МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 512.64
ББК 22.143
К 59

Козлов В.А.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и методики их преподавания Армавирской государственной педагогической академии, Армавир, shagin196@yandex.ru
Паланджянц Л.Ж.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и системного анализа инженерно-экономического факультета Майкопского государственного технологического университета, Майкоп, тел. (8772) 57-03-53, levonmgtu@rambler.ru

О криволинейном мультипликативном интеграле

(Рецензировано)

Аннотация
Предлагается метод вычисления криволинейного мультипликативного интеграла от матричных функций произвольного порядка. Интегрирование ведется вдоль прямоугольника на плоскости с помощью интегрального представления соответствующего обыкновенного мультипликативного интеграла и разложения подынтегральных матричных функций в ряд по степеням независимых аргументов.
Ключевые слова*: мультипликативный интеграл, кривизна.*

Kozlov V.A.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Mathematics and Methodology of Teaching, Armavir State Pedagogical Academy, Armavir, e-mail: shagin196@yandex.ru
Palandzhyants L.Zh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Higher Mathematics and System Analysis Department, Engineering-Economics Faculty, Maikop State University of Technology, Maikop, ph. (8772) 57-03-53, e-mail: levonmgtu@rambler.ru

On a curvilinear multiplicative integral

Abstract
The paper proposes a method for calculating the curvilinear integral of the matrix multiplicative functions of arbitrary order. Integration is carried out along the plane of the rectangle using the integral representation of the corresponding ordinary multiplicative integral and expansion of the integrands of matrix functions in powers of independent variables.
Keywords: *multiplicative integral, curvature.*

В статье приводится метод вычисления криволинейного мультипликативного интеграла вдоль замкнутого прямоугольника на плоскости, основанный на интегральном представлении обыкновенного мультипликативного интеграла и разложении подынтегральных матричных функций в ряд по степеням независимых аргументов. В работе [1] вычисление было основано на дифференциальном представлении обыкновенного мультипликативного интеграла. Тем самым доказано следствие из работы [1].

Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл второго рода

$$I \equiv \overset{\frown}{\int_{c}} E + P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,, \tag{1}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – достаточно дифференцируемые матричные функции произвольного порядка; c – прямоугольник на плоскости с вершинами в точках $(0,0)$, $(x,0)$, (x,y), $(0,y)$.

Наша цель – вычислить приближенно интеграл (1), считая, что прямоугольник c ограничивает область малой площади и доказать тем самым следствие из теоремы [1].

Для вычисления интеграла (1) воспользуемся интегральным представлением мультипликативного интеграла, известным как матрицант соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений $Y' = A(t)Y$, где $Y(t) = \overset{t}{\underset{0}{\int\limits^{\frown}}} E + A(t)dt$, $A(t)$ – достаточно дифференцируемая матричная функция произвольного порядка. При этом матрицант имеет вид:

$$Y(t) = E + \int_a^t A(t)dt + \int_a^t A(\tau)\int_a^\tau A(s)ds d\tau + \cdots \tag{2}$$

Имеет место следующее равенство:

$$\overset{\frown}{\int_c} E + Pdx + Qdy = \overset{\frown}{\int_y^0} E + Q(0,y)dy \cdot \overset{\frown}{\int_x^0} E + P(x,y)dx \cdot \overset{\frown}{\int_0^y} E + Q(x,y)dy \cdot \overset{\frown}{\int_0^x} E + P(x,0)dx. \tag{3}$$

Каждый из четырех обыкновенных мультипликативных интегралов в равенстве (3) может быть вычислен с помощью формулы (2) и разложения в ряд по степеням независимых аргументов подынтегральных матричных функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

Рассмотрим разложение в ряд по степеням независимых аргументов подынтегральных матричных функций мультипликативных интегралов I_k, $k = 1,2,3,4$.

$$I_1 \equiv \overset{\frown}{\int_0^x} E + P(x,0)dx = \overset{\frown}{\int} E + \left[\sum_{i=0}^m \frac{\partial^i P(0,0)}{\partial x^i}\frac{x^i}{i!} + \cdots\right]dx.$$

$$I_2 \equiv \overset{\frown}{\int_0^y} E + Q(x,y)dy = \overset{\frown}{\int_0^y} E + \left[\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)} Q(0,0) + \cdots\right]dy.$$

$$I_3 \equiv \overset{\frown}{\int_x^0} E + P(x,y)dx = \overset{\frown}{\int_0^y} E + \left[\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)} P(0,0) + \cdots\right]dx.$$

$$I_4 \equiv \overset{\frown}{\int_0^x} E + Q(0,y)dy = \overset{\frown}{\int} E + \left[\sum_{i=0}^m \frac{\partial^i Q(0,0)}{\partial y^i}\frac{x^i}{i!} + \cdots\right]dy.$$

Применим формулу (2) к интегралам I_k, $k = 1,2,3,4$.

Для вычисления интеграла I_1 формулу (2) запишем в следующем виде:

$$I_1 = E + \int_0^x P(x,0)dx + \int_0^x P(x,0)\int_0^t P(t,0)dtdx + \int_0^x P(x,0)\int_0^t P(t,0)\int_0^s P(s,0)dsdtdx + \cdots$$

Тогда, после интегрирования по переменной x, интеграл I_1 примет вид:

$$I_1 = E + P\cdot x + \left(\frac{\partial P}{\partial x} + P^2\right)\frac{x^2}{2} + \left(P^3 - P\frac{\partial P}{\partial x} + 2\frac{\partial P}{\partial x}P\right)\frac{x^3}{3!} +$$

$$+\left(-4P^2\frac{\partial P}{\partial x} + 3\frac{\partial P}{\partial x}P^2 + 2P\frac{\partial P}{\partial x}P + 2\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + P\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}P + \frac{\partial^3 P}{\partial x^3}\right)\frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{4}$$

Аналогично для вычисления интеграла I_2 формулу (2) запишем в следующем виде:

$$I_2 = E + \int_0^y Q(x,y)dy + \int_0^y Q(x,y)\int_0^t Q(x,t)dtdy + \int_0^y Q(x,y)\int_0^t Q(x,t)\int_0^s Q(x,s)dsdtdx + \cdots$$

Тогда, после интегрирования по переменной y, интеграл I_2 примет вид:

$$I_2 = E + \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x}x + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\frac{x^2}{2} - \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}\frac{x^3}{3!}\right)\cdot y + \left(Q^2 + \frac{\partial Q}{\partial y} + \left(Q\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}Q\right)\cdot x + \right.$$

$$+ Q\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + Q\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}Q + \left.\frac{\partial^3 Q}{\partial x^2 \partial y}\right)\cdot\frac{y^2}{2} + \left(Q^3 - Q\frac{\partial Q}{\partial y} + 2\frac{\partial Q}{\partial y}Q + \left(Q^2\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}Q^2 + \right.\right.$$

$$+ \left.\left.\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}Q + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x}Q\right)\cdot x\right)\cdot\frac{y^3}{3!} + \left(3\frac{\partial Q}{\partial y}Q^2 - 4Q^2\frac{\partial Q}{\partial y} + 2Q\frac{\partial Q}{\partial y}Q + 2\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + Q\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}Q + \frac{\partial^3 Q}{\partial y^3}\right)\cdot\frac{y^4}{4!} + \cdots$$

Для вычисления интеграла I_3 формулу (2) запишем в следующем виде:

$$I_3 = E + \int_x^0 P(x,y)dx + \int_x^0 P(x,y)\int_t^0 P(t,y)dtdx + \int_x^0 P(x,y)\int_t^0 P(t,y)\int_s^0 P(s,y)dsdtdx + \cdots$$

Тогда интеграл I_3 примет вид:

$$I_3 = E + \left(-P - \frac{\partial P}{\partial y}y - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\frac{y^2}{2} - \frac{\partial^3 P}{\partial y^3}\frac{y^3}{3!}\right)\cdot x + \left(P^2 - \frac{\partial P}{\partial x} + \left(P\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}P\right)\cdot y + \right.$$

$$+ P\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + P\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}P - \left.\frac{\partial^3 P}{\partial x \partial y^2}\right)\cdot\frac{x^2}{2} + \left(-P^3 - P\frac{\partial P}{\partial x} + 2\frac{\partial P}{\partial x}P + \left(P^2\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}P^2 + \right.\right.$$

$$+ \left.\left.\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}P + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial P}{\partial y}P\right)\cdot y\right)\cdot\frac{x^3}{3!} + \left(-3\frac{\partial P}{\partial x}P^2 + 4P^2\frac{\partial P}{\partial x} - 2P\frac{\partial P}{\partial x}P + 2\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + P\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}P - \frac{\partial^3 P}{\partial x^3}\right)\cdot\frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Для вычисления интеграла I_4 формулу (2) запишем в следующем виде:

$$I_4 = E + \int_0^y P(0,y)dy + \int_0^y P(0,y)\int_0^t P(0,t)dtdx + \int_0^y P(0,y)\int_0^t P(0,t)\int_0^s P(0,s)dsdtdy + \cdots$$

Тогда, после интегрирования по переменной y, интеграл I_4 примет вид:

$$I_4 = E - Q\cdot y + \left(Q^2 + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\frac{y^2}{2} + \left(2\frac{\partial Q}{\partial y}Q - Q\frac{\partial Q}{\partial y} - Q^3\right)\frac{y^3}{3!} +$$

$$+ \left(4Q^2\frac{\partial Q}{\partial y} - 3\frac{\partial Q}{\partial y}Q^2 - 2Q\frac{\partial Q}{\partial y}Q + 2\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + Q\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}Q - \frac{\partial^3 Q}{\partial y^3}\right)\frac{y^4}{4!} + \cdots$$

Теперь предстоит перемножить интегралы I_k, $k = 1,2,3,4$ в следующем порядке:

$I = I_4 \cdot I_3 \cdot I_2 \cdot I_1$. Для удобства вычислений найдем отдельно произведения $I_2 \cdot I_1$ и $I_4 \cdot I_3$, а затем вычислим интеграл I.

Опуская промежуточные вычисления, получаем:

$$I_2 \cdot I_1 = E + P\cdot x + Q \cdot y + \left(\frac{\partial P}{\partial x} + P^2\right)\frac{x^2}{2} + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} + Q^2\right)\frac{y^2}{2} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + QP\right)\cdot xy +$$

$$+\left(P^3 + \left[\frac{\partial P}{\partial x}, P\right] + \frac{\partial P}{\partial x}P\right)\frac{x^3}{3!} + \left(Q^3 + \left[\frac{\partial Q}{\partial y}, Q\right] + \frac{\partial Q}{\partial y}Q\right)\frac{y^3}{3!} +$$

$$+\left(2\frac{\partial Q}{\partial x}P + Q\frac{\partial P}{\partial x} + QP^2 + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)\frac{x^2 y}{2} + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}P + \left[\frac{\partial Q}{\partial x}, Q\right] + 2Q\frac{\partial Q}{\partial x} + Q^2 P + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)\frac{xy^2}{2} +$$

$$+\left(\left[P,\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right], P\right] + 3\left[\frac{\partial P}{\partial x}, P^2\right] + \frac{\partial P}{\partial x}P^2 + 2\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left[P, \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right] + 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}P + \frac{\partial^3 P}{\partial x^3}\right)\frac{x^4}{4!} +$$

$$+\left(\left[Q,\left[\frac{\partial Q}{\partial y}\right], Q\right] + 3\left[\frac{\partial Q}{\partial y}, Q^2\right] + \frac{\partial Q}{\partial y}Q^2 + 2\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + \left[Q, \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right] + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}Q + \frac{\partial^3 Q}{\partial y^3}\right)\frac{y^4}{4!} +$$

$$+\left(QP^3 + Q\left[\frac{\partial P}{\partial x}, P\right] + Q\frac{\partial P}{\partial x}P + 3\frac{\partial O}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x} + 3\frac{\partial Q}{\partial x}P^2 + \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}P\right)\frac{x^3 y}{3!} +$$

$$\left(Q^2\frac{\partial P}{\partial x} + Q^2P^2 + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}P^2 + 2\left[\frac{\partial Q}{\partial x}, Q\right]P + 4Q\frac{\partial Q}{\partial x}P + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + 2\left[\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, Q\right] +\right.$$

$$\left.+ 4Q\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + 4\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^3 Q}{\partial x^2 \partial y}\right)\frac{x^2y^2}{4} +$$

$$+\left(Q^3 P + \left[\frac{\partial Q}{\partial y}, Q\right]P + \frac{\partial Q}{\partial y}QP + 3Q\frac{\partial Q}{\partial x}Q + \left[\left[\frac{\partial Q}{\partial x}, Q\right], Q\right] + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}Q\right)\frac{xy^3}{3!} + \cdots$$

Аналогично вычисляя $I_4 \cdot I_3$, получаем:

$$I_4 \cdot I_3 = E - P\cdot x - Q\cdot y + \left(P^2 - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{x^2}{2} + \left(Q^2 - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\frac{y^2}{2} + \left(QP - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot xy +$$

$$+\left(-P^3 + \left[\frac{\partial P}{\partial x}, P\right] + \frac{\partial P}{\partial x}P\right)\frac{x^3}{3!} + \left(-Q^3 + \left[\frac{\partial Q}{\partial y}, Q\right] + \frac{\partial Q}{\partial y}Q\right)\frac{y^3}{3!} +$$

$$+\left(2P\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial P}{\partial x} - QP^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \left[\frac{\partial P}{\partial y}, P\right]\right)\frac{x^2 y}{2} + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}P + 2Q\frac{\partial P}{\partial y} - Q^2 P - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)\frac{xy^2}{2} +$$

$$+\left(-\left[P,\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right], P\right] + 3\left[P^2, \frac{\partial P}{\partial x}\right] - \frac{\partial P}{\partial x}P^2 + 2\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left[P, \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right] + 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}P - \frac{\partial^3 P}{\partial x^3}\right)\frac{x^4}{4!} +$$

$$+\left(-\left[Q,\left[\frac{\partial Q}{\partial y}\right], Q\right] + 3\left[Q^2, \frac{\partial Q}{\partial y}\right] - \frac{\partial Q}{\partial y}Q^2 + 2\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + \left[Q, \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right] + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}Q - \frac{\partial^3 Q}{\partial y^3}\right)\frac{y^4}{4!} +$$

$$+\left(QP^3 - Q\left[\frac{\partial P}{\partial x}, P\right] - Q\frac{\partial P}{\partial x}P - \left[P,\left[\frac{\partial P}{\partial y}, P\right]\right] + 3P\frac{\partial P}{\partial y}P + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{x^3 y}{3!} +$$

$$+\left(-4QP\frac{\partial P}{\partial y}+2Q\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}-2Q\left[\frac{\partial P}{\partial y},P\right]+Q^2P^2-Q^2\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}P^2+\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+2P\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left[\frac{\partial^2 P}{\partial y^2},P\right]-\frac{\partial^3 P}{\partial x\partial y^2}\right)\frac{x^2y^2}{4}+$$

$$+\left(Q^3P-\left[\frac{\partial Q}{\partial y},Q\right]P-\frac{\partial Q}{\partial y}QP+3Q\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-3Q^2\frac{\partial P}{\partial y}+3\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial^3 P}{\partial y^3}\right)\frac{xy^3}{3!}+\cdots$$

Таким образом, вычисляя $I=I_4\cdot I_3\cdot I_2\cdot I_1$, получаем криволинейный мультипликативный интеграл (1) вдоль прямоугольника c с вершинами в точках $(0,0)$, $(x,0)$, (x,y), $(0,y)$ на плоскости, имеющий вид:

$$\overset{\frown}{\int_c} E+Pdx+Qdy=E+\left(Q_x-P_y+QP-PQ\right)xy+\left([P_x,P]-4P_xP\right)\frac{x^3}{3!}+$$

$$+\left(-[P,[Q,P]]-2[P,Q_x]+[P,P_y]+[Q,P_x]+Q_{xx}-P_{xy}\right)\frac{x^2y}{2}+$$

$$+\left([Q,[P,Q]]+2[Q,P_y]-[P,Q_y]+[Q,Q_x]-P_{yy}+Q_{xy}\right)\frac{xy^2}{2}+\left([Q_y,Q]-4Q_yQ\right)\frac{y^3}{3!}+$$

$$+\left(-2P^4+6[[P_x,P],P]+[P^2,P_x]+2[P,P_{xx}]+4P_{xx}P-2(P_x)^2\right)\frac{x^4}{4!}+$$

$$+\left(-2Q^4+6[[Q_y,Q],Q]+[Q^2,Q_y]+2[Q,Q_{yy}]+4Q_{yy}Q-2(Q_y)^2\right)\frac{y^4}{4!}+$$

$$+\left(2[[Q,P],Q]-[[Q,P^2],Q]+4[P_yP,Q]+2[[P_y,P],Q]+4[P_yQ,P]+[[Q,P_x],Q]-\right.$$

$$-[[P,Q_y],P]+2[[Q_x,Q],P]+4[Q,P]Q_x+[Q_y,P_x]+[P,P_{yy}]+2[Q,P_{xy}]+$$

$$\left.+2[Q_{xy},P]+2Q_{xx}Q+2PP_{yy}-4P_yQ_x-P_{xyy}+2Q_{xxy}\right)\frac{x^2y^2}{4}+$$

$$+\left([Q^3,P]+3[QP,Q]Q+3[[Q,P_y],Q]-[Q,[Q_x,Q]]+[[Q_y,Q],P]+3[QP,Q_y]+[Q_yQ,P]+\right.$$

$$\left.+3[Q_yP,Q]+[Q_y,Q_x]-2Q_yQ_x+3[Q,P_{yy}]+3[Q_y,P_y]+[Q_{xy},Q]-2QQ_{xy}-P_{yyy}\right)\frac{xy^3}{3!}+$$

$$+\left([Q,P^3]+3P[PQ,P]-3[P,[Q_x,P]]+[P_x,PQ]+[[P,P_y],P]+[[P_x,P],Q]+\right.$$

$$\left.+[QP_x,P]+[PP_x,Q]+[P_x,P_y]-2P_yP_x+3[Q_{xx},P]+3[Q_x,P_x]+6PP_yP-2P_{xy}P+O_{xxx}\right)\frac{x^3y}{3!}+\cdots$$

Таким образом, получено представление криволинейного мультипликативного интеграла с точностью до четвертой степени переменных интегрирования.

Примечания:

1. Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж. О вычислении криволинейного мультипликативного интеграла // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2013. Вып. 2 (119). С. 23-29.
URL: http://vestnik.adygnet.ru

References:

1. Kozlov V.A., Palandzhyants L.Zh. The computation of a curvilinear multiplicative integral // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2013. Iss. 2 (119). P. 23-29.
URL: http://vestnik.adygnet.ru