ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 537
ББК 22.33
Б 72

Бобылев Ю.В.
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, Тула, тел. (4872) 56-20-03, e-mail: bobylev.yu@mail.ru
Панин В.А.
Доктор физико-математических наук, профессор, ректор Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, Тула, тел. (4872) 35-91-62, e-mail: panin@tspu.tula.ru

О влиянии начальной модуляции нерелятивистского электронного пучка на нелинейную динамику трехволновых процессов, развивающихся в режиме коллективного эффекта Черенкова

(Рецензирована)

Аннотация
Аналитическими методами проанализировано влияние первоначальной модуляции электронного пучка на динамику трехволновых процессов, протекающих в режиме коллективного эффекта Черенкова. Установлено, что начальная модуляция пучка на величине амплитуд насыщения волн практически не сказывается; время же стабилизации неустойчивости с увеличением глубины модуляции сильно сокращается.
Ключевые слова*: нелинейное взаимодействие волн, трехволновые неустойчивости, аналитические методы.*

Bobylev Yu.V.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor of General and Theoretical Physics Department, Tula State Pedagogical University named after L.N. Tolstoy, Tula, ph. (4872) 56-20-03, e-mail: bobylev.yu@mail.ru
Panin V.A.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Rector of the Tula State Pedagogical University named after L.N. Tolstoy, Tula, ph. (4872) 35-91-62, e-mail: panin@tspu.tula.ru

On the influence of initial modulation of a nonrelativistic electron beam on nonlinear dynamics of tree-wave processes, developing in the regime of the collective Cherenkov effect

Abstract
The original analytical methods were used to analyze the influence of initial modulation of the electron beam on the dynamics of tree-wave processes in the regime of the collective Cherenkov effect. It is inferred that the initial value of the beam modulation does not affect amplitude of wave saturation, whereas the time of the volatility stabilizing is strongly reduced with increasing depth of modulation.
Keywords*: nonlinear interaction of waves, tree-wave instability, analytical methods.*

Трехволновые неустойчивости в волноводе, пронизываемом электронным пучком, представляют собой процессы, происходящие при взаимодействии двух волноводных мод и одной пучковой волны плотности заряда [1]. Насыщение данных неустойчивостей может быть обусловлено как неоднородностью системы [2], так и нелинейными процессами, происходящими в электронном пучке [3, 4]. А именно, стабилизация трехволновых неустойчивостей определяется, прежде всего, такими сильнонелинейными процессами, как захват электронов пучка комбинационной волной, самозахват электронов полем волны плотности заряда и последующей турбулизацией пучка

[5]. И только в случае пучка большой плотности неустойчивость стабилизируется вследствие эффекта нелинейного сдвига частоты [1, 5], который соответствует учету кубичных нелинейностей при разложении уравнений поля по степеням амплитуд волн. Неустойчивость при этом развивается в режиме коллективного эффекта Черенкова [1, 5], а описывающая ее система нелинейных уравнений, как правило, допускает аналитические решения. Именно этот случай будет рассмотрен нами в настоящей статье.

Среди достаточно большого количества работ, посвященных теории трехволновых неустойчивостей, как правило, рассмотрена ситуация, когда электронный пучок предполагается немодулированным. Однако использование первоначально модулированного пучка, как показано, например, в [6], открывает возможности для управления потоком излучения и подавления нерезонансных мод возбуждаемых колебаний. Поэтому представляет интерес рассмотреть влияние начальной модуляции пучка на динамику трехволновых процессов.

В самой общей постановке задачи о временной эволюции трехволновых неустойчивостей будем рассматривать взаимодействие двух электромагнитных волн с плотным нерелятивистским электронным пучком, распространяющимся в произвольной замедляющей системе. Предполагается наличие сильного магнитного поля, подавляющего поперечное движение электронов пучка. В такой системе может развиваться целый ряд трехволновых процессов, наиболее интересными из которых являются распадная с повышением частоты и взрывная неустойчивости [1]. Отметим, что реализуются эти процессы при резонансном взаимодействии двух собственных электромагнитных мод волновода с медленной волной плотности заряда пучка [1]. Исследование нелинейной динамики трехволновых неустойчивостей проведем исходя из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varepsilon_1}{d\tau}+\frac{i}{8}\left(\left|\varepsilon_1\right|^2-\left|\varepsilon_{10}\right|^2\right)\varepsilon_1=i\nu a\varepsilon_2+i\frac{\nu}{4}\frac{g-1}{g-4}\left|a\right|^2 a\varepsilon_2+i\frac{\nu^2}{4}\frac{1}{g-4}\left|\varepsilon_2\right|^2\left|a\right|^2\varepsilon_1-\frac{i}{8}\nu\left|a\right|^2 a\varepsilon_2,\\
&\frac{d\varepsilon_2}{d\tau}+\frac{i}{8}\beta\left(\left|\varepsilon_2\right|^2-\left|\varepsilon_{20}\right|^2\right)\varepsilon_2=\beta\left(i\nu a^*\varepsilon_1+i\frac{\nu}{4}\frac{g-1}{g-4}\left|a\right|^2 a^*\varepsilon_1+i\frac{\nu^2}{4}\frac{1}{g-4}\left|\varepsilon_1\right|^2\left|a\right|^2\varepsilon_2-\frac{i}{8}\nu\left|a\right|^2 a^*\varepsilon_1\right),\quad(1)\\
&\frac{da}{d\tau}+i\frac{3}{4}\frac{g-1}{g-4}\left|a\right|^2 a=-i\frac{\nu}{8}\frac{g+2}{g-4}\left|a\right|^2\varepsilon_1\varepsilon_2^*-i\frac{\nu}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2^*-i\frac{\nu}{16}\frac{g+2}{g-4}a_1^2\varepsilon_1^*\varepsilon_2-i\frac{\nu^2}{8}\frac{1}{g-4}\left|\varepsilon_1\right|^2\left|\varepsilon_2\right|^2 a,
\end{aligned}$$

подробный вывод которой приведен в [5]. Здесь ε_1 и ε_2 – обезразмереннные амплитуды сигнальной волны и волны накачки, соответственно; a – первая гармоника возмущения плотности заряда пучка, обезразмереннная на невозмущенную плотность; $\tau=\Omega_b t$ – безразмерное время; Ω_b – частота собственных колебаний электронов в системе отсчета пучка с учетом геометрии задачи; g – геометрический фактор, учитывающий неодномерность пучковой волны – генерацию второй гармоники возмущения плотности заряда пучка; ν – безразмерный параметр, зависящий от механизма связи электромагнитных волн и пучка. Параметр β в уравнениях (1) определяет вид трехволнового процесса. В случае резонанса электромагнитных волн с медленной волной пространственного заряда пучка $\beta=+1$ соответствует распадному с повышением частоты процессу, а $\beta=-1$ – взрывному.

Система уравнений (1) дополняется следующими начальными условиями:

$$\varepsilon_1\big|_{\tau=0}=\varepsilon_{10},\ \ \varepsilon_2\big|_{\tau=0}=\varepsilon_{20},\ \ a\big|_{\tau=0}=a_0\,. \qquad (2)$$

Отметим, что уравнения (1) справедливы при условии

$$\nu<<1,\quad a_0<<1, \qquad (3)$$

соответствующем слабой связи электромагнитной и пучковой волн, а также достаточно малой начальной модуляции пучка. Для каждой конкретной системы условие (3) может быть записано в соответствующем виде. Так, например, для электростатического ондулятора [1], считая, что круглый волновод радиусом 2 см пронизывается тонким трубчатым пучком со средним радиусом 1 см и толщиной 0,1 см, скорость которого 0,6с ($\gamma = 1,25$), где с – скорость света, γ – релятивистский фактор, ток пучка 1 кА, длина волны излучения 1 см, плотность электронов в пучке $6,6 \cdot 10^{11}$см$^{-3}$, можно получить значение $\nu = 3,65 \cdot 10^{-5} E_0$, где E_0 – амплитуда электростатического поля [1]. Следовательно, для применения результатов, полученных в данной работе, к описанию процессов излучения волн плотным тонким трубчатым пучком с указанными параметрами необходимо, чтобы (в соответствии с (3)) $E_0 << 27$кВ/см. При этом амплитуда поля модуляции, формирующего электронные сгустки в начальный момент времени, также должна быть $\sim 2 \cong 5$кВ/см.

Вводя действительные амплитуды и фазы волн [5, 7], из системы уравнений (1) можно получить следующие интегралы для амплитуд:

$$\left|\varepsilon_1\right|^2 - \left|\varepsilon_{10}\right|^2 = 2(|a|^2 - |a_0|^2), \quad \left|\varepsilon_2\right|^2 - \left|\varepsilon_{20}\right|^2 = -2\beta(|a|^2 - |a_0|^2), \tag{4}$$

исключая с помощью которых ε_1 и ε_2 (при этом, конечно, используется и интеграл для фаз, который вследствие его громоздкости мы не приводим), систему уравнений (1) можно свести к одному уравнению для величины $x = |a|^2$:

$$\frac{dx}{d\tau} = \left[A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

где

$$A_0 = -\nu^2 \varepsilon_{10}^2 \varepsilon_{20}^2, \qquad A_1 = \nu^2 \varepsilon_{10}^2 \varepsilon_{20}^2 - 2\nu^2 \varepsilon_{20}^2 a_0^2, \qquad A_2 = 2\nu^2 \varepsilon_{20}^2,$$
$$A_3 = \nu^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\alpha+2}{\alpha-4} \varepsilon_{20}^2 - 4\beta \right) - \frac{1}{8} \frac{\alpha+5}{\alpha-4}, \qquad A_4 = -\frac{1}{64} \left(\frac{\alpha+5}{\alpha-4} \right)^2. \tag{6}$$

В этих выражениях для упрощения записи начальные значения амплитуд волн $\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}, a_0$ считаем действительными величинами.

Решения уравнения (5) определяются корнями полинома, стоящего под радикалом. Опуская стандартную процедуру нахождения решений через эллиптические функции, выпишем окончательно результаты. В случае слабой модуляции пучка, когда

$$a_0^2 << \frac{\varepsilon_{10}^2}{8}, \quad a_0^2 << \nu^2, \tag{7}$$

имеем

$$x = \frac{128\nu^2 \left(\frac{\alpha-4}{\alpha+5} \right)^2 \left(\frac{1}{8} \frac{\alpha+2}{\alpha-4} \varepsilon_{20}^2 - \beta + A \right) \left(a_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{10}^2 sn^2(y,r) \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_{10}^2 a_0^2 cn^2(y,r)}{128\nu^2 \left(\frac{\alpha-4}{\alpha+5} \right)^2 \left(\frac{1}{8} \frac{\alpha+2}{\alpha-4} \varepsilon_{20}^2 - \beta + A \right) cn^2(y,r) + a_0^2 sn^2(y,r) + \frac{1}{2} \varepsilon_{10}^2}, \tag{8}$$

где

$$A = \sqrt{ \left(\frac{1}{8} \frac{\alpha+2}{\alpha-4} \varepsilon_{20}^2 - \beta + A \right)^2 + \frac{\varepsilon_{20}^2}{128\nu^2} \left(\frac{\alpha+5}{\alpha-4} \right)^2 }$$
$$y = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \varepsilon_{20} \tau \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_{10}^2}{\varepsilon_{20}^2} \left(1 + 2 \frac{a_0^2}{\varepsilon_{10}^2} \right) A \right), \qquad r = 1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{10}^2 + 2a_0^2}{\varepsilon_{20}^2} A. \tag{9}$$

Для времени насыщения амплитуд волн имеем следующее выражение:

$$\tau_{\text{нас}} = \frac{\sqrt{2}}{\nu\varepsilon_{20}} \ln\left[4\frac{\varepsilon_{20}}{\sqrt{\varepsilon_{10}^2 + 2a_0^2}} A^{-\frac{1}{2}}\right]. \tag{10}$$

Решения (8)-(10) при $a_0 = 0$ переходят в соответствующие выражения, полученные в работе [4]. При сильной модуляции пучка, когда $a_0 \sim \nu \sim \varepsilon_{10}$,

$$x = \frac{128\nu^2 a_0^2 \left(\frac{\alpha-4}{\alpha+5}\right)^2 \left(\frac{1}{8}\frac{\alpha+2}{\alpha-4}\varepsilon_{20}^2 - \beta - \frac{a_0^2}{32\nu^2}\frac{\alpha+5}{\alpha-4} + A\right)}{128\nu^2 \left(\frac{\alpha-4}{\alpha+5}\right)^2 \left(\frac{1}{8}\frac{\alpha+2}{\alpha-4}\varepsilon_{20}^2 - \beta - \frac{a_0^2}{32\nu^2}\frac{\alpha+5}{\alpha-4} + A\right) cn^2(y,r) + a_0^2 sn^2(y,r)}, \tag{11}$$

где

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\frac{\alpha+2}{\alpha-4}\varepsilon_{20}^2 - \beta - \frac{a_0^2}{32\nu^2}\frac{\alpha+5}{\alpha-4}\right)^2 + \frac{\varepsilon_{20}^2}{128\nu^2}\left(\frac{\alpha+5}{\alpha-4}\right)^2},$$
$$y = \frac{\nu}{\sqrt{2}}\varepsilon_{20}\tau\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a_0^2}{\varepsilon_{20}^2}A\right), \quad r = 1 - \frac{a_0^2}{\varepsilon_{20}^2}A. \tag{12}$$

Время развития неустойчивости определяется выражением

$$\tau_{\text{нас}} = \frac{\sqrt{2}}{\nu\varepsilon_{20}} \ln\left[\frac{4\varepsilon_{20}}{\sqrt{2}a_0} A^{-\frac{1}{2}}\right]. \tag{13}$$

И, наконец, в предельном случае очень сильной модуляции, когда

$$\frac{4\nu^2 \left|\alpha(1-8\beta) + 32\beta + 2\right|}{\alpha+5} << a_0^2 << \sqrt{8}\varepsilon_{20}\nu, \tag{14}$$

имеем

$$x = \frac{4\frac{4-\alpha}{\alpha+5} a_0^2 \left(a_0^2 + \sqrt{8}\varepsilon_{20}\nu\right)}{4\frac{4-\alpha}{\alpha+5}\left(a_0^2 + \sqrt{8}\varepsilon_{20}\nu\right) cn^2(y,r) + a_0^2 sn^2(y,r)}, \tag{15}$$

где

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\frac{\alpha+2}{\alpha-4}\varepsilon_{20}^2 - \beta - \frac{a_0^2}{32\nu^2}\frac{\alpha+5}{\alpha-4}\right)^2 + \frac{\varepsilon_{20}^2}{128\nu^2}\left(\frac{\alpha+5}{\alpha-4}\right)^2},$$
$$y = \frac{\nu}{\sqrt{2}}\varepsilon_{20}\tau\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{32}\frac{a_0^2}{\varepsilon_{20}\nu}\frac{\alpha+5}{\alpha-4}\right), \quad r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{16}\frac{\alpha+5}{4-\alpha}\frac{a_0^2}{\varepsilon_{20}\nu}. \tag{16}$$

Время развития неустойчивости определяется выражением

$$\tau_{\text{нас}} = \frac{\sqrt{2}}{\nu\varepsilon_{20}} \ln\left[\frac{4\varepsilon_{20}}{\sqrt{2}a_0}\left(\frac{\alpha+5}{\alpha-4}\frac{\varepsilon_{20}}{\sqrt{128\nu}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]. \tag{17}$$

Из (8) и (15) при $\tau = \tau_{\max}$ получим

$$\frac{x_{\max(a_0 \neq 0)}}{x_{\max(a_0 = 0)}} \approx 1 + \frac{a_0^2}{\sqrt{8}\nu\varepsilon_{20}}. \tag{18}$$

Отсюда с учетом (14) следует, что даже сильная предварительная модуляция пучка по плотности приводит к весьма незначительному росту амплитуд насыщения волн. Из (10) и (17) находим

$$\frac{\tau_{\text{нас}(a_0\neq 0)}}{\tau_{\text{нас}(a_0=0)}} \approx 1+\frac{\ln\dfrac{\varepsilon_{10}^2}{2a_0^2}}{\ln\left(\dfrac{128\sqrt{2}\varepsilon_{20}\nu}{\varepsilon_{10}^2}\dfrac{4-\alpha}{\alpha+5}\right)}. \qquad (19)$$

Для случая сильной модуляции выполняется неравенство $\varepsilon_{10}^2 < 2a_0^2$, поэтому числитель – величина отрицательная, знаменатель же – положительная величина, так как $\nu/\varepsilon_{10}^2 >> 1 \quad (\alpha < 4)$. Следовательно, с ростом глубины предварительной модуляции пучка по плотности время стабилизации неустойчивости уменьшается. Причем, как показывают расчеты по формуле (19), это уменьшение для максимально возможных значений a_0, удовлетворяющих неравенству (14), весьма значительно – более чем в два раза.

Данное обстоятельство можно объяснить следующим образом. Если пучок первоначально не был промодулирован по плотности, то при рассеянии волн на пучке происходит его модуляция на частоте резонансной гармоники и формирование электронных сгустков, которые наиболее эффективно обмениваются энергией с излучаемой волной, в результате чего пучок тормозится, теряя энергию на излучение и обогащаясь кратными гармониками плотности заряда. Неустойчивость при этом стабилизируется вследствие нарушения условий резонанса. Исходя из данной схемы, можно сделать вывод, что первоначальная модуляция пучка по плотности (модуляция резонансной гармоники) приводит к сокращению времени промежуточного процесса формирования сгустков (так как это формирование начинается уже не с нулевого уровня) и тем самым к более быстрому выходу системы на нелинейный режим. При этом фазы электромагнитных волн и колебаний плотности заряда в начальный момент времени считаются согласованными друг с другом.

Кроме того, из анализа выражений (15) и (17) видно, что увеличение степени неодномерности пучковой волны (параметра α) приводит к сокращению времени стабилизации неустойчивости. Амплитуды насыщения волн при этом уменьшаются. Такая динамика процесса рассеяния является следствием того, что с увеличением степени неодномерности пучковой волны повышается доля кинетической энергии электронов пучка, расходуемая на возбуждение кратных гармоник плотности заряда, что, в свою очередь, приводит к более быстрому нарушению условий резонанса и к стабилизации неустойчивости. Амплитуды взаимодействующих волн при этом не успевают вырасти и достигают максимумов при меньших по сравнению с одномерным случаем ($\alpha = 1$) значениях.

В заключении отметим, что полученные в настоящей работе результаты могут быть использованы при разработке приборов типа ЛСЭ (лазеры на свободных электронах).

Примечания:

1. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990. 336 с.
2. Давыдова Т.А., Ораевский В.Н. Стабилизация взрывной неустойчивости за счет неоднородности среды // ЖЭТФ. 1974. Т. 66, № 5. С. 1613-1621.
3. Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Петелин М.И. Нелинейная теория вынужденного рассеяния

References:

1. Kuzelev M.V., Rukhadze A.A. Electrodynamics of dense electron beams in plasma. M.: Nauka, 1990. 336 pp.
2. Davydova T.A., Oraevskiy V.N. Stabilization of explosive instability due to medium heterogeneity // ZhETF. 1974. Vol. 66, No. 5. P. 1613-1621.
3. Bratman V.L., Ginzburg N.S., Petelin M.I. The nonlinear theory of the stimulated scattering of

волн на релятивистских электронных пучках // ЖЭТФ. 1979. Т. 76, № 3. С. 930-943.

4. Бобылев Ю.В., Кузелев М.В., Панин В.А. Распадные и взрывные неустойчивости нерелятивистской пучковой плазмы в приближении кубической нелинейности // Известия вузов. Сер. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 10. С. 1193-1200.
5. Бобылев Ю.В., Кузелев М.В. Нелинейные явления при электромагнитных взаимодействиях электронных пучков с плазмой. М.: Физматлит, 2009. 456 с.
6. Березин А.К., Файнберг Я.Б., Безъязычный И.А. Экспериментальное исследование возможности управления пучковой неустойчивостью с помощью модуляции // Письма в ЖЭТФ. 1968. Т. 7, № 5. С. 156-160.
7. Вильхельмсон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М.: Энергоиздат, 1981. 223 с.

waves on relativistic electron beams // ZhETF. 1979. Vol. 76, No. 3. P. 930-943.

4. Bobylev Yu.V., Kuzelev M.V., Panin V.A. Disintegration and explosive instabilities of the nonrelativistic beam plasma as approximation of cubic nonlinearity // The news of higher schools. Ser. of Radiophysics. 1988. Vol. 31, No. 10. P. 1193-1200.
5. Bobylev Yu.V., Kuzelev M.V. The nonlinear phenomena at electromagnetic interactions of electron beams and plasma. M.: Fizmatlit, 2009. 456 pp.
6. Berezin A.K., Faynberg Ya.B., Bezyazychny I.A. The experimental study of possibility of control of beam instability by means of modulation // Letters to ZhETF. 1968. Vol. 7, No. 5. P. 156-160.
7. Wilhelmsson X., Weiland J. Coherent nonlinear interaction of waves in plasma. M.: Energoizdat, 1981. 223 pp.