УДК 517.977.1
ББК 22.161.6
Ш 96

Шаова С.М.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-05, e-mail: sv.shaova@gmail.ru
Шумафов М.М.
Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел (8772) 59-39-05, e-mail: shumaf@mail.ru

О необходимом условии стабилизируемости неустойчивых линейных систем обобщенной обратной связью с запаздыванием по Пирагосу

(Рецензирована)

Аннотация

Получено эффективное необходимое условие стабилизируемости линейных стационарных управляемых систем обратной связью с запаздыванием в форме Пирагоса и ее обобщения. Из полученного условия следует, что если число положительных собственных значений матрицы исходной системы нечетно, то система не может быть стабилизируема указанными выше обратными связями. Полученное условие может быть использовано при решении задач стабилизации неустойчивых состояний равновесия линейных управляемых систем, а также при локальном анализе линейных систем с хаотическим поведением вблизи неустойчивых состояний равновесия обратной связью по Пирагосу и в ее обобщенной форме.

Ключевые слова: *линейная управляемая система, обратная связь по Пирагосу, характеристический квазиполином, стабилизация.*

Shaova S.M.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-05, e-mail: sv.shaova@gmail.ru
Shumafov M.M.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-05, e-mail: shumaf@mail.ru

On necessary stabilizability condition of unstable equilibria of linear systems by extended Pyragas' delayed feedback

Abstract

In this paper a necessary effective stabilizability condition of unstable equilibria of linear controllable systems by extended Pyragas' time-delayed feedback is obtained. It follows from this condition that if the number of positive eigenvalues of original matrix is odd, then the system can never be stabilized by generalized Pyragas' delayed feedback. The condition obtained can be used in solving stabilization problem of unstable linear controllable systems by Pyragas' delayed feedback and its extended form, as well as for local analysis of nonlinear control systems with chaotic behavior in the neighborhood of unstable equilibria.

Keywords: *linear controllable system, Pyragas' delayed feedback, characteristic quasipolynom, stabilization.*

1. Введение

Одной из основных задач теории управления является стабилизация неустойчивых объектов, в частности, стабилизация динамических систем с неустойчивыми состояниями равновесия. Проблемы стабилизации динамических систем интенсивно изучались в последние четыре десятилетия (см. библиографию в [1] и обзорные статьи [2, 3]). Наиболее эффективные методы и алгоритмы стабилизации построены для линейных стационарных систем. Одной из проблем, стимулировавшей немало публикаций в последнее десятилетие, была проблема Брокетта о стабилизации линейной стационарной системы с помощью нестационарной обратной связи [4]. Решение этой проблемы в ряде важных для практики случаев было дано в работах Г.А. Леонова [5, 6] и Л. Моро и Д. Аэлса [7]. Другой важной в прикладных дисциплинах и инженерной практике проблемой, вызвавшей в последние два десятилетия огромное число публикаций, является проблема управления хаосом.

Согласно К. Пирагосу [8] более 1500 статей были посвящены управлению хаосом и смежным с ним вопросам. Первоочередной задачей в этом направлении исследований является стабилизация хаоса, которая осуществляется, как правило, стабилизацией неустойчивых периодических орбит и неустойчивых состояний равновесия, встроенных в странные аттракторы динамических систем с хаотическим поведением. В своей пионерской работе [9] К. Пирагос (K. Pyragas) предложил весьма эффективный метод стабилизации неустойчивых периодических орбит и состояний равновесия систем с хаотическим поведением траекторий, в частности, в системах Лоренца и Ресслера. Этот метод заключается во введении в систему обратной связи с запаздыванием, которая формируется специальным образом, а именно как величина, пропорциональная разности значений выходного сигнала в текущий момент времени и значения этого сигнала в некоторый предыдущий момент времени. Позже появилось большое число модификаций метода Пирагоса, расширяющие его область применения. Одной из первых и чаще применяемых таких обобщенных методов стабилизации является предложенный в работе [10] метод, состоящий в построении обратной связи в виде бесконечного ряда (или суммы с конечным числом слагаемых, содержащих время запаздывания), члены которого содержат информацию о предыдущих состояниях системы.

Следует отметить, что введение в систему обратной связи с запаздыванием приводит, как правило, к необходимости рассмотрения системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, изучение которой представляет определенные математические трудности. Даже линейный анализ таких систем непрост из-за наличия бесконечного числа показателей Флоке, характеризующих устойчивость стабилизируемой орбиты, или бесконечного числа нулей соответствующего характеристического квазиполинома, характеризующего устойчивость стабилизируемого состояния равновесия линейной стационарной системы. Тем не менее некоторые общие аналитические результаты были получены в работах [11-13] и работах других авторов (см. библиографию в [8]). В этих работах было показано, что обобщенный метод Пирагоса, предложенный в [10], может стабилизировать только определенный класс систем с неустойчивыми состояниями равновесия и неустойчивыми периодическими орбитами. В общем, основной результат в указанных выше работах состоял в том, что любая неустойчивая периодическая орбита с нечетным числом положительных показателей Флока не может быть стабилизируема никаким выбором обратной связи в форме Пирагоса и ее обобщения. Это *необходимое* условие стабилизируемости было фактически доказано только для *неавтономных* систем.

Для автономных систем соответствующее необходимое условие стабилизируемости неустойчивых периодических орбит получено в работе [14]. Следует отметить, что вопрос об ограниченности области применения метода Пирагоса и его обобщения нечетным числом положительных показателей Флоке (odd number limitation) был предметом интенсивного обсуждения в литературе в течение почти десяти лет до тех пор, пока это утверждение не было опровергнуто для автономных систем в работе [15]. Отметим, что необходимые и/или достаточные аналитические условия стабилизируемости двумерных линейных систем получены в работах [16-19]. Для трехмерных систем условия стабилизируемости даны в [20].

В настоящей заметке нами получено общее необходимое условие стабилизируемости неустойчивых состояний равновесия линейных управляемых стационарных систем с помощью обратной связи по Пирагосу и ее обобщения. Из этого условия как следствие вытекает, что отсутствие нечетного числа положительных корней характеристического полинома соответствующей линейной системы является необходимым условием стабилизируемости неустойчивых состояний равновесия этой системы по схеме Пирагоса и ее обобщения.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния в момент времени t; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – управление (вход), $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – выход; A, B и C – вещественные постоянные матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$ и $l \times n$ соответственно.

Системы вида (1) представляют собой важный класс для анализа нелинейных управляемых систем в окрестности состояния равновесия $(x = 0, u = 0)$. К системам вида (1) сводятся также линейные периодические системы, возникающие как уравнения в вариациях нелинейных систем в окрестности их периодических орбит.

Введем в систему (1) обратную связь с запаздыванием вида [10]

$$u(t) = K[(1-r)\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} y(t - n\tau) - y(t)], \tag{2}$$

где K – ненулевой матричный параметр размера $m \times l$, $r \in [0,1)$ – вещественный параметр, который можно интерпретировать как параметр памяти, взвешивающий информацию о предыдущих состояниях системы, $\tau > 0$ – положительный параметр. Заметим, что если $r = 0$, то обратная связь (2) принимает вид

$$u(t) = K[y(t-\tau) - y(t)], \tag{3}$$

который был предложен первоначально К. Пирагосом для стабилизации неустойчивых периодических орбит, содержащихся в странном аттракторе хаотической системыРесслера.

Система (1), замкнутая обратной связью (2), имеет вид

$$\dot{x} = Ax + BKC[(1-r)\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} y(t - n\tau) - y(t)]. \tag{4}$$

Уравнение (4) представляет собой векторное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом. В (1) отклонения $n\tau$ аргумента кратны одному и тому же числу $\tau > 0$.

Задача состоит в том, чтобы получить эффективное необходимое условие стабилизируемости системы (1) обратной связью (2). Здесь под эффективным условием понимается условие, выраженное через собственные значения матрицы A исходной системы (1). Другими словами, задача заключается в том, чтобы получить условие, при котором система (4) не является асимптотически устойчивой ни при каком выборе матрицы K и параметра $\tau > 0$.

3. Формулировка результата

Имеет место следующая

Теорема. Пусть для системы (1) выполнено условие

$$(-1)^n \det A < 0, \quad n \in N. \tag{5}$$

Тогда стабилизация системы $\dot{x} = Ax$ $(u = 0)$ невозможна обратной связью (2) ни при каком выборе матрицы K, параметра $r \in [1, 0)$ и времени запаздывания $\tau > 0$.

Таким образом, условие $(-1)^n \det A \geq 0$ является *необходимым* условием стабилизируемости системы (1) обратной связью (2).

Следствие. Предположим, что в системе (1) $\det A \neq 0$. Тогда если число положительных собственных значений матрицы *A* нечетное, то система $\dot{x} = Ax$ не может быть стабилизируема обратной связью (2) ни при каком выборе матрицы *K*, параметра памяти *r* и запаздывания $\tau > 0$.

Утверждения теоремы и следствия справедливы и для обратной связи (3) по Пирагосу, которая является частным случаем (2).

4. Доказательство теоремы и следствия

Доказательства теоремы и следствия элементарные. При доказательстве теоремы будет использован следующий критерий асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (4) [см. 21, с. 118]: необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (4) является условие отрицательности вещественных частей всех корней характеристического квазиполинома уравнения (4).

4.1. **Доказательство теоремы.** Характеристический квазиполином замкнутой системы (4) имеет вид

$$\Delta(\lambda; K, r, \tau) = \det(\lambda E - A - BKC[(1-r)\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} e^{-n\tau\lambda} - 1]) =$$

$$= \det(\lambda E - A + H(\lambda) BKC), \tag{6}$$

$$H(\lambda) = \frac{1 - \exp(-\tau\lambda)}{1 - r\exp(-\tau\lambda)} \quad (r \in [0, 1),\ \tau > 0). \tag{7}$$

Поскольку $H(0) = 0,$ то для любых $K,\ r \in [0, 1)$ и $\tau > 0$

$$\Delta(0; K, r, \tau) = \det(-A) = (-1)^n \det A. \tag{8}$$

Далее, функция $\Delta(\lambda; K, r, \tau)$ из (6), (7) обладает следующими свойствами:

1) функция $\Delta(\lambda; K, r, \tau)$ непрерывна по λ на $[0, +\infty)$ при любых фиксированных значениях $K,\ r \in [0, 1)$ и $\tau > 0$;

2) $\Delta(\lambda; K, r, \tau) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$, так как

$$\lambda^n \det\left(E - A/\lambda + \left(H(\lambda)/\lambda\right) BKC\right) \to +\infty$$

при $\lambda \to +\infty$ для любых K, r и $\tau > 0$.

Из свойств 1), 2) функции $\Delta(\lambda; K, r, \tau)$ и равенства (8) следует, что если $(-1)^n \det A < 0,$ то существует положительное число $\lambda_0 > 0$ такое, что $\Delta(\lambda_0; K, r, \tau) = 0,$ то есть характеристический квазиполином (6), (7) имеет по крайней мере один положительный корень для любых $K, r \in [1, 0)$ и $\tau > 0$. Следовательно, состояние равновесия $x = 0$ замкнутой системы (4) не является асимптотически устойчивым, каковы бы ни были значения параметров $K, r \in [1, 0)$ и $\tau > 0$, то есть стабилизация системы (1) невозможна обратной связью (2) ни при каких значениях $K, r \in [1, 0)$ и $\tau > 0$. Теорема доказана.

4.2. **Доказательство следствия.** Из равенства (8) имеем

$$\Delta(\lambda; K, r, \tau) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \lambda_j(A), \tag{9}$$

где $\lambda_j(A)$ – собственные значения матрицы *A*.

Пусть p, q и c обозначают соответственно число положительных, число отрицательных и число комплексно-сопряженных пар собственных значений матрицы *A*. В силу условия следствия имеем: $p+q+2c=n.$

Рассмотрим два случая: 1) *n* – четное; 2) *n* – нечетное.

В случае 1) (*n* – четное), если p – нечетное, то q тоже нечетное. Следовательно, произведение собственных чисел $\lambda_j(A)$ отрицательно. Поэтому из (9) получаем

$$\Delta(0;\, K,\, r,\, \tau) < 0 \quad (\forall K,\, \forall r \in [1,\, 0),\, \forall\, \tau > 0).$$

В случае 2) (*n* – нечетное), если p – нечетное, то q – четное. Следовательно, из (9) имеем

$$\Delta(0;\, K,\, r,\, \tau) < 0 \quad (\forall K,\, \forall r \in [1,\, 0),\, \forall\, \tau > 0).$$

В обоих случаях 1) и 2) в силу (9) справедливо неравенство (5). Теперь остается применить теорему. Следствие доказано.

Заключение

В заметке получено эффективное необходимое условие стабилизируемости линейных стационарных управляемых систем обратной связью с запаздыванием в форме Пирагоса [9] и в ее обобщенной форме, предложенной в работе [10]. Это условие заключается в том, что если число положительных собственных значений матрицы исходной системы нечетно, то стабилизация системы указанными выше обратными связями не возможна ни при каких значениях параметров, входящих в рассматриваемые обратные связи. Таким образом, определяемое нечетностью числа положительных корней характеристического квазиполинома ограничение области применения обратной связи по Пирагосу и ее обобщения (так называемое в иностранной литературе «odd number limitation») остается верным и для *неустойчивых состояний равновесия* автономных линейных управляемых систем.

Примечания:

1. Леонов Г.А., Шумафов М.М. Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. 420 с.
2. Static output feedback: a survey V.L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato, K. Grigoriadis // Automatica. 1997. Vol. 33, No. 2. P. 125-137.
3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 7-46.
4. Brockett R. A stabilization problem // Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. London: Springer, 1999. P. 75-78.
5. Леонов Г.А. Проблема Брокетта в теории устойчивости линейных дифференциальных уравнений // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, вып. 4. С. 134-155.
6. Леонов Г.А. Стабилизационная проблема Брокетта // Автоматика и телемеханика. 2001. № 5. С. 190-193.
7. Moreau L., Aeyels D. Periodic output feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree // Systems & Control Letters. 2004. Vol. 51, No. 5. P. 395-406.

References:

1. Leonov G.A., Shumafov M.M. Methods of stabilization of linear controlled systems. SPb.: SPbSU publishing house, 2005. 420 pp.
2. Static output feedback: a survey V.L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato, K. Grigoriadis // Automatica. 1997. Vol. 33, No. 2. P. 125-137.
3. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Difficult tasks of the linear theory of control. Some approaches to solution // Automatics and telemechanics. 2005. No. 5. P. 7-46.
4. Brockett R. A stabilization problem // Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. London: Springer, 1999. P. 75-78.
5. Leonov G.A. Brockett problem in the theory of stability of the linear differential equations // Algebra and analysis. 2001. Vol. 13, Iss. 4. P. 134-155.
6. Leonov G.A. Brokett's stabilization problem // Automatics and telemechanics. 2001. No. 5. P. 190-193.
7. Moreau L., Aeyels D. Periodic output feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree // Systems & Control Letters. 2004. Vol. 51, No. 5. P. 395-406.

8. Pyragas K. A Twenty-Year Review of Time-Delay Feedback Control and Recent Develepments // NOLTA 2012 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications. Palma, Majorca (Spain), 2012. October 22-26. P. 683-686.
9. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 170. P. 421-428.
10. Socolar J.E.S., Sukow D.W., Gauthier D.J. Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 50. P. 3245-3248.
11. Mechanism of time-delayed feedback control / W. Just, T. Bernard, M. Ostheimer, E. Reibold, H. Benner // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 203-206.
12. Nakajima H. On analytical properties on delayed feedback control of chaos // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 232. P. 207-2010.
13. Nakajima H., Ueda Y. Limitation of generalized delayed feedback control // Pysica D. 1998. Vol. 111. P. 143-150.
14. Hooton E.W., Amann A. An analytical limitation for time-delayed feedback control in autonomous systems // arXiv: 1109.1138v1 [nlin.CD] 2011.
15. Refuting the Odd-Number Limitation of Time-Delayed Feedback Control / B. Fiedler, V. Flunkert, M. Georgi, P. Hövel, E. Schöll // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 98. P. 114101.
16. Huijberts H., Michiels W., Hijmeijer H. Stabilizability via Time-Delayed Feedback: An Eigenvalue Optimization Approach // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2009. Vol. 8, No. 1. P. 1-20.
17. Шумафов М.М. Стабилизация линейных управляемых систем второго порядка обратной связью с запаздыванием // Известия вузов. Математика. 2010. № 12. С. 87-90.
18. Шумафов М.М. О стабилизации двумерных линейных управляемых систем обратной связью с запаздыванием // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2010. Вып. 2 (61). С. 40-52. URL: http://vestnik.adygnet.ru
19. Шумафов М.М. Стабилизация линейных стационарных управляемых систем второго порядка обратной связью с запаздыванием // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии Наук (АМАН). 2013. Т. 15, № 2. С. 149-155.
20. Шумафов М.М. Об условиях стабилизируемости трехмерных линейных систем // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2012. Вып. 3 (106). С. 57-63. URL: http://vestnik.adygnet.ru
21. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

8. Pyragas K. A Twenty-Year Review of Time-Delay Feedback Control and Recent Develepments // NOLTA 2012 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications. Palma, Majorca (Spain), 2012. October 22-26. P. 683-686.
9. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 170. P. 421-428.
10. Socolar J.E.S., Sukow D.W., Gauthier D.J. Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 50. P. 3245-3248.
11. Mechanism of time-delayed feedback control / W. Just, T. Bernard, M. Ostheimer, E. Reibold, H. Benner // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 203-206.
12. Nakajima H. On analytical properties on delayed feedback control of chaos // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 232. P. 207-2010.
13. Nakajima H., Ueda Y. Limitation of generalized delayed feedback control // Pysica D. 1998. Vol. 111. P. 143-150.
14. Hooton E.W., Amann A. An analytical limitation for time-delayed feedback control in autonomous systems // arXiv: 1109.1138v1 [nlin.CD] 2011.
15. Refuting the Odd-Number Limitation of Time-Delayed Feedback Control / B. Fiedler, V. Flunkert, M. Georgi, P. Hövel, E. Schöll // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 98. P. 114101.
16. Huijberts H., Michiels W., Hijmeijer H. Stabilizability via Time-Delayed Feedback: An Eigenvalue Optimization Approach // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2009. Vol. 8, No. 1. P. 1-20.
17. Shumafov M.M. Stabilization of linear controlled systems of the second order by delayed feedback // News of higher schools. Mathematics. 2010. No. 12. P. 87-90.
18. Shumafov M.M. On stabilization of two-dimensional linear controllable systems by delayed feedback // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2010. Iss. 2 (61). P. 40-52. URL: http://vestnik.adygnet.ru
19. Shumafov M.M. Stabilization of linear stationary controlled systems of the second order by delayed feedback // Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences (AMAN). 2013. Vol. 15, No. 2. P. 149-155.
20. Shumafov M.M. On the conditions of stabilizability of three-dimensional linear systems // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2012. Iss. 3 (106). P. 57-63. URL: http://vestnik.adygnet.ru
21. Elsgolts L.E., Norkin S.B. Introduction to the theory of the differential equations with divergent argument. M.: Nauka, 1971. 296 pp.