УДК 517.2/.3
ББК 22.161.1
С 78

Сташ А.Х.
Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-05, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

О конечных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной периодической системы

(Рецензирована)

Аннотация
Установлено, что не существует числа, ограничивающего сверху мощность множества существенных (и метрически, и топологически) значений полной и векторной частот любой линейной двумерной дифференциальной системы с периодическими коэффициентами.

Ключевые слова: *линейная дифференциальная система, колеблемость решений, число нулей функции, полная (векторная) частота решения.*

Stash A.Kh.
Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics, Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-05, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

On finite spectra of full and vector frequencies of linear two-dimensional differential periodic system

Abstract
The paper shows that there is no number limiting from above a cardinal number of essential (both metrically and topologically) values of full and vector frequencies of any linear two-dimensional differential system with periodic coefficients.

Keywords: *linear differential system, variability of solutions, number of zero function, full (vector) frequency of solution.*

Введение

Рассмотрим множество M^n линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in R^n,\ t \in [0,+\infty),$$

каждая из которых отождествляется со своей ограниченной непрерывной оператор-функцией $A:[0,+\infty) \to End\ R^n$. Множество всех ненулевых решений системы $A \in M^n$ обозначим через $S_*(A)$.

Определение 1 [1]. Для каждой системы $A \in M^n$ произвольного решения $x \in S_*(A)$ вектора $m \in R^n$ и момента $t > 0$ обозначим через $\nu(x,m,t)$ число нулей (возможно, бесконечное) скалярного произведения $(x(\tau),m)$ на промежутке $\tau \in (0,t]$, а полной и векторной частотами решения x назовем величины

$$\sigma(x) \equiv \inf_{m \in R^n} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t), \quad \zeta(x) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m \in R^n} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t).$$

К определению 1 добавим обозначение $\nu(x,m,t_2,t_1) \equiv \nu(x,m,t_2) - \nu(x,m,t_1)$ числа нулей скалярного произведения $(x(\tau),m)$ на промежутке $\tau \in (t_1,t_2]$.

С каждой из частот ω, описанных в определении 1, и с каждой системой $A \in M^n$ можно связать функционал $\omega_A : S_*(A) \to [0,+\infty)$.

Определение 2. Спектром частоты ω_A системы $A \in M^n$ назовем область ее значений, а значение частоты ω, принадлежащее спектру системы A, назовем:

а) метрически существенным [2], если оно принимается на решениях $x \in S_*(A)$, множество наборов $x(0) \in R^n$ начальных значений которых содержит множество положительной меры Лебега в R^n;

б) метрически существенным [3], если оно принимается на решениях $x \in S_*(A)$, множество наборов $x(0) \in R^n$ начальных значений которых, пресеченное с некоторым открытым подмножеством $U \subset R^n$, служит дополнением в U к множеству первой категории Бэра.

Спектры полной и векторной частот неавтономных дифференциальных систем, в отличие от автономных (см. [4, 5]), не были исследованы. Спектры полной и векторной частот неавтономных однородных дифференциальных уравнений второго порядка состоят из одного числа [6]. В связи с этим возникал вопрос: распространяется ли это свойство на все множество M^2 или указанные спектры двумерных систем будут больше напоминать спектры частот неавтономных дифференциальных уравнений третьего порядка (см. [7, 8]). Этому вопросу посвящена настоящая статья.

Основной результат

Теорема. Для любого наперед заданного натурального N найдется система $A \in M^2$, имеющая такие N решений $x_1, \ldots, x_N \in S_*(A)$, удовлетворяющие условиям

$$\sigma(x_i) = \zeta(x_i) = \frac{i}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

причем все эти значения полных и векторных частот являются метрически и топологически существенными.

Данный результат был доложен на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в МГУ имени М.В. Ломоносова и анонсирован в докладе [9].

При доказательстве этой теоремы нам понадобится следующая

Лемма [10, 11]**.** Пусть последовательность положительных чисел $t_1 < t_2 < \ldots$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{k \to +\infty} t_k = +\infty, \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1.$$

Тогда для любого решения $x \in S_*(A)$ любой системы $A \in M^n$ справедливы равенства:

$$\sigma(x) \equiv \inf_{m \in R^n} \overline{\lim_{k \to +\infty}} \frac{\pi}{t_k} \nu(x, m, t_k), \quad \zeta(x) \equiv \overline{\lim_{k \to +\infty}} \inf_{m \in R^n} \frac{\pi}{t_k} \nu(x, m, t_k).$$

Доказательство теоремы.

1. По заданному натуральному N определим следующие величины:

$$\frac{1}{6} > \varepsilon > \delta_1 > \ldots > \delta_N, \quad 0 \equiv r_0 < s_0 < r_1 < s_1 < \ldots < s_{N-1} < r_N,$$

так что

$$\frac{1}{4} < \varepsilon + \delta_i < \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

$$s_{i-1} - r_{i-1} = \pi, \quad r_i - s_{i-1} = \pi, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2}$$

Зададим 2π периодическую непрерывно-дифференцируемую функцию $\psi(t)$, возрастающую на отрезке $[0,\pi]$, убывающую на участке $[\pi,2\pi]$ и принимающую на концах отрезков значения

$$\psi(0)=\psi(2\pi)=0,\ \ \psi(\pi)=\pi,\ \ \dot\psi(0)=\dot\psi(\pi)=\dot\psi(2\pi)=0.$$

Сначала на промежутке $[0,2\pi N]=[r_0,r_1]\cup[r_1,r_2]\cup\ldots\cup[r_{N-1},r_N]$ построим двумерную систему $\dot x=A^1(t)x$ с непрерывными коэффициентами. Для этого на промежутках

$$[r_{i-1},r_i],\quad i=1,2,\ldots,N\ , \tag{3}$$

определим соответственно фундаментальные системы

$$X(t,\delta_i)=\left(x^1(t),x^2(t,\delta_i)\right),\quad i=1,2,\ldots,N,$$

где

$$x^1(t)=\begin{pmatrix}\cos((1-\varepsilon)\psi(t))\\ \sin((1-\varepsilon)\psi(t))\end{pmatrix},\quad x^2(t,\delta_i)=\begin{pmatrix}-\sin((1+\delta_i)\psi(t))\\ \cos((1+\delta_i)\psi(t))\end{pmatrix}.$$

Так как при любом $i\in\{1,2,\ldots,N\}$

$$\det X(t,\delta_i)=\cos((\varepsilon+\delta_i)\psi(t))\ge 1/2,$$

то матрицы

$$X^{-1}(t,\delta_i)=\frac{1}{\cos((\varepsilon+\delta_i)\psi(t))}\begin{pmatrix}\cos((1+\delta_i)\psi(t)) & \sin((1+\delta_i)\psi(t))\\ -\sin((1-\varepsilon)\psi(t)) & \cos((1-\varepsilon)\psi(t))\end{pmatrix}$$

ограничены.

Известно, что фундаментальная матрица удовлетворяет исходному матричному уравнению

$$\dot X(t,\delta_i)=A_i(t)X(t,\delta_i),\quad t\in[r_{i-1},r_i],\quad i=1,2,\ldots,N,$$

а значит, на участках (3) без труда восстанавливаются системы

$$A_i(t)=\dot X(t,\delta_i)X^{-1}(t,\delta_i),\ \ i=1,2,\ldots,N.$$

Построенные фундаментальные матрицы в точках стыка удовлетворяют равенствам

$$X(r_i,\delta_i)=X(r_i,\delta_{i+1})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \dot X(r_i,\delta_i)=\dot X(r_i,\delta_{i+1})=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad i=1,2,\ldots,N-1,$$

благодаря которым фундаментальная матрица

$$X^1(t)=\begin{cases}X(t,\delta_1), & t\in[r_0,r_1],\\ X(t,\delta_2), & t\in[r_1,r_2],\\ \ldots,\\ X(t,\delta_N), & t\in[r_{N-1},r_N]\end{cases}$$

является непрерывно-дифференцируемой на $[0,2\pi N]$, а значит, коэффициенты системы

$$A^1(t)=\begin{cases}A_1(t), & t\in[r_0,r_1],\\ A_2(t), & t\in[r_1,r_2],\\ \ldots,\\ A_N(t), & t\in[r_{N-1},r_N]\end{cases}$$

являются непрерывными на указанном отрезке.

2. Теперь построим систему $A\in M^2$ с периодическими коэффициентами. В силу равенств

$$X^1(0) = X^1(2\pi N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{X}^1(0) = \dot{X}^1(2\pi N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

фундаментальная матрица

$$X(t) = \begin{cases} X^1(t), \quad t \in [0, 2\pi N], \\ X^1(t - 2\pi N), \quad t \in [2\pi N, 4\pi N], \\ X^1(t - 4\pi N), \quad t \in [4\pi N, 6\pi N], \\ \dots \end{cases}$$

на полуоси $[0, +\infty)$ является непрерывно-дифференцируемой, следовательно, система

$$A(t) = \begin{cases} A^1(t), \quad t \in [0, 2\pi N], \\ A^1(t - 2\pi N), \quad t \in [2\pi N, 4\pi N], \\ A^1(t - 4\pi N), \quad t \in [4\pi N, 6\pi N], \\ \dots \end{cases}$$

на $[0, +\infty)$ является непрерывной и $2\pi N$ -периодической.

3. Нетрудно убедиться в том, что из множества $S_*(A)$ можно выделить решения

$$y^i = c_1^i x^1 + c_2^i x^2, \ c_1^i, c_2^i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

удовлетворяющие условиям

$$-ky^i(r_{i-1}) = y^i(s_{i-1}), \ k > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{4}$$

Последнее означает, что угол между векторами $y^i(r_{i-1}), y^i(s_{i-1})$ равен 180^0.

Введем в рассмотрение функцию φ, которая каждому ненулевому двумерному вектору ставит в соответствие угол между этим вектором и положительным направлением оси ox_1, отсчитываемым против часовой стрелки.

Заметим, что решения x^1 и x^2 удовлетворяют следующим равенствам:

$$\varphi(x^1(s_{i-1})) - \varphi(x^1(r_{i-1})) = (1 - \varepsilon)\pi, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\varphi(x^2(s_{i-1})) - \varphi(x^2(r_{i-1})) = (1 + \delta_i)\pi, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

из которых (с учетом $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_N$) следует, что

$$\varphi_0(y^j) > \varphi_1(y^j) > \dots > \varphi_{N-1}(y^j), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$\varphi_{i-1}(y^j) = \varphi(y^j(s_{i-1})) - \varphi(y^j(r_{i-1})), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Следовательно, будут справедливы неравенства

$$\varphi(y^1(0)) < \varphi(y^2(0)) < \dots < \varphi(y^N(0)) < \varphi(x^2(0)), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Проследим за поведением любого фиксированного решения $y^i \in S_*(A)$ на промежутке

$$(0, 2\pi N] = (r_0, s_0] \cup (s_0, r_1] \cup \dots \cup (s_{N-1}, r_N].$$

На участке

$$(r_{i-1}, s_{i-1}] \tag{5}$$

решение y^i, в силу (4), поворачивается против часовой стрелки ровно на $\varphi(y^i(s_{i-1})) - \varphi(y^i(r_{i-1})) = 180^0$, а на участке

$$(s_{i-1}, r_i] \tag{6}$$

решение y^i, поворачиваясь по часовой стрелке, занимает исходное направление

$$y^i(r_{i-1}) = (c_1^i, c_2^i). \tag{7}$$

На каждом из промежутков

$$(r_j, s_j], \quad j = 0, \ldots, i-2, \tag{8}$$

решение y^i поворачивается против часовой стрелки более чем на 180^0 (но менее чем на 270^0), а на каждом из промежутков

$$(s_{j-1}, r_j], \quad j = 1, 2, \ldots, i-1, \tag{9}$$

решение y^i совершает такие же, что и в предыдущих промежутках, повороты по часовой стрелке и занимает каждый раз исходное место (7).

На каждом из промежутков

$$(r_j, s_j], \quad j = i, i+1, \ldots, N-1, \tag{10}$$

решение y^i поворачивается против часовой стрелки менее чем на 180^0, а на каждом из промежутков

$$(s_j, r_{j+1}], \quad j = i, i+1, \ldots, N-1, \tag{11}$$

совершает такие же, что и в предыдущих промежутках, повороты по часовой стрелке и занимает каждый раз исходное направление (7).

Любой вектор, совершающий поворот не менее чем на 180^0 (но менее чем на 270^0), бывает ортогональным либо один раз, либо два раза любому другому наперед заданному ненулевому вектору. Поэтому можно указать такой вектор m_i, что на каждом из промежутков (5), (6) , (8), (9) решение y^i бывает только раз ортогонально этому вектору.

Вектор, совершающий поворот менее чем на 180^0, бывает ортогональным либо один раз, либо ни разу любому другому ненулевому вектору. Поэтому можно указать такой вектор m^i, что решение y^i на каждом из промежутков (10), (11) не будет ни разу ортогонально этому вектору. Нетрудно заметить, что вектор m^i обслуживает и вектор m_i в том смысле, что вектору m^i решение y^i бывает только раз ортогонально этому вектору на каждом из промежутков (5), (6) ,(8), (9). Таким образом, справедливы равенства

$$\inf_{m \in R^2} \nu(y^i, m, r_N) = \nu(y^i, m^i, r_N) = 2i, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{12}$$

5. Для вычисления частот произвольного периодического решения $y^i \in S_*(A)$ зададим последовательность

$$t_k = t_{k-1} + 2\pi N, \quad t_0 \equiv 0,$$

обладающую свойствами

$$\lim_{k \to +\infty} t_k = +\infty, \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{t_k}{t_{k-1}} = \lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{2\pi N}{t_{k-1}}\right) = 1.$$

Тогда по лемме, при любом $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, имеем

$$\sigma(y^i) \equiv \inf_{m \in R^2} \overline{\lim_{k \to +\infty}} \frac{\pi \sum_{j=1}^{k} \nu(y^i, m, t_j, t_{j-1})}{t_k} = \inf_{m \in R^2} \overline{\lim_{k \to +\infty}} \frac{\pi k \nu(y^i, m, t_1)}{2\pi k N} = \inf_{m \in R^2} \frac{\nu(y^i, m, t_1)}{2N} = \frac{i}{N},$$

$$\zeta(y^i) \equiv \overline{\lim_{k\to+\infty}} \inf_{m\in R^2} \frac{\pi\sum_{j=1}^{k}\nu(y^i,m,t_j,t_{j-1})}{t_k} = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \inf_{m\in R^2} \frac{\pi k\nu(y^i,m,t_1)}{2\pi kN} = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{2i}{2N} = \frac{i}{N}.$$

Таким образом, установили

$$\sigma(y^i) = \zeta(y^i) = \frac{i}{N}, \quad i = 1,2,\ldots,N. \tag{13}$$

6. Обозначим через $y^{N+1}(0) \equiv x^2(0)$. Для фиксированного $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ произвольное решение $z \in S_*(A)$ с начальными условиями

$$\varphi(z(0)) \in \left[\varphi(y^i(0)), \varphi(y^{i+1}(0))\right)$$

обладает свойствами:

– на каждом из промежутков $(r_j, s_j]$, $j = 0,1,\ldots,i-1$, поворачивается против часовой стрелки более чем на 180^0 (но менее чем на 270^0);

– на каждом из промежутков $(s_{j-1}, r_j]$, $j = 1,2,\ldots,i$, совершает такие же, что и в предыдущих промежутках, повороты по часовой стрелке и занимает каждый раз исходное направление;

– на каждом из промежутков (10) поворачивается против часовой стрелки менее чем на 180^0;

– на каждом из промежутков (11) совершает такие же, что и в предыдущих промежутках, повороты по часовой стрелке и занимает каждый раз исходное направление.

Поэтому на основании п. 5 настоящего доказательства для решения $z \in S_*(A)$ выполняются равенства

$$\sigma(z) = \zeta(z) = \frac{i}{N}.$$

Следовательно, значения, задаваемые равенствами (13), являются существенными и метрически, и топологически.

Теорема доказана полностью.

Замечание. Доказанная теорема остается в силе и после замены верхнего предела в определениях полной и векторной частот на нижний предел.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

Примечания:

1. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 6. С. 908.
2. Сергеев И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1661-1662.
3. Сергеев И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1567-1568.
4. Сергеев И.Н. Сравнение полных частот и показателей блуждаемости решений линейной системы // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 11. С. 1667-1668.

References:

1. Sergeev I.N. Determination of full frequencies of solutions of a linear system // Differential equations. 2009. Vol. 45, No. 6. P. 908.
2. Sergeev I.N. Metricaally typical and essential values of indices of linear systems // Differential equations. 2011. Vol. 47, No. 11. P. 1661-1662.
3. Sergeev I.N. Topologically typical and essential values of indices of linear systems // Differential equations. 2012. Vol. 48, No. 11. P. 1567-1568.
4. Sergeev I.N. Comparison of full frequencies and indices of roaming of solutions of a linear system // Differential equations. 2010. Vol. 46, No. 11. P. 1667-1668.

5. Бурлаков Д.С., Цой С.В. Равенство полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1662-1663.
6. Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 21-26.
7. Сташ А.Х. О существенных значениях характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2013. Вып. 2 (119). С. 9-22. URL: http://vestnik.adygnet.ru
8. Сташ А.Х. О существовании линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами полной и векторной частот // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2013. Вып. 3 (122). С. 9-17. URL: http://vestnik.adygnet.ru
9. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот решений двумерных линейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1497-1498.
10. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249-294.
11. Сташ А.Х. О разрывности крайних частот на множестве линейных двумерных дифференциальных систем // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2013. Вып. 4 (125). С. 25-31. URL: http://vestnik.adygnet.ru

5. Burlakov D.S., Tsoy S.V. Equality of full and vector frequencies of solutions of linear autonomous system // Differential equations. 2011. Vol. 47, No. 11. P. 1662-1663.
6. Sergeev I.N. Unsteadiness and roaming of solutions of the second order differential equation // Bulletin of Moscow University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. 2011. No. 6. P. 21-26.
7. Stash A.Kh. On essential values of variability characteristics for the solutions of third order linear differential equations // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 20113. Iss. 2 (119). P. 9-12. URL: http://vestnik.adygnet.ru
8. Stash A.Kh. On existence of third-order linear differential equation with continuous ranges of complete and vector frequencies // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2013. Iss. 3 (122). P. 9-17. URL: http://vestnik.adygnet.ru
9. Stash A.Kh. Properties of full and vector frequencies of solutions of two-dimensional linear differential systems // Differential equations. 2013. Vol. 49, No. 11. P. 1497-1498.
10. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of the linear equation // Works of Seminar of I.G. Petrovsky. 2006. Iss. 25. P. 249-294.
11. Stash A.Kh. On discontinuity of extreme frequencies on a set of the linear two-dimensional differential systems // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2013. Iss. 4 (125). P. 25-31. URL: http://vestnik.adygnet.ru