{j=0}^{2} f_j(x,y), \end{cases} \tag{22}$$

где $f_j(x,y)$ однородные многочлены степени j, $f_j(x,y) \not\equiv 0$ $\forall_j \in \{0,1,2\}$, $\prod_{\ell=1}^{8} k_\ell \neq 0$, $k_m \neq k_n$, если $m \neq n$, $m,n \in \overline{1,8}$. Система (22) имеет восемь прямых изоклин, в том числе: $y - k_i x = 0$, $i = 1,2,3$, $y - k_s x = 0$, $s = \overline{4,8}$.

Замечание 7. Следствие 2 из теоремы 4 в той части, где дается оценка сверху числа прямых изоклин, инцидентных особой точке $(0,0)$ системы (14), может быть доказано другим способом.

Пусть $y = kx$ – прямая изоклина системы (14), тогда выполняется равенство

$$\frac{\tilde{Q}(x,kx)}{\tilde{P}(x,kx)} \equiv m. \tag{23}$$

Так как число прямых изоклин системы (14) конечно, то, выбрав соответствующим образом систему координат, можно добиться выполнения условия $m \in R \setminus \{0\}$. При этом общность рассуждений не нарушается.

Из (23) следует равенство

$$m = \frac{\tilde{Q}(1,k)}{\tilde{P}(1,k)}. \tag{24}$$

Продифференцируем обе части (23) по x:

$$[\tilde{Q}'_x(x,kx) + \tilde{Q}'_y(x,kx)k]\tilde{P}(x,kx) - [\tilde{P}'_x(x,kx) + \tilde{P}'_y(x,kx)k]\tilde{Q}(x,kx) \equiv 0. \tag{25}$$

С учетом (24) из (25) получаем уравнение

$$[\tilde{Q}'_y(1,k)\tilde{P}(1,k) - \tilde{P}'_y(1,k)\tilde{Q}(1,k)]k - \tilde{Q}'_x(1,k)\tilde{P}(1,k) - \tilde{P}'_x(1,k)\tilde{Q}(1,k) \equiv 0. \tag{26}$$

Выражение $\tilde{Q}'_y(1,k)\tilde{P}(1,k) - \tilde{P}'_y(1,k)\tilde{Q}(1,k)$ является многочленом степени не выше $2n-2$. Следовательно, (26) – уравнение степени не выше $2n-1$. Это и означает, что через точку покоя $(0,0)$ системы (14) проходит не более $2n-1$ прямых изоклин.

Теорема 5. Если система (1) удовлетворяет условиям теоремы 2, то число ее прямых изоклин, параллельных между собой, не превосходит $2n-1$.

Доказательство. В уравнении (9) считаем, что k – const, тогда (9) является уравнением степени не выше $2n-1$ относительно b. Следовательно, это уравнение имеет не более $2n-1$ корней, что равносильно наличию у системы (1) не более $2n-1$ параллельных между собой прямых изоклин. Теорема доказана.

Замечание 8. Теорема о числе параллельных между собой прямых изоклин кубической системы, доказанная в работе [6], является следствием теоремы 5.

Теорема 6. Если система (1) имеет не менее $n+2$ прямых изоклин, параллельных между собой и на этих прямых индуцированы попарно различные направления, то любая прямая изоклина этой системы параллельна указанным прямым.

Доказательство. Пусть $\ell_1^{m_1}, \ell_2^{m_2}, \ldots, \ell_{n+2}^{m_{n+2}}$ – параллельные между собой прямые изоклины системы (1), причем $m_i \neq m_j$, если $i \neq j$, $i, j \in \overline{1, n+2}$. Предположим, что L – прямая изоклина системы (1), пересекающая прямые $\ell_i^{m_i}$ $(i = \overline{1, n+2})$. Тогда направление m, индуцированное на прямой L, равно разве что одному из чисел $m_1, m_2, ..., m_{n+2}$. Приходим к противоречию с тем, что система (1) имеет на прямой не более n особых точек. Теорема доказана.

Следствие 3. Если система (1) при $n = 3$ имеет пять параллельных между собой прямых изоклин, и на этих прямых индуцированы попарно различные направления, то эта система не имеет прямой изоклины, отличной от пяти параллельных между собой изоклин.

Теорема 7. Пусть система (1) имеет не менее $2n$ прямых изоклин ($n > 2$). Тогда среди них не более $n+1$ параллельных между собой прямых изоклин, на которых индуцированы попарно различные направления.

Доказательство. Предположим, что система (1) имеет более $n+1$ параллельных между собой прямых изоклин, на которых индуцированы попарно различные направления. Тогда по теореме 6 система имеет только параллельные между собой прямые изоклины. Но согласно теореме 5 число параллельных между собой прямых изоклин системы (1) не превосходит $2n-1$. Пришли к противоречию с тем, что по условию теоремы система имеет более $2n-1$ прямых изоклин. Теорема доказана.

Теорема 8. Если система (1) имеет не менее $3n-2$ прямых изоклин ($n > 2$), в том числе $n+1$ параллельных между собой прямых $\ell_1^{m_1}, \ell_2^{m_2}, ..., \ell_{n+1}^{m_{n+1}}$, где $m_i \neq m_j$ при $i \neq j$, $i, j \in \overline{1, n+1}$, то нет у системы (1) прямой изоклины L такой, что $L \parallel \ell_i^{m_i}$ $(i \in \overline{1, n+1})$.

Доказательство. Предположим, что существует прямая изоклина L системы (1), где $L \parallel \ell_i^{m_i}$ $(i \in \overline{1, n+1})$, и m – направление, индуцированное на L. Тогда m равно одному из чисел $m_1, m_2, ..., m_{n+1}$, так как в противном случае по теореме 6 все прямые изоклины системы (1) параллельны между собой. Вместе с тем по теореме 5 число таких прямых изоклин не более $2n-1$, а по условию теоремы система имеет не менее $3n-2$ прямых изоклин. Таким образом, у системы (1) имеется не менее $n-1$ прямых изоклин (множество этих прямых обозначим M), пересекающих все прямые изоклины $\ell_1^{m_1}, \ell_2^{m_2}, ..., \ell_{n+1}^{m_{n+1}}, L$. Ради определенности положим $m = m_j$, $j \in \{1, 2, ..., n+1\}$. По теореме 1 одно и то же направление не может быть индуцировано более чем на n прямых изоклинах. Поэтому во множестве M найдется хотя бы одна прямая изоклина L_1, на которой индуцировано направление $m_v \neq m_j$. Число m_v может быть равно разве что одному из чисел $m_1, ..., m_{j-1}, m_{j+1}, ..., m_{n+1}$. Пришли к противоречию с тем, что система (1) имеет на прямой не более n особых точек. Теорема доказана.

Лемма. Пусть система (1) имеет две параллельные прямые изоклины $\ell_1^{m_1}$ и $\ell_2^{m_2}$, где $m_1 \neq m_2$. Тогда на каждой из этих прямых изоклин система (1) имеет не более $n-1$ особых точек.

Доказательство. Подходящим линейным преобразованием (см. [1]) систему (1) можно привести к системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (A_1 x + B_1 y + C_1) P_{n-1}(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = (A_2 x + B_2 y + C_2) Q_{n-1}(x, y), \end{cases} \qquad (27)$$