УДК 517.925
ББК 22.161.6
Р 65

Ройтенберг В.Ш.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ярославского государственного технического университета, Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

Об одной бифуркации трехмерных кусочно-гладких векторных полей

(Рецензирована)

Аннотация
Рассматривается бифуркация, при которой замкнутая траектория, принадлежащая поверхности скользящих движений, получает дугу вне этой поверхности.
Ключевые слова: *кусочно-гладкие векторные поля, бифуркации замкнутой траектории.*

Roytenberg V.Sh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Higher Mathematics Department, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

On a bifurcation of thee-dimensional piecewise smooth vector fields

Abstract
We consider a bifurcation under which the closed orbit belonging to the surface of sliding motions receives an arc outside of this surface.
Keywords: *piecewise smooth vector fields, bifurcations of closed orbits.*

1. Введение. Кусочно-гладкие векторные поля (дифференциальные уравнения с разрывными кусочно-гладкими правыми частями) являются математическими моделями релейных систем автоматического управления. Устойчивые замкнутые траектории, соответствующие периодическим решениям, описывают автоколебания. Поэтому представляет интерес изучение бифуркаций, при которых появляются или видоизменяются такие траектории. Некоторые локальные бифуркации описаны в книге А.Ф. Филиппова [1] в основном для случая двумерного фазового пространства. Ряд нелокальных бифуркаций при размерности фазового пространства $n \geq 3$ изучен в работах автора [2-6].

В работе М.М. Шумафова [7] рассматривались бифуркации на поверхности скользящих движений. В работе автора [4] изучалась бифуркация перерождения замкнутой траектории, при которой менялось число участков скользящих движений, в частности, замкнутая траектория без участков скользящих движений получала такой участок. Здесь мы опишем ситуацию, в определенном смысле противоположную: замкнутая траектория, целиком принадлежащая поверхности скользящих движений, приобретает дугу, не лежащую на этой поверхности.

2. Кусочно-гладкие векторные поля на трехмерном многообразии. Пусть M – компактное трехмерное C^∞-многообразие, D – разбиение M на компактные трехмерные C^∞-подмногообразия M_i, $i \in \{1,2,\dots,s\}$, такие, что $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_s$, $M_i \cap M_j = \partial M_i \cap \partial M_j$ при $1 \leq i < j \leq s$. Если $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ при $i \neq j$, то $M_i \cap M_j$ является замкнутым двумерным C^∞-подмногообразием в M.

Пусть $\mathfrak{X}^\infty(M_i)$ – множество C^∞-векторных полей на M_i, $i \in \{1,2,\dots,s\}$,

$$\mathfrak{X}^\infty(M,D) := \mathfrak{X}^\infty(M_1) \times \mathfrak{X}^\infty(M_2) \times \dots \times \mathfrak{X}^\infty(M_s).$$

Элементы $X \in \mathfrak{X}^\infty(M,D)$ будем называть *кусочно-гладкими векторными полями на многообразии M с разбиением D*. Кусочно-гладкое векторное поле $X = (X^{(1)},\dots X^{(s)}) \in \mathfrak{X}^\infty(M,D)$ можно отождествить с классом векторных полей $X^*: M \to TM$, где $X^*(x) = X^{(i)}(x)$ при $x \in int M_i$. Векторные поля X^*, вообще говоря,

имеют разрывы на поверхностях ∂M_i. *Траекториями* векторного поля $X = (X^{(1)}, \dots X^{(s)}) \in \mathfrak{X}^\infty(M, D)$, следуя [1, с. 95], будем называть траектории дифференциального включения $\dot{x} \in \hat{X}(x)$, $x \in M$, где $\hat{X}(x) = \{X^{(i)}(x)\}$ при $x \in intM_i$ и $\hat{X}(x)$ – выпуклая оболочка векторов $X^{(i)}(x)$ и $X^{(j)}(x)$ при $x \in M_i \cap M_j \neq \emptyset$, $i \neq j$.

Однопараметрическим семейством кусочно-гладких векторных полей назовем отображение $(-v, v) \ni \varepsilon \to X_\varepsilon = (X_\varepsilon^{(1)}, \dots, X_\varepsilon^{(s)}) \in \mathfrak{X}^\infty(M, D)$, для которого отображения $(x, \varepsilon) \to X_\varepsilon^{(i)}$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, принадлежат классу C^∞. Будем его обозначать $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon|<v}$ или просто $\{X_\varepsilon\}$.

3. Поверхность скользящих движений. Пусть для кусочно-гладкого векторного поля $X = (X^{(1)}, \dots X^{(s)}) \in \mathfrak{X}^\infty(M, D)$ вектор $X^{(i)}(x^0)$ касается ∂M_i, то есть принадлежит $T\partial M_i$. Будем говорить, что это *простое касание*, если в окрестности U точки x^0 можно выбрать локальные координаты (x_1, x_2, x_3) так, что точка x^0 имеет нулевые координаты, $\partial M_i \cap U$ задается уравнением $x_3 = 0$ при $x \in U$

$$X^{(i)}(x) = P_1(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + P_3(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_3},$$

где $P_3(0) = 0$, $(\partial P_3(0)/\partial x_1)^2 + (\partial P_3(0)/\partial x_2)^2 \neq 0$. Нетрудно проверить, что это определение не зависит от произвола в выборе координат.

Пусть все точки касания векторных полей $X^{(i)}, i \in \{1, 2, \dots, s\}$ с ∂M_i – простые. Тогда множество S_{iX}, состоящее из точек $x \in \partial M_i$, в которых вектор $X^{(i)}(x)$ *направлен из* M_i *или касается* ∂M_i, является компактным C^∞-многообразием с краем

$$\partial S_{iX} = \{x \in \partial M_i : X^{(i)}(x) \in T_x \partial M_i\}.$$

Множество

$$S_X := \cup_{i=1}^s \cup_{j=i+1}^s (S_{iX} \cap S_{jX}) \setminus (\partial S_{iX} \cap \partial S_{jX})$$

является C^∞-многообразием с краем. Назовем его *устойчивой поверхностью скользящих движений* поля $X \in \mathfrak{X}^\infty(M, D)$. Для любой точки $x \in S_X$ в $\hat{X}(x)$ имеется единственный вектор $X^S(x) \in T_x S_X$, при этом $X^S(\cdot) \in C^\infty$. Тем самым на S_X задано векторное поле X^S класса C^∞. Дуги траекторий поля X^S (скользящие движения) являются и дугами траекторий поля X.

4. Гиперболические замкнутые траектории, содержащие участки скользящих движений. Пусть $L: x = \xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, замкнутая (периодическая) траектория поля $X \in \mathfrak{X}^\infty(M, D)$ периода T, и существуют числа $t_1 < \dots < t_{2m} < t_{2m+1} = t_1 + T$ такие, что дуга $\xi[t_{2i-1}, t_{2i}]$, $i \in \{1, \dots, m\}$, принадлежит S_X и пересекается с ∂S_X в единственной точке $\xi(t_{2i})$, причем это пересечение трансверсально; дуга $\xi(t_{2i}, t_{2i+1})$, $i \in \{1, \dots, m\}$, состоит из дуг траекторий векторных полей $X^{(k)}, k \in \{1, 2, \dots, s\}$, трансверсальных ∂M_k.

Тогда для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ определено отображение f_{2i} по траекториям векторного поля X некоторой окрестности l_{2i} точки $\xi(t_{2i})$ на ∂S_X в окрестность точки $\xi(t_{2i+1})$, принадлежащую $intS_X$. Это отображение является C^∞-вложением. Потребуем, чтобы для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ оно было трансверсально в точке $\xi(t_{2i+1})$ вектору $X^S(\xi(t_{2i+1}))$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, m-1\}$ определен диффеоморфизм f_{2i+1} некоторой окрестности l_{2i+1} точки $\xi(t_{2i+1})$ в $f_{2i}(l_{2i})$ на окрестность точки $\xi(t_{2i+2})$ в ∂S_X по траекториям векторного поля X^S. Теперь в некоторой окрестности точки $p := \xi(t_1)$ на l_1 определено отображение последования по траекториям поля X – локальный диффеоморфизм $f = f_{2m} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$, для которого p – неподвижная точка. Если p – устойчивая гиперболическая неподвижная точка, то есть $|f'(p)| < 1$, то L – *устойчивая гиперболическая замкнутая траектория* с m участками скользящих движений.

5. Формулировка результатов. Рассмотрим однопараметрическое семейство кусочно-гладких векторных полей $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon|<v}$. Предположим, что векторное поле X_0^S имеет замкнутую траекторию L_0, пересекающуюся с ∂S_{X_0} в единственной точке z^0, в которой векторное поле X_0^S имеет простое касание с ∂S_{X_0}. Последнее означает, что в координатах (z_1, z_2) в окрестности V точки z^0 на S_{X_0}, в которых z^0 имеет нулевые координаты, а $S_{X_0} \cap V$ задается неравенством $z_2 \leq 0$,

$$X_0^S = P_1^S(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + P_2^S(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_2},$$

где $P_2^S(0,0) = 0$, $\partial P_2^S(0,0)/\partial z_1 \neq 0, P_1^S(0,0) \neq 0$. Ясно, что L_0 является и траекторией поля X_0. Пусть для определенности $z^0 \in M_0 = M_{i_+} \cap M_{i_-}$ при некоторых $i_+, i_- \in \{1, \dots, s\}$, $i_+ \neq i_-$, а вектор $X_0^{(i_-)}(z^0)$ направлен внутрь M_{i_+}. Будем также считать, что L_0 – двусторонне вложена в M_0, то есть имеет окрестность, гомеоморфную цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$.

Мы можем выбрать C^∞-вложение η: $[-2,2] \to intS_{X_0}$, трансверсальное траекториям поля X_0^S, так, чтобы $\eta(0) \in L_0$ и при достаточно малом $\tau > 0$ было определено отображение последования по траекториям векторного поля X_0^S: $\eta(u) \to \eta(f_0^+(u))$, $u \in [0, \tau)$, $f_0^+(0) = 0$, $f_0^+(\cdot) \in C^\infty$ (рис. 1). Предположим, что $0 < (f_0^+)'(0) < 1$. Это условие не зависит от выбора η.

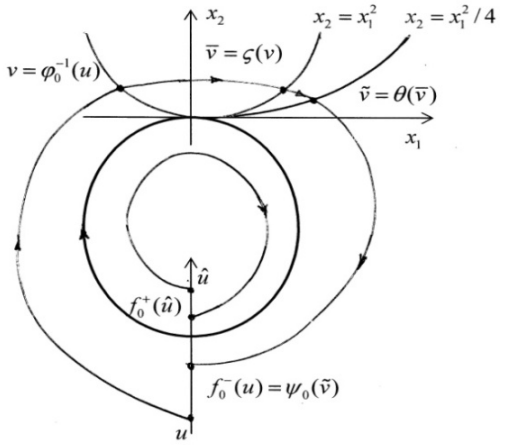

Рис. 1. Функции последования

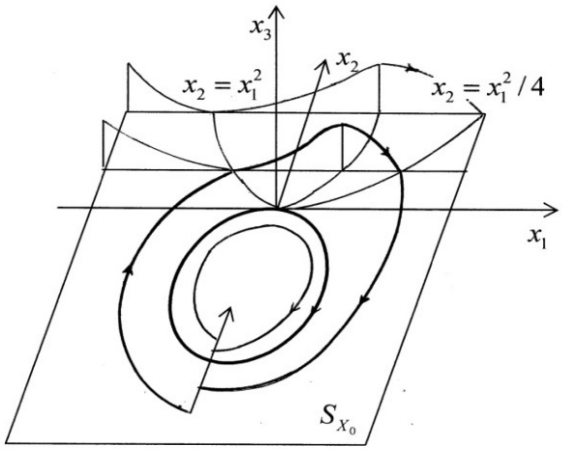

Рис. 2. Траектории поля X_0

При достаточно малом v в некоторой окрестности точки z^0 на M_0 для любого $\varepsilon \in (-v, v)$ существует единственная точка $z(\varepsilon) \in \partial S_{X_\varepsilon}$, в которой векторное поле X_ε^S касается $\partial S_{X_\varepsilon}$. При этом $z(\cdot) \in C^\infty$, $z(0) = z^0$, положительная (отрицательная) полутраектория поля X_ε^S, начинающаяся в точке $z(\varepsilon)$, первый раз пересекает трансверсаль $\eta[-2,2]$ в точке $\eta(u_+(\varepsilon))$ $(\eta(u_-(\varepsilon)))$, где $u_\pm(\cdot) \in C^\infty$, $u_\pm(0) = 0$. Обозначим $\hat{u}(\varepsilon) := u_+(\varepsilon)) - u_-(\varepsilon))$. Потребуем, чтобы $\hat{u}'(0) \neq 0$. Для определенности пусть в дальнейшем $\hat{u}'(0) < 0$.

Нам понадобится следующее понятие. *Топологическим пределом* при $\varepsilon \to 0$ семейства множеств $F(\varepsilon) \subset M$, зависящих от параметра $\varepsilon \in (-v, v)\backslash\{0\}$, называется множество A точек $m \in M$, таких, что для любой ее окрестности $U(m)$ существует такое число $\bar{\delta} > 0$, что $F(\varepsilon) \cap U(m) \neq \emptyset$ для всех $\varepsilon \in (-\bar{\delta}, \bar{\delta})\backslash\{0\}$. Обозначение: $\lim_{\varepsilon \to 0} F(\varepsilon) = A$.

Теорема. При сделанных выше предположениях существует такое число $\delta > 0$, что для всех $\varepsilon \in (-\delta, \delta)\backslash\{0\}$ векторное поле X_ε имеет единственную замкнутую траекторию $L(\varepsilon)$, для которой: $\lim_{\varepsilon \to 0} L(\varepsilon) = L_0$. При этом $L(\varepsilon)$ является устойчивой гиперболиче-

ской замкнутой траекторией. Если $\varepsilon \in (-\delta, 0)$, то $L(\varepsilon) \subset intS_{X_\varepsilon}$, если $\varepsilon \in (0, \delta)$, то $L(\varepsilon)$ состоит из двух дуг, одна из которых принадлежит S_{X_ε}, а другая – нет.

6. Доказательство теоремы. Так как точка $z^0 \in \partial S_{X_n}$, то в некоторой ее окрестности U в M мы можем выбрать координаты (z_1, z_2, z_3) так, чтобы z^0 имела нулевые координаты, $M_{i_+} \cap U$ задавалась неравенством $z_3 \geq 0$, $S_{X_0} \cap U$ задавалась условиями $z_3 = 0, z_2 \leq 0$,

$$X_0^{(i_+)} = P_1(z_1, z_2, z_3)\frac{\partial}{\partial z_1} + P_2(z_1, z_2, z_3)\frac{\partial}{\partial z_2} + P_3(z_1, z_2, z_3)\frac{\partial}{\partial z_3},$$

где $P_3(z_1, 0, 0) = 0$, $\frac{\partial P_3(z_1, 0, 0)}{\partial z_2} > 0$. Так как $z^0 \in \partial S_{X_n}$, то $X_0^S(z^0) = X_0^{(i_+)}(z^0)$. Поэтому из того, что L_0 имеет в z^0 простое касание с ∂S_{X_0}, вытекает, что $P_1(0,0,0) \neq 0$, $P_2(0,0,0) = 0$, $\partial P_2(0,0,0)/\partial z_1 \neq 0$. Отсюда, согласно [6] и [1, с. 206], следует, что в окрестности точки $z(\varepsilon)$ можно выбрать координаты (x_1, x_2, x_3), гладко зависящие от $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, так, что $z(\varepsilon)$ имеет нулевые координаты, а

$$X_\varepsilon^{(i_+)}(x) = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_2 - x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Пусть

$$X_\varepsilon^{(i_-)}(x) = \alpha(x, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_1} + \beta(x, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma(x, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Так как вектор $X_0^{(i_-)}(z^0)$ направлен внутрь M_{i_+}, то мы можем считать, что в выбранной окрестности $\gamma(x, \varepsilon) > 0$.

Поверхность S_{X_ε} в рассматриваемой окрестности задается условиями $x_2 \leq x_1^2$, $x_3 = 0$.

Возьмем числа $\sigma_- < 0 < \sigma_+$, достаточно близкие к нулю. Обозначим $\xi_\varepsilon : (\sigma_-, \sigma_+) \to \partial S_{X_\varepsilon}$ (соответственно $\tilde{\xi}_\varepsilon : [0, 2\sigma_+) \to S_{X_\varepsilon}$) – отображение, ставящее в соответствие числу u точку с координатами $x_1 = u, x_2 = u^2$ (соответственно, с координатами $x_1 = u, x_2 = u^2/4$). Пусть

$$l_\varepsilon^- := \xi_\varepsilon(\sigma_-, 0], \quad l_\varepsilon^+ := \xi_\varepsilon[0, \sigma_+), \quad \tilde{l}_\varepsilon^+ := \tilde{\xi}_\varepsilon[0, 2\sigma_+).$$

Векторное поле X_ε^S в координатах x_1, x_2 имеет вид

$$X_\varepsilon^S(x_1, x_2) = Q_1(x_1, x_2, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_1} + Q_2(x_1, x_2, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_2},$$

где

$$Q_1(x_1, x_2, \varepsilon) = 1 + \frac{1 - \alpha(x_1, x_2, 0, \varepsilon)}{\gamma(x_1, x_2, 0, \varepsilon)}(x_2 - x_1^2) + r_1(x_1, x_2, \varepsilon),$$

$$Q_2(x_1, x_2, \varepsilon) = \frac{1 - \beta(x_1, x_2, 0, \varepsilon)}{\gamma(x_1, x_2, 0, \varepsilon)}(x_2 - x_1^2) + r_2(x_1, x_2, \varepsilon), \tag{1}$$

а $|r_i(x_1, x_2, \varepsilon)| \leq N(x_2 - x_1^2)^2$ с некоторой постоянной $N > 0$. Мы можем считать, что векторные поля X_ε^S доопределены по формулам (1) и на некоторую окрестность точки z^0 в M_0. Обозначим $R := Q_2/Q_1$. Из (1) следует, что найдется такое число $K > 0$, что

$$|R(x_1, x_2, \varepsilon)| \leq Kx_1^2 \quad \text{при} \quad x_1^2/4 \leq x_2 \leq x_1^2, \tag{2}$$

Но тогда можно считать σ_-, σ_+ и δ выбранными столь малыми, что векторное поле X_ε^S, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, трансверсально дугам l_ε^-, l_ε^+ и $\tilde{l}_\varepsilon^+$ в точках, отличных от $z(\varepsilon)$. При достаточно малом $\bar{\sigma}_+ \in (0, \sigma_+]$ определено отображение по траекториям поля X_0^S: $\xi_0(u) \to \tilde{\xi}_0(\theta(u))$, где $\theta : [0, \bar{\sigma}_+] \to [0, 2\sigma_+)$ – непрерывная функция, непрерывно дифференцируемая на промежутке $(0, \bar{\sigma}_+]$, $\theta'(u) > 0$, $\theta(0) = 0$.

Лемма 1. Функция $\theta(u)$ непрерывно дифференцируема при всех $u \in [0, \bar{\sigma}_+]$; $\theta'(0) = 2$.

Доказательство. Уравнение дуги траектории поля X_0^S между точками (u, u^2) и $(\theta(u), \theta^2(u)/4)$ имеет вид $x_2 = \chi(x_1)$. Так как $\chi'(x_1) = R(x_1, \chi(x_1), 0)$, то

$$\frac{\theta^2(u)}{4} - u^2 = \int_0^{\theta(u)} R(x_1, \chi(x_1), 0)\, dx_1. \tag{3}$$

В силу оценки (2)

$$|\theta^2(u) - 4u^2| \le 4K \int_0^{\theta(u)} x_1^2 dx_1 < \frac{4K}{3}\theta^3(u).$$

Отсюда последовательно получаем

$$\frac{4u^2}{1+(4/3)\theta(u)} < \theta^2(u) < \frac{4u^2}{1-(4/3)\theta(u)}$$

и

$$\frac{2u}{\sqrt{1+(4/3)\theta(u)}} < \theta(u) < \frac{2u}{\sqrt{1-(4/3)\theta(u)}}. \tag{4}$$

Мы можем считать σ_+ столь малым, что $\frac{2}{\sqrt{1-(4/3)\theta(u)}} < 3$. Тогда

$$0 < \theta(u) < 3u. \tag{5}$$

Из (4) следует, что

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{1+(4/3)\theta(u)}} - 1\right)u < \theta(u) - 2u < 2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(4/3)\theta(u)}} - 1\right)u.$$

Отсюда и из (5) при достаточно малом σ_+ получаем оценку

$$|\theta(u) - 2u| \le a_1(u)u \tag{6}$$

с $a_1(u) = max\left(1/\sqrt{1-4u} - 1; 1 - 1/\sqrt{1+4u}\right)$. Так как $\lim_{u\to 0} a_1(u) = 0$, то $\theta'(0) = 2$.

Дифференцируя равенство (3), имеем

$$\theta(u)\theta'(u)/2 - 2u = R(\theta(u), \theta^2(u)/4, 0)\theta'(u) - R(u, u^2, 0),$$

и потому при $u \neq 0$

$$\theta'(u) - 2 = \frac{4u - 2\theta(u) + 4R(\theta(u), \theta^2(u)/4, 0) - 2R(u, u^2, 0)}{\theta(u) - 2R(\theta(u), \theta^2(u)/4, 0)}.$$

Используя (2), (5) и (6), отсюда получаем

$$|\theta'(u) - 2| \le \frac{2|\theta(u) - 2u| + 4K\theta^2(u) + 2Ku^2}{\theta(u) - 2K\theta^2(u)}, |\theta'(u) - 2| \le \frac{2a_1(u)u + 38Ku^2}{u - 18Ku^2} = \frac{2a_1(u) + 38Ku}{1 - 18Ku}.$$

Поэтому $\lim_{u\to+0} \theta'(u) = 2$ и θ' непрерывна в нуле. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. При фиксированном σ_+ число σ_- можно выбрать так, что траектория векторного поля X_0^S, доопределенного в окрестности точки z^0, начинающаяся в точке $\xi_0(u)$, $u \in (\sigma_-, 0]$, первый раз пересекают дугу l_0^+ в точке $\xi_0(\varsigma(u))$, где $\varsigma(\cdot)$ – C^∞-функция, $\varsigma(0) = 0$, $\varsigma'(0) = -1$.

Доказательство. От координат x_1, x_2 в окрестности точки z^0 на M_0 перейдем к координатам $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2 - x_1^2$. Тогда

$$X_0^S(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{Q}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} + \tilde{Q}_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2},$$

где $\tilde{Q}_1(0,0) = 1$, $\tilde{Q}_2(0,0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\tilde{Q}_2(0,0) = -2 < 0$. Согласно [1, с. 175] в этом случае траектория векторного поля X_0^S, начинающаяся в точке дуги l_0^- с координатами $\tilde{x}_1 = u \in (\sigma_-, 0]$, $\tilde{x}_2 = 0$, первый раз пересекает дугу l_0^+ в точке с координатами $\tilde{x}_1 = \varsigma(u)$, $\tilde{x}_2 = 0$, где $\varsigma(\cdot)$ – C^∞-функция, $\varsigma(0) = 0$, $\varsigma'(0) = -1$, что нам и требовалось установить.

Обозначим $\eta_\varepsilon(u) := \eta(u + u_-(\varepsilon))$. При достаточно малом δ для $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$ отображение $\eta_\varepsilon(\cdot)$ определено на отрезке $[-1,1]$. При достаточно малых σ_-, σ_+ и δ для $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$ определены отображения

$$l_\varepsilon^- \ni \xi_\varepsilon(u) \to \eta_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(u)) \in \eta_\varepsilon[-1,0] \quad \text{и} \quad l_\varepsilon^+ \ni \xi_\varepsilon(u) \to \eta_\varepsilon(\psi_\varepsilon(u)) \in \eta_\varepsilon[-1,0],$$

соответственно, по траекториям векторных полей $-X_\varepsilon^S$ и X_ε^S, где $\varphi_\varepsilon(u)$ и $\psi_\varepsilon(u)$ – C^∞-функции от u и ε, $\varphi_\varepsilon(0) = \psi_\varepsilon(0) = 0$, $(\varphi_\varepsilon)'(0) > 0$ $(\psi_\varepsilon)'(0) < 0$ при $u \neq 0$.

Лемма 3. $(\varphi_\varepsilon)'(0) = (\psi_\varepsilon)'(0) = 0$, $(\varphi_\varepsilon)''(0) < 0$, $(\psi_\varepsilon)''(0) < 0$.

Доказательство. Обозначим $\chi(x_1, u, v, \varepsilon)$ – решение уравнения $\frac{d\chi}{dx_1} = R(x_1, \chi, \varepsilon)$, удовлетворяющее начальному условию $\chi(u, u, v, \varepsilon) = v$. Из (1) следует, что

$$R(0,0,\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_1} R(0,0,\varepsilon) = 0. \tag{7}$$

Ясно, что $\chi \in C^\infty$. Утверждение леммы 3 не зависит от произвола в выборе трансверсали η, поэтому при доказательстве свойств $\psi_\varepsilon(u)$ можно считать, что $\eta_\varepsilon(u)$ – точка с координатами $x_1 = d$, $x_2 = \chi(d, 0, 0, \varepsilon) - u$ при достаточно малом $d > 0$. Тогда

$$\psi_\varepsilon(u) = \chi(d, 0, 0, \varepsilon) - \chi(d, u, u^2/4, \varepsilon). \tag{8}$$

Из уравнений в вариациях следует, что

$$\chi_v'(x_1, u, v, \varepsilon) > 0. \tag{9}$$

Из (8) получаем

$$(\psi_\varepsilon)'(u) = -\left[\chi_u'(d, u, v, \varepsilon) + \frac{\chi_v'(x_2, u, v, \varepsilon)u}{2}\right]_{v=\frac{u^2}{4}} = \chi_v'(d, u, v, \varepsilon)\left[R(u, v, \varepsilon) - \frac{u}{2}\right]_{v=\frac{u^2}{4}}, \tag{10}$$

$$(\psi_\varepsilon)''(u) = \frac{\partial}{\partial u}\chi_v'\left(d, u, \frac{u^2}{4}, \varepsilon\right)\left[R(u, v, \varepsilon) - \frac{u}{2}\right]_{v=\frac{u^2}{4}} +$$

$$\chi_v'\left(d, u, \frac{u^2}{4}, \varepsilon\right)\left[R_u'(u, v, \varepsilon) + \frac{1}{2}uR_v'(u, v, \varepsilon) - \frac{1}{2}\right]_{v=\frac{u^2}{4}}. \tag{11}$$

Из (7)-(11) вытекает, что $(\psi_\varepsilon)'(0) = 0$, $(\psi_\varepsilon)''(0) < 0$.

Аналогично доказывается, что $(\varphi_\varepsilon)'(0) = 0$, $(\varphi_\varepsilon)''(0) < 0$.

При достаточно малом $\rho > 0$ отображение $f = \psi_0 \circ \theta \circ \varsigma \circ \varphi_0^{-1}$ определено на отрезке $[-\rho, 0]$ и является функцией последования по траекториям векторного поля X_0^S (рис. 1). При $u \in [-\rho, 0)$ $f'(u) = (\psi_0)'(\theta(\varsigma(u))\theta'(\varsigma(u))\varsigma'(v)/(\varphi_0)'(v)$, где $v = \varphi_0^{-1}(u)$.

Используя свойства ψ_0, φ_0, θ и ς, сформулированные в леммах 1-3, и правило Лопиталя, получаем

$$f'(0) = -2\lim_{v\to-0}\frac{(\psi_0)'(\theta(\varsigma(v))}{(\varphi_0)'(v)} = -2\lim_{v\to-0}\frac{(\psi_0)''(\theta(\varsigma(v))\theta'(\varsigma(v)\varsigma'(v)}{(\varphi_0)'(v)} = \frac{4(\psi_0)''(0)}{(\varphi_0)''(0)}$$

Так как $\eta(u) \to \eta(f_0^+(u))$ – отображение последования по траекториям векторного поля X_0^S на трансверсали $\eta[0, \tau)$, то $f'(0) = (f_0^+)'(0)$. По условиям теоремы $0 < (f_0^+)'(0) < 1$, следовательно,

$$0 < \frac{4(\psi_0)''(0)}{(\varphi_0)''(0)} < 1. \tag{12}$$

Непосредственным вычислением проверяется, что траектория векторного поля $X_\varepsilon^{(i+)}$, начинающаяся в точке $\xi_\varepsilon(u)$, $u \in (\sigma_-, 0)$, следующий раз попадает на S_{X_ε} в точке $\xi_\varepsilon(-2u)$. Поэтому при достаточно малых $\rho > 0$ и δ для любого $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$ функция $f_\varepsilon^-(\cdot) := \psi_\varepsilon(-2 \circ \varphi_\varepsilon^{-1}(\cdot))$ определена на отрезке $[-\rho, 0]$ и является функцией последования по траекториям векторного поля X_ε. При $u \in [-\rho, 0)$

$$(f_\varepsilon^-)'(u) = -\frac{2(\psi_\varepsilon)'(-2v)}{(\varphi_\varepsilon)'(v)},$$

где $v = \varphi_\varepsilon^{-1}(u)$.

Так как $(\varphi_\varepsilon)'(v)$ и $(\psi_\varepsilon)'(v)$ непрерывно дифференцируемые функции от (v, ε) и $(\varphi_\varepsilon)'(0) = (\psi_\varepsilon)'(0) = 0$, то при $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, $v \in [\sigma_-, 0]$

$$(\varphi_\varepsilon)'(v) = ((\varphi_\varepsilon)''(0) + r_1(v,\varepsilon))v,\ (\psi_\varepsilon)'(-2v) = \big((\psi_\varepsilon)''(0) + r_2(v,\varepsilon)\big)(-2v),$$

где r_1 и r_2 – непрерывные функции, $r_1(0,0) = r_2(0,0) = 0$. Поэтому

$$\lim_{\substack{v\to-0\\ \varepsilon\to 0}} (f_\varepsilon^-)'(u) = -\lim_{\substack{v\to-0\\ \varepsilon\to 0}} \frac{2(\psi_\varepsilon)'(-2v)}{(\varphi_\varepsilon)'(v)} = \frac{4(\psi_0)''(0)}{(\varphi_0)''(0)}.$$

Вследствие (12) можно считать ρ и δ выбранными столь малыми, что

$$0 < (f_\varepsilon^-)'(u) < 1 \quad \text{при} \quad u \in [-\rho, 0),\ \varepsilon \in (-\delta, \delta). \tag{13}$$

При достаточно малых ρ и δ для $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$ определены отображения по траекториям векторного поля X_ε^S: $\eta_\varepsilon(u) \to \eta_\varepsilon(f_\varepsilon^+(u))$, где $f_\varepsilon^+ : [0, \rho] \to [0, 1]$, $(u, \varepsilon) \to f_\varepsilon^+(u)$ – C^∞-функция, $f_\varepsilon^+(0) = 0$, $(f_\varepsilon^+)'(0) = f'(0)$,

$$0 < (f_\varepsilon^+)'(u) < 1 \quad \text{при} \quad u \in (0,\ \rho],\ \varepsilon \in (-\delta, \delta). \tag{14}$$

При $\varepsilon = 0$ получаем, что для некоторого числа $u_0 \in (0, \rho)$ $f_0^-(-u_0) > -u_0$, $f_0^+(u_0) < u_0$. Выбрав δ достаточно малым, будем иметь $f_\varepsilon^-(-u_0) > -u_0$, $f_\varepsilon^+(u_0) < u_0$ для всех $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$. Так как по предположению $\hat{u}'(0) < 0$, то можно считать, что $\operatorname{sgn} \hat{u}(\varepsilon) = -\operatorname{sgn} \varepsilon$. Учитывая, что $f_0^-(0) = f_\varepsilon^+(0) = \hat{u}(\varepsilon)$, получаем, что f_ε^+ при $\varepsilon \in (-\delta, 0)$ и f_ε^- при $\varepsilon \in (0, \delta)$ имеет неподвижную точку $u_*(\varepsilon)$. Вследствие (13) и (14) $u_*(\varepsilon)$ – единственная неподвижная точка f_ε^+ (f_ε^-), она является устойчивой гиперболической. Нетрудно убедиться, что $\lim_{\varepsilon\to 0} u_*(\varepsilon) = 0$. Траектория $L(\varepsilon)$, проходящая через точку $\eta_\varepsilon(u_*(\varepsilon))$, является устойчивой гиперболической замкнутой траекторией, $L(0) = L_0$, топологический предел $\lim_{\varepsilon\to 0} L(\varepsilon) = L_0$.

Докажем единственность $L(\varepsilon)$. Пусть $\chi_\varepsilon^0(z,t)$, $\chi_\varepsilon^+(z,t)$ и $\chi_\varepsilon^-(z,t)$ – траектория, соответственно, векторного поля X_ε^S, $X_\varepsilon^{(i_+)}$ и $X_\varepsilon^{(i_-)}$, начинающаяся в точке z. Обозначим U_ε^τ – множество, состоящее из точек $\chi_\varepsilon^+(\chi_\varepsilon^0(\eta_\varepsilon(u), t_0), t_+)$ и $\chi_\varepsilon^-(\chi_\varepsilon^0(\eta_\varepsilon(u), t_0), t_-)$ при $|u| < u_0$, $|t_0| < \tau$, $-\tau < t_\pm \le 0$. При достаточно малом τ $U_0^{\tau/2}$ является окрестностью точки $\eta_0(0) = \eta(0)$. Если $\delta' \in (0, \delta)$ достаточно мало, то $U_0^{\tau/2} \subset U_\varepsilon^\tau$ при всех $\varepsilon \in (-\delta', \delta')$. Пусть $\tilde{L}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, – замкнутые траектории X_ε и $\lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{L}(\varepsilon) = L_0$. Тогда при некотором $\delta'' \in (0, \delta')$ для всех $\varepsilon \in (-\delta'', \delta'')$ в $U_0^{\tau/2}$ и тем более в U_ε^τ есть точки, принадлежащие $\tilde{L}(\varepsilon)$. Но тогда $\tilde{L}(\varepsilon)$ пересекается с дугой $\eta_\varepsilon(-u_0, u_0)$ и потому совпадает с $L(\varepsilon)$.

Примечания:

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. Ройтенберг В.Ш. О рождении устойчивых замкнутых траекторий разрывных векторных полей // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 3. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2002. С. 19-22.
3. Ройтенберг В.Ш. О рождении устойчивых замкнутых траекторий динамических систем, задаваемых кусочно-гладкими векторными по-

References:

1. Filippov A.F. Differential equations with a discontinuous right-hand side. M.: Nauka, 1985. 224 pp.
2. Roytenberg V.Sh. On the generation of stable closed orbits of discontinuous vector fields // Mathematics and mathematical education. Theory and practice: inter-higher school coll. of scient. works. Iss. 3. Yaroslavl: YaSTU Publishing House, 2002. P. 19-22.
3. Roytenberg V.Sh. On the generation of stable closed orbits of dynamical systems defined by piecewise smooth vector fields // Bulletin of Yaro-

лями // Вестник ЯГТУ. 2004. Вып. 4. С. 206-208.

4. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях перерождения замкнутых траекторий кусочно-гладких векторных полей // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 5. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2004. С. 75-81.
5. Ройтенберг В.Ш. О рождении устойчивых замкнутых траекторий кусочно-гладких векторных полей // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 5. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2006. С. 37-49.
6. Вишик С.М. Векторные поля в окрестности края многообразия // Вестник Московского государственного университета. Сер. Математика и механика. 1972. № 1. С. 21-28.
7. Шумафов М.М. Топологическая классификация особенностей на поверхности разрыва правых частей системы трех дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения и их приложения. Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 123-130.

slavl State Technical University. 2004. Iss. 4. P. 206-208.

4. Roytenberg V.Sh. On bifurcations of regeneration of closed orbits of piecewise smooth vector fields // Mathematics and mathematical education. Theory and practice: inter-higher school coll. of scient. works. Iss. 4. Yaroslavl: YaSTU Publishing House, 2004. P. 75-81.
5. Roytenberg V.Sh. On the generation of stable closed orbits of piecewise smooth vector fields // Mathematics and mathematical education. Theory and practice: inter-highter shool coll. of scient. works. Iss. 5. Yaroslavl: YaSTU Publishing House, 2006. P. 37-49.
6. Vishik S.M. Vector fields in the neighborhood of the border of manifold // Bulletin of Moscow State University. Ser. Mathematics and Mechanics. 1972. No. 1. P. 21-28.
7. Shumafov M.M. Topological classification of singularities on the surface of discontinuity of right-hand sides of a system of three differential equations // Differential equations and its applications. Coll. of papers. M.: MGU Publishing House, 1984. P. 123-130.