МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.9
ББК 22.161.6
К 89

Куижева С.К.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и системного анализа, ректор Майкопского государственного технологического университета, Майкоп, e-mail: s.kuigeva@yandex.ru

Паланджянц Л.Ж.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и системного анализа инженерно-экономического факультета Майкопского государственного технологического университета, Майкоп, тел. (8772) 57-03-53, e-mail: levonmgtu@rambler.ru

Преобразование Бэклунда и интегрируемые потенциалы

(Рецензирована)

Аннотация

Рассматривается преобразование Бэклунда для уравнения Кортевега- де Фриза, вводится мультипликативный интеграл и устанавливается связь между преобразованием Бэклунда и интегрируемыми потенциалами. Продемонстрировано, что смысл преобразования Бэклунда для дифференциальных уравнений состоит в том, что существуют подстановки, которые позволяют из более простых решений строить более сложные.

Ключевые слова*: преобразование Бэклунда, уравнение Кортевега- де Фриза.*

Kuizheva S.K.
Candidate of Phisics and Mathematics, Associate Professor of Higher Mathematics and System Analysis Department, Rector of Maikop State University of Technology, Maikop, e-mail: s.kuigeva@yandex.ru

Palandzhyants L.Zh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Higher Mathematics and System Analysis Department, Engineering-Economics Faculty, Maikop State University of Technology, Maikop, ph. (8772) 57-03-53, e-mail: levonmgtu@rambler.ru

Bäcklund transformation and integrable potentials

Abstract

This paper discusses the Bäcklund transformation for the Korteweg-de Vries equation. We introduce the concept of a multiplicative integral and establish a connection between the Bäcklund transformation and integrable potentials. The meaning of Bäcklund transformation for differential equations is that there are substitutions that allow us to build more complex solutions from the more simple ones.

Keywords*: Bäcklund transformation, the Korteweg-de Vries equation.*

1. Уравнение Кортевега- де Фриза.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y'' = \left(\tilde{u} + \frac{m}{2}\right) y, \tag{1.1}$$

где m – некоторая постоянная, $\tilde{u}(x,t)$ – произвольное решение модифицированного уравнения Кортевега- де Фриза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{1.2}$$

Лемма 1. Преобразование $y' = \frac{\tilde{w} - w}{2} y$, где $\tilde{w}_x = \tilde{u}$, приводит уравнение (1.1) к уравнению

$$w_x + \tilde{w}_x = -m + \frac{1}{2}(w - \tilde{w})^2 . \qquad (1.3)$$

Доказательство. Дифференцируя обе части равенства $y' = \frac{\tilde{w} - w}{2} y$, получаем $y'' = \frac{\tilde{w}_x - w_x}{2} y + \frac{\tilde{w} - w}{2} y'$. Учитывая, что $y' = \frac{\tilde{w} - w}{2} y$, имеем

$$y'' = \frac{\tilde{w}_x - w_x}{2} y + \frac{(\tilde{w} - w)^2}{4} y . \qquad (1.4)$$

Из равенств (1.1) и (1.4) получаем равенство (1.3).

Лемма 2. Пусть $w_{1x} = u_1$, $w_{2x} = u_2$, где $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – решения уравнения Кортевега-де Фриза, m_1, m_2 – некоторые постоянные; $w_{12x} = u_{12}$ – также решение уравнения (1.2).

Пусть имеют места следующие соотношения:

$$w_{1x} + \tilde{w}_x = -m_1 + \frac{1}{2}(w_1 - \tilde{w})^2 , \qquad (1.5)$$

$$w_{2x} + \tilde{w}_x = -m_2 + \frac{1}{2}(w_2 - \tilde{w})^2 , \qquad (1.6)$$

$$w_{12x} + w_{1x} = -m_2 + \frac{1}{2}(w_{12} - w_1)^2 , \qquad (1.7)$$

$$w_{12x} + w_{2x} = -m_1 + \frac{1}{2}(w_{12} - w_2)^2 . \qquad (1.8)$$

Тогда имеет место равенство:

$$w_{12} - \tilde{w} = \frac{2(m_1 - m_2)}{w_1 - w_2} , \qquad (1.9)$$

причем $u_{12} = w_{12x}$.

Доказательство. Запишем систему уравнений (1.5)–(1.8) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w}_x \\ w_{1x} \\ w_{2x} \\ w_{12x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_1 + \frac{1}{2}(w_1 - \tilde{w})^2 \\ -m_2 + \frac{1}{2}(w_2 - \tilde{w})^2 \\ -m_2 + \frac{1}{2}(w_{12} - w_1)^2 \\ -m_1 + \frac{1}{2}(w_{12} - w_2)^2 \end{pmatrix} . \qquad (1.10)$$

Ранг матрицы системы (1.10) равен трем. В самом деле, умножим первую строку на -1 и добавим ко второй строке. Затем вторую строку добавим к третьей строке, которая будет равна четвертой строке. В результате получаем равенство

$$m_1 - \frac{1}{2}(w_1 - \tilde{w})^2 - m_2 + \frac{1}{2}(w_2 - \tilde{w})^2 - m_2 + \frac{1}{2}(w_{12} - w_1)^2 = -m_1 + \frac{1}{2}(w_{12} - w_2)^2 ,$$

$$2(m_1 - m_2) + w_1\tilde{w} - w_2\tilde{w} - w_{12}w_1 = -w_{12}w_2 ,$$

откуда следует равенство (1.9), которое является преобразованием Бэклунда для уравнения (1.2) [1, с. 28].

Таким образом, для получения преобразования Бэклунда достаточно знать какое-либо решение $\tilde{u} = \tilde{w}_x$ уравнения Кортевега- де Фриза, затем с помощью интегрируемых уравнений Риккати (1.5) и (1.6) найти два решения $u_1 = w_{1x}$ и $u_2 = w_{2x}$. Тогда решение $u_{12} = w_{12x}$ можно найти с помощью соотношения (1.9).

Для уравнения (1.2) рассмотрим соответствующий мультипликативный интеграл

$$\int\limits^{\frown} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} dx, \tag{1.11}$$

где $a_{12}(x), a_{21}(x)$ – некоторые достаточно гладкие функции.

Лемма 3. [2, с. 57]. Пусть выполняется условие

$$\int a_{12}(x)dx \cdot \int a_{21}(x)dx = -2\,. \tag{1.12}$$

Тогда мультипликативный интеграл (1.11) вычисляется в конечном виде.

Доказательство. Представим подынтегральную матричную функцию в виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле мультипликативного интегрирования по частям имеет место равенство:

$$\int\limits^{\frown} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12}dx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int\limits^{\frown} E + \begin{pmatrix} 1 & -\int a_{12}dx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12}dx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dx =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12}dx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int\limits^{\frown} E + a_{21} \begin{pmatrix} -\int a_{12}dx & -\left(\int a_{12}dx\right)^2 \\ 1 & \int a_{12}dx \end{pmatrix} dx\,.$$

Представим подынтегральную функцию в виде:

$$a_{21} \begin{pmatrix} -\int a_{12}dx & -\left(\int a_{12}dx\right)^2 \\ 1 & \int a_{12}dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{21}\int a_{12}dx & 0 \\ a_{21} & a_{21}\int a_{12}dx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_{21}\left(\int a_{12}dx\right)^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Применим еще раз формулу мультипликативного интегрирования по частям. Тогда

$$\int\limits^{\frown} E + a_{21} \begin{pmatrix} -\int a_{12}dx & -\left(\int a_{12}dx\right)^2 \\ 1 & \int a_{12}dx \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12}dx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\int a_{21}\left(\int a_{12}dx\right)^2 dx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int\limits^{\frown} E + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} dx,$$

где $b_{11} = -a_{21}\int a_{12}dx + a_{21}\int a_{21}\left(\int a_{12}dx\right)^2 dx$;

$b_{12} = \left[-a_{21}\int a_{12}dx + a_{21}\int a_{21}\left(\int a_{12}dx\right)^2 dx\right] \cdot \left[a_{21}\int a_{21}\left(\int a_{12}dx\right)^2 dx\right] + a_{21}\int a_{12}dx \cdot \int a_{21}\left(\int a_{12}dx\right)^2 dx;$

$b_{21} = a_{21}$;

$b_{22} = a_{21}\int a_{12}dx - a_{21}\int a_{21}\left(\int a_{12}dx\right)^2 dx$.

Условие $b_{12} = 0$ после сокращения на $a_{21}\int a_{21}\left(\int a_{12}dx\right)^2 dx \neq 0$ равносильно равенству $2\int a_{12}dx = \int a_{21}\left(\int a_{12}dx\right)^2 dx$ или после дифференцирования $\frac{2a_{12}}{\left(\int a_{12}dx\right)^2} = a_{21}$, интегрируя которое получаем равенство (1.12).

Так как мультипликативный интеграл

$$\stackrel{\frown}{\int} E+\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}dx=\begin{pmatrix} \exp\int b_{11}dx & 0 \\ \exp\int b_{22}dx\cdot\int b_{21}(\exp\int(b_{22}-b_{11})dx)dx & \exp\int b_{22}dx\end{pmatrix},$$

то мультипликативный интеграл (1.11) вычисляется в конечном виде:

$$\stackrel{\frown}{\int} E+\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0\end{pmatrix}dx=\begin{pmatrix} 1 & \int a_{12}dx \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -\int a_{21}\left(\int a_{12}dx\right)^2 dx \\ 0 & 1\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \exp\int b_{11}dx & 0 \\ \exp\int b_{22}dx\cdot\int b_{21}(\exp\int(b_{22}-b_{11})dx)dx & \exp\int b_{22}dx\end{pmatrix}.$$

Лемма 3 доказана.

Установим теперь связь между условием (1.12) и преобразованием Бэклунда (1.9) для уравнения Кортевега- де Фриза.

Теорема. Условия (1.9) и (1.12) эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим мультипликативный интеграл

$$\stackrel{\frown}{\int} E+\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(u_1-u_2)}{(m_2-m_1)} \\ u_{12}-\tilde{u} & 0\end{pmatrix}dx\,. \qquad (1.13)$$

Сравнивая интегралы (1.11) и (1.13), получаем

$$a_{12}=(u_1-u_2)/(m_2-m_1),\quad a_{21}=u_{12}-\tilde{u}\,.$$

Следовательно,

$$\int(u_1-u_2)dx\cdot\int(u_{12}-\tilde{u})dx=2(m_1-m_2),\qquad \int u_{12}dx=\int\tilde{u}dx+\frac{2(m_1-m_2)}{\int(u_1-u_2)dx},$$

откуда следует соотношение (1.9).

Таким образом, соотношение (1.9), полученное с помощью преобразования Бэклунда для уравнения (1.2), есть следствие интегрируемости в конечном виде мультипликативного интеграла (1.13). Теорема доказана.

Например**,** рассмотрим мультипликативный интеграл

$$\stackrel{\frown}{\int} E+\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{k}{2} \\ \dfrac{2}{k}u & 0\end{pmatrix}dx,\ k=const\,.$$

Применяя формулу мультипликативного интегрирования по частям, получаем:

$$\stackrel{\frown}{\int} E+\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{k}{2} \\ \dfrac{2}{k}u & 0\end{pmatrix}dx=\stackrel{\frown}{\int} E+\left\{\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{k}{2} \\ \dfrac{2}{k}u & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{2}{k}u-\dfrac{k}{2} & 0\end{pmatrix}\right\}dx=$$

$$=\begin{pmatrix} ch\int\frac{k}{2}dx & sh\int\frac{k}{2}dx \\ sh\int\frac{k}{2}dx & ch\int\frac{k}{2}dx\end{pmatrix}\cdot\stackrel{\frown}{\int} E+\left(\frac{2}{k}u-\frac{k}{2}\right)ch^2\int\frac{k}{2}dx\begin{pmatrix} -cth\int\frac{k}{2}dx & -cth^2\int\frac{k}{2}dx \\ 1 & cth\int\frac{k}{2}dx\end{pmatrix}dx\,.$$

Введем обозначения:

$$\tilde{a}_{21}=\left(\frac{2}{k}u-\frac{k}{2}\right)ch^2\int\frac{k}{2}dx,\qquad \int\tilde{a}_{12}dx=cth\int\frac{k}{2}dx\,.$$

Тогда получаем:

$$\overset{\frown}{\int}E+\begin{pmatrix}0 & \frac{k}{2}\\ \frac{2}{k}u & 0\end{pmatrix}dx=\begin{pmatrix}ch\int\frac{k}{2}dx & sh\int\frac{k}{2}dx\\ sh\int\frac{k}{2}dx & ch\int\frac{k}{2}dx\end{pmatrix}\cdot\overset{\frown}{\int}E+\tilde{a}_{21}\begin{pmatrix}-\int\tilde{a}_{12}dx & -\int^2\tilde{a}_{12}dx\\ 1 & \int\tilde{a}_{12}dx\end{pmatrix}dx. \quad (1.14)$$

Воспользуемся тождеством

$$\overset{\frown}{\int}E+\tilde{a}_{12}\begin{pmatrix}-\int\tilde{a}_{12} & -\int^2\tilde{a}_{12}dx\\ 1 & \int\tilde{a}_{12}dx\end{pmatrix}dx=\begin{pmatrix}1 & -\int\tilde{a}_{12}dx\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\overset{\frown}{\int}E+\begin{pmatrix}0 & \tilde{a}_{12}\\ \tilde{a}_{21} & 0\end{pmatrix}dx.$$

Тогда равенство (1.14) примет вид:

$$\overset{\frown}{\int}E+\begin{pmatrix}0 & \frac{k}{2}\\ \frac{2}{k}u & 0\end{pmatrix}dx=\begin{pmatrix}ch\int\frac{k}{2}dx & sh\int\frac{k}{2}dx\\ sh\int\frac{k}{2}dx & ch\int\frac{k}{2}dx\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -\int\tilde{a}_{12}dx\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\overset{\frown}{\int}E+\begin{pmatrix}0 & \tilde{a}_{12}\\ \tilde{a}_{21} & 0\end{pmatrix}dx. \quad (1.15)$$

Из условия $\int\tilde{a}_{12}dx\cdot\int\tilde{a}_{21}dx=-2$, обеспечивающего интегрируемость в конечном виде мультипликативного интеграла (1.15), следует, что

$$cth\int\frac{k}{2}dx\cdot\int\left(\left(\frac{2}{k}u-\frac{k}{2}\right)ch^2\frac{k}{2}dx\right)dx=-2,\qquad u=\frac{2k^2}{sh^2\int kdx}+\frac{k^2}{4}.$$

Для нахождения решения уравнения (1.2) воспользуемся равенством

$$\int kdx=k\left(x+f(t)\right), \quad (1.16)$$

где $f(t)$ – некоторая гладкая функция.

Подставляя равенство (1.16) в уравнение (1.2), получаем

$$f(t)=-\frac{5}{2}k^2t+c.$$

Следовательно, $u=\dfrac{2k^2}{sh^2k\left(x-\frac{5}{2}k^2t+c\right)}+\dfrac{k^2}{4}$ есть решение уравнения (1.2).

2. Потенциалы уравнения Шредингера, порожденные преобразованием Бэклунда.

Рассмотрим стационарное уравнение Шредингера [3, с. 99]:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{U_0}{ch^2\alpha x}\right)\psi=0\,.$$

Найдем уравнение Кортевега-де Фриза, соответствующее этому уравнению.

Имеем $U(x)=\dfrac{2mE}{\hbar^2}+\dfrac{2mU_0}{\hbar^2ch^2\alpha x}$ или $U(x)=c+\dfrac{k}{ch^2\alpha x}$, где $c=\dfrac{2mE}{\hbar^2}$, $k=\dfrac{2mU_0}{\hbar^2}$.

Тогда $U'=\dfrac{-2k\alpha\cdot sh\alpha x}{ch^3\alpha x}$, $U''=\dfrac{4k\alpha^2}{ch^2\alpha x}-\dfrac{6k\alpha^2}{ch^4\alpha x}$, $U'''=\dfrac{-8k\alpha^3\cdot sh\alpha x}{ch^3\alpha x}+\dfrac{24k\alpha^3\cdot sh\alpha x}{ch^5\alpha x}$.

Уравнение (1.2) в стационарном случае примет вид

$$U_{xxx} - 6UU_x = 0. \tag{2.1}$$

Подставляя значения U, U', U''' в уравнение (2.1), получаем $k = 2\alpha^2$, $E = -\frac{U_0}{3} < 0$, что соответствует рассматриваемому случаю дискретности спектра.

Используя лемму 3, можно вычислить мультипликативный интеграл, соответствующий рассматриваемому потенциалу.

Примечания:

1. Солитоны в действии: сб. ст. М.: Мир, 1981. 312 с.
2. Демина Т.И., Куижева С.К., Паланджянц Л.Ж. Алгебраические методы интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных. Майкоп: Изд-во Кучеренко В.О., 2013. 112 с.
3. Ландау Л.Д., Лифщиц Е.М. Квантовая механика. Т. III. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989. 768 с.

References:

1. Solitons in action: coll. of art. M.: Mir, 1981. 312 pp.
2. Demina T.I., Kuizheva S.K., Palandzhyants L.Zh. Algebraic methods of integration of partial differential equations. Maikop: V.O. Kucherenko publishing house, 2013. 112 pp.
3. Landau L.D., Lifshits E.M. Quantum mechanics. Vol. III. Nonrelativistic theory. M.: Nauka, 1989. 768 pp.