УДК 517.21.3
ББК 22.161.1
С 78

Сташ А.Х.
Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-05, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

О счетных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной системы

(Рецензирована)

Аннотация

Доказано существование линейной двумерной неавтономной дифференциальной системы со счетным множеством существенных (и метрически, и топологически) значений полной и векторной частот.

Ключевые слова: *линейная дифференциальная система, колеблемость решений, число нулей, полная частота, векторная частота.*

Stash A.Kh.
Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-05, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

About calculating ranges of full and vector frequencies of the linear two-dimensional differential system

Abstract

Existence of linear two-dimensional nonautonomous differential system with a calculating set of essential (both metric and topological) values of full and vector frequencies is proved.

Keywords: *linear differential system, variability of solutions, number of zero, full frequency, vector frequency.*

Введение

Рассмотрим множество M^n линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x,\ \ x \in R^n,\ \ t \in R^+ \equiv [0,+\infty),$$

каждая из которых отождествляется со своей ограниченной непрерывной оператор-функцией $A:[0,+\infty) \to End\ R^n$. Множество всех ненулевых решений системы $A \in M^n$ обозначим через $S_*(A)$.

Определение 1 [1]**.** Для каждой системы $A \in M^n$, произвольного решения $x \in S_*(A)$, вектора $m \in R^n$ и момента $t > 0$ обозначим через $\nu(x,m,t)$ число нулей (возможно, бесконечное) скалярного произведения $(x(\tau),m)$ на промежутке $\tau \in (0,t]$, а полной и векторной частотами решения x назовем величины

$$\sigma(x) \equiv \inf_{m \in R^n} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\pi}{t} \nu(x,m,t), \quad \zeta(x) \equiv \overline{\lim_{t \to +\infty}} \inf_{m \in R^n} \frac{\pi}{t} \nu(x,m,t).$$

К определению 1 добавим обозначение $\nu(x,m,t_2,t_1) \equiv \nu(x,m,t_2) - \nu(x,m,t_1)$ числа нулей скалярного произведения $(x(\tau),m)$ на промежутке $\tau \in (t_1,t_2]$.

С каждой из частот ω, описанных в определении 1, и с каждой системой $A \in M^n$ можно связать функционал $\omega_A : S_*(A) \to [0,+\infty)$.

Определение 2. Спектром частоты ω_A системы $A\in M^n$ назовем область ее значений, а значение частоты ω, принадлежащее спектру системы A, назовем:

а) метрически существенным [2], если оно принимается на решениях $x\in S_*(A)$, множество наборов $x(0)\in R^n$ начальных значений которых содержит множество положительной меры Лебега в R^n;

б) метрически существенным [3], если оно принимается на решениях $x\in S_*(A)$, множество наборов $x(0)\in R^n$ начальных значений которых, пресеченное с некоторым открытым подмножеством $U\subset R^n$, служит дополнением в U к множеству первой категории Бэра.

Спектры полной и векторной частот автономных дифференциальных систем полностью исследованы [4, 5]. Основные результаты исследований спектров тех же частот неавтономных систем приведены в работах [6-9]. В частности, в [9] было установлено существование линейной однородной двумерной периодической системы, спектры полной и векторной частот которой содержат один и тот же конечный набор, состоящий из любого наперед заданного числа метрически и топологически существенных значений. В связи с этим возникает вопрос: существует ли линейная однородная двумерная система со счетным спектром метрически и топологически существенных значений полной или векторной частоты? Этому вопросу посвящена настоящая статья.

Основной результат

Теорема. Существует система $A\in M^2$, имеющая такую последовательность решений $x_1,x_2,\ldots,\in S_*(A)$, удовлетворяющая условиям

$$\sigma(x_i)=\zeta(x_i)=1-2^{-i},\quad i\in N,$$

причем все эти значения полной и векторной частот являются метрически и топологически существенными.

Данный результат был доложен на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в МГУ им. М.В. Ломоносова и анонсирован в докладе [7].

При доказательстве этой теоремы нам понадобится следующая лемма, справедливость которой непосредственно следует из доказательства леммы 5 [10]:

Лемма. Пусть последовательность положительных чисел $t_1<t_2<\ldots$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{k\to+\infty} t_k=+\infty,\quad \lim_{k\to+\infty}\frac{t_{k+1}}{t_k}=1.$$

Тогда для любого решения $x\in S_*(A)$ любой системы $A\in M^n$ справедливы равенства:

1) $$\sigma(x)\equiv\inf_{m\in R^n}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{\pi}{t_k}\nu(x,m,t_k),\quad \zeta(x)\equiv\overline{\lim_{k\to+\infty}}\inf_{m\in R^n}\frac{\pi}{t_k}\nu(x,m,t_k),\tag{1}$$

2) если последовательности $\{T_k\}$, $\{\nu_k\}$ неотрицательных чисел удовлетворяют условиям

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{T_k}{t_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\nu_k}{t_k}=0,$$

то после уменьшения в правых частях формул (1) каждого из чисел t_k в знаменателе дроби на T_k, а каждого из чисел $\nu(x,m,t_k)$ на ν_k значения этих правых частей не изменятся.

Доказательство теоремы.

1. При каждом $k\in N$ обозначим через $\Delta_k=2^{k+1}\pi$ и возьмем любую строго убы-

вающую последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, стремящуюся к нулю.

Зададим последовательность

$$t_0 \equiv 0, \quad t_1 \equiv \Delta_1, \quad t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_1, \qquad k \in N.$$

Начиная с некоторого номера k_1, всегда можно добиться, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_1}{t_k} < 1 + \varepsilon_1, \quad k \geq k_1.$$

Меняем элементы этой последовательности, начиная с некоторого номера k_2,

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_2, \qquad k \geq k_2,$$

так, чтобы

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_2}{t_k} < 1 + \varepsilon_2, \quad k \geq k_2.$$

Далее по индукции продолжаем менять полученную последовательность. Если для любого $i \in N$ построена последовательность, элементы которой, начиная с k_i номера, удовлетворяют условиям

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_i, \qquad k \geq k_i,$$

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_i}{t_k} < 1 + \varepsilon_i, \quad k \geq k_i,$$

то выбираем k_{i+1} так, чтобы при любом $k \geq k_{i+1}$ были выполнены условия

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_{i+1}, \qquad \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_{i+1}}{t_k} < 1 + \varepsilon_{i+1}.$$

В результате получим последовательность

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_{i(k)},$$

обладающую свойствами

$$\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty, \qquad \lim_{k\to+\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1.$$

2. Разобьем промежуток $[0, t_1]$, образованный первыми двумя элементами построенной в пункте 1 последовательности, точками

$$t_0^1 \equiv 2\pi, \quad t_1 \equiv t_0^1 + 2\pi$$

на части

$$[0, t_0^1], \quad [t_0^1, t_1].$$

Остальные промежутки $[t_k, t_{k+1}]$, образуемые соседними элементами этой последовательности с шагом Δ_1, также разбиваем на части

$$[t_k, t_k^1], \quad [t_k^1, t_{k+1}],$$

где $t_k^1 \equiv t_k + 2\pi, \quad t_{k+1} \equiv t_k^1 + 2\pi$.

Промежутки вида $[t_k, t_{k+1}]$, образуемые соседними элементами построенной последовательности с шагом Δ_2, разбиваем точками

$$t_k^1 \equiv t_k + 2^2\pi, \quad t_k^2 \equiv t_k^1 + 2\pi, \quad t_{k+1} \equiv t_k^2 + 2\pi,$$

на промежутке

$$[t_k, t_k^1], \ [t_k^1, t_k^2], \ [t_k^2, t_{k+1}].$$

Любые два соседних элемента (с номерами $k > k_3$) построенной последовательности связаны соотношением

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_i, \quad k_i \le k < k_{i+1}.$$

Промежутки вида $[t_k, t_{k+1}]$, образованные соседними элементами построенной последовательности с шагом Δ_i, с помощью точек

$$t_k^1 \equiv t_k + 2^i \pi, \quad t_k^2 \equiv t_k^1 + 2^{i-1}\pi, \quad t_k^3 \equiv t_k^2 + 2^{i-2}\pi, \ \ldots,$$

$$t_k^{i-1} \equiv t_k^{i-2} + 2^2\pi, \quad t_k^i \equiv t_k^{i-1} + 2\pi, \quad t_{k+1} \equiv t_k^i + 2\pi$$

разбиваем на $i+1$ частей:

$$[t_k, t_k^1], \ [t_k^1, t_k^2], \ [t_k^2, t_k^3], \ldots, [t_k^i, t_{k+1}] \qquad (2)$$

3. Зададим 2π периодическую непрерывно-дифференцируемую функцию $\psi(t)$, возрастающую на отрезке $[0, \pi]$, убывающую на участке $[\pi, 2\pi]$ и принимающую на концах отрезков значения

$$\psi(0) = \psi(2\pi) = 0, \ \ \psi(\pi) = \pi, \ \ \dot\psi(0) = \dot\psi(\pi) = \dot\psi(2\pi) = 0.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ и положительную строго убывающую последовательность $\{\delta_k\}$ так, чтобы

$$\frac{1}{6} > \varepsilon > \delta_k, \quad k \in N,$$

$$\frac{1}{4} < \varepsilon + \delta_k < \frac{1}{3}, \quad k \in N.$$

Для каждого $i \in N$ определим двумерные матрицы

$$X(t, \delta_i) = \left(x^1(t), x^2(t, \delta_i)\right),$$

где

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \cos((1-\varepsilon)\psi(t)) \\ \sin((1-\varepsilon)\psi(t)) \end{pmatrix}, \quad x^2(t, \delta_i) = \begin{pmatrix} -\sin((1+\delta_i)\psi(t)) \\ \cos((1+\delta_i)\psi(t)) \end{pmatrix}.$$

Так как при любом фиксированном $i \in N$

$$\det X(t, \delta_i) = \cos((\varepsilon + \delta_i)\psi(t)) \ge 1/2,$$

то матрица

$$X^{-1}(t, \delta_i) = \frac{1}{\cos((\varepsilon + \delta_i)\psi(t))} \begin{pmatrix} \cos((1+\delta_i)\psi(t)) & \sin((1+\delta_i)\psi(t)) \\ -\sin((1-\varepsilon)\psi(t)) & \cos((1-\varepsilon)\psi(t)) \end{pmatrix},$$

непрерывна и ограничена на R^+.

Известно, что фундаментальная матрица удовлетворяет исходному матричному уравнению

$$\dot X(t, \delta_i) = A_i(t) X(t, \delta_i),$$

а значит, без труда восстанавливается система

$$A_i(t) = \dot X(t, \delta_i) X^{-1}(t, \delta_i)$$

из пространства M^2.

4. Построим систему $A \in M^2$, фундаментальная система решений которой на каждом из промежутков (2) при любом фиксированном значении k будет совпадать с наперед выбранными вектор-функциями с положительными определителями Вронского,

подобно тому, как это делалось в пункте 3 настоящего доказательства:

– на участке $\left[t_k, t_k^1\right]$ – найдем систему, фундаментальная матрица $X(t, t_k, t_k^1)$ которой совпадает с $X(t, \delta_1)$;

– на участке $\left[t_k^1, t_k^2\right]$ – найдем систему, фундаментальная матрица $X\left(t, t_k^1, t_k^2\right)$ которой совпадает с $X(t, \delta_2)$;

– и т.д.;

– на участке $\left[t_k^{i-2}, t_k^{i-1}\right]$ – найдем систему, фундаментальная матрица $X\left(t, t_k^{i-2}, t_k^{i-1}\right)$ которой совпадает с матрицей $X(t, \delta_{i-1})$;

– на участке $\left[t_k^{i-1}, t_k^{i}\right]$ – найдем систему, фундаментальная матрица $X\left(t, t_k^{i-1}, t_k^{i}\right)$ которой совпадает с матрицей $X(t, \delta_i)$;

– на участке $\left[t_k^{i}, t_{k+1}\right]$ – найдем систему, фундаментальная матрица $X\left(t, t_k^{i}, t_{k+1}\right)$ которой совпадает с матрицей $X(t, \delta_{i+1})$.

Теперь на всем участке $\left[t_k, t_{k+1}\right]$ найдем систему, фундаментальная матрица

$$X\left(t, t_k, t_{k+1}\right) = \begin{cases} X\left(t, t_k, t_k^1\right), & t \in \left[t_k, t_k^1\right], \\ X\left(t, t_k^1, t_k^2\right), & t \in \left[t_k^1, t_k^2\right], \\ X\left(t, t_k^2, t_k^3\right), & t \in \left[t_k^2, t_k^3\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X\left(t, t_k^{i-1}, t_k^{i}\right), & t \in \left[t_k^{i-1}, t_k^{i}\right], \\ X\left(t, t_k^{i}, t_{k+1}\right), & t \in \left[t_k^{i}, t_{k+1}\right] \end{cases}$$

которой в точках стыка удовлетворяет равенствам

$$X\left(t_k^{j-1}, t_k^{j-2}, t_k^{j-1}\right) = X\left(t_k^{j-1}, t_k^{j-1}, t_k^{j}\right) = E, \quad j = 2,3,\ldots, i+1,$$

$$\dot{X}\left(t_k^{j-1}, t_k^{j-2}, t_k^{j-1}\right) = \dot{X}\left(t_k^{j-1}, t_k^{j-1}, t_k^{j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 2,3,\ldots, i+1,$$

где $t_k^0 \equiv t_k$, $t_k^{i+1} \equiv t_{k+1}$.

Повторяя эту процедуру построения на каждом промежутке вида $\left[t_k, t_{k+1}\right]$ при любом $k \in N$, получим на R^+ непрерывно-дифференцируемую фундаментальную матрицу

$$X(t) = \begin{cases} X\left(t, 0, t_1\right), & t \in \left[0, t_1\right], \\ X\left(t, t_1, t_2\right), & t \in \left[t_1, t_2\right], \\ X\left(t, t_2, t_3\right), & t \in \left[t_2, t_3\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X\left(t, t_k, t_{k+1}\right), & t \in \left[t_k, t_{k+1}\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

так как выполняются равенства

$$X\left(t_k, t_{k-1}, t_k\right) = X\left(t_k, t_k, t_{k+1}\right) = E, \quad \forall k \in N,$$

$$\dot{X}\left(t_k, t_{k-1}, t_k\right) = \dot{X}\left(t_k, t_k, t_{k+1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall k \in N,$$

а значит, коэффициенты восстановленной двумерной системы A на R^+ являются непрерывными и ограниченными.

5. При любом $j \in N$ выберем из множества $S_*(A)$ решение

$$y^j = c_1^j x^1 + c_2^j x^2,\ c_1^j, c_2^j > 0,$$

обладающее свойством

$$y^j\left(t_{k_j}^{j-1}\right) = -w \cdot y^j\left(t_{k_j}^{j-1} + \pi\right),\quad w > 0, \tag{3}$$

где t_{k_j} – элемент построенной последовательности, с которого начинается шаг Δ_j, а $t_{k_j}^{j-1}$ – левый конец j-го промежутка в разбиении отрезка $\left[t_{k_j}, t_{k_j+1}\right]$ на составляющие (при $j = 1$ имеем $t_{k_j}^{j-1} = 0$).

Для выбранных решений определим величины

$$\chi_k\left(y^j\right) \equiv \frac{\nu\left(y^j, m^j, t_k^1, t_k\right) + \nu\left(y^j, m^j, t_k^2, t_k^1\right) + \dots + \nu\left(y^j, m^j, t_{k+1}, t_k^{i(k)}\right)}{2^{i(k)+1}} =$$

$$= \inf_{m \in R^2} \frac{\nu\left(y^j, m, t_k^1, t_k\right) + \nu\left(y^j, m, t_k^2, t_k^1\right) + \dots + \nu\left(y^j, m, t_{k+1}, t_k^{i(k)}\right)}{2^{i(k)+1}},$$

где $j \le i(k)$, а $i(k)$ совпадает с номером шага между t_k и t_{k+1}.

Каждое решение $y \in S_*(A)$ на любом участке длины π не может совершить поворот более чем на $(1+\delta_1)\cdot 180^0 < 270^0$, поэтому это решение может быть ортогональным любому ненулевому двумерному вектору m не более чем два раза. Следовательно, функция (y, m) на любом конечном участке $(0, t]$ может иметь только конечное число нулей, т.е.

$$\nu(y, m, t, 0) < +\infty. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение функцию φ, которая каждому ненулевому двумерному вектору ставит в соответствие угол между этим вектором и положительным направлением оси ox_1, отсчитываемым против часовой стрелки.

Зафиксируем произвольные значения $j, k \in N$. Решение $y^j \in S_*(A)$ на участке $(t_k, t_k + 2\pi]$ за промежуток времени π совершает поворот на определенный угол

$$\varphi_0\left(y^j\right) = \varphi\left(y^j(t_k + \pi)\right) - \varphi\left(y^j(t_k)\right)$$

против часовой стрелки и за такое же время успевает занять исходное направление

$$y^j(r_s) = \left(c_1^j, c_2^j\right), \tag{5}$$

где $r_s = 2(s-1)\pi,\quad s \in N$.

На промежутках

$$\left(t_k + 2\pi,\ t_k + 4\pi\right], \left(t_k + 4\pi,\ t_k + 6\pi\right], \dots, \left(t_k^1 - 2\pi,\ t_k^1\right] \tag{6}$$

решение y^j ведет себя точно так же.

На промежутке $\left(t_k^1, t_k^1 + 2\pi\right]$ за время π поворачивается на угол

$$\varphi_1\left(y^j\right) = \varphi\left(y^j(t_k^1 + \pi)\right) - \varphi\left(y^j(t_k^1)\right),$$

а затем, возвращаясь по часовой стрелке, занимает исходное направление (5). На промежутках

$$\left(t_k^1 + 2\pi,\ t_k^1 + 4\pi\right], \left(t_k^1 + 4\pi,\ t_k^1 + 6\pi\right], \dots, \left(t_k^2 - 2\pi,\ t_k^2\right]$$

все полностью повторяется.

На следующих промежутках

$$\left(t_k^2,\ t_k^3\right] = \left(t_k^2,\ t_k^2+2\pi\right] \cup \left(t_k^2+2\pi,\ t_k^2+4\pi\right] \cup \ldots \cup \left(t_k^3-2\pi,\ t_k^3\right],$$
$$\left(t_k^3,\ t_k^4\right] = \left(t_k^3,\ t_k^3+2\pi\right] \cup \left(t_k^3+2\pi,\ t_k^3+4\pi\right] \cup \ldots \cup \left(t_k^4-2\pi,\ t_k^4\right],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\left(t_k^i,\ t_{k+1}\right] = \left(t_k^i,\ t_k^i+2\pi\right] \cup \left(t_k^i+2\pi,\ t_k^i+4\pi\right] \cup \ldots \cup \left(t_{k+1}-2\pi,\ t_{k+1}\right]$$

все повторяется, но с каждым разом, при переходе с одного промежутка на другой, угол поворота решения y^j за время π уменьшается, т.е. выполнены неравенства

$$\varphi_0(y^j) > \varphi_1(y^j) > \ldots > \varphi_{i-1}(y^j) > \varphi_{i-1}(y^j), \tag{7}$$

где

$$\varphi_2\left(y^j\right) = \varphi\left(y^j\left(t_k^2+\pi\right)\right) - \varphi\left(y^j\left(t_k^2\right)\right), \ldots, \varphi_i\left(y^j\right) = \varphi\left(y^j\left(t_k^i+\pi\right)\right) - \varphi\left(y^j\left(t_k^i\right)\right)$$

(i совпадает с номером шага между t_k и t_{k+1}), откуда следует справедливость неравенств

$$\varphi\left(y^1(0)\right) < \varphi\left(y^2(0)\right) < \ldots < \varphi\left(y^j(0)\right) < \ldots < \varphi\left(x^2(0)\right).$$

Таким образом, при подсчете числа нулей функции $\left(y^j, m\right)$ при любом $m \in R^2$ на промежутке $\left(t_k, t_{k+1}\right]$ достаточно знать поведение решения y^j на участках

$$\left(t_k,\ t_k+\pi\right], \left(t_k^1,\ t_k^1+\pi\right], \ldots, \left(t_k^i,\ t_k^i+\pi\right]. \tag{8}$$

6. В силу (3), (7) решение $y^1 \in S_*(A)$ при любом фиксированном значении $k \in N$ на участках (8) удовлетворяет соотношениям

$$\varphi\left(y^1(t_k+\pi)\right) - \varphi\left(y^1(t_k)\right) = 180^0,$$
$$\varphi\left(y^1\left(t_k^1+\pi\right)\right) - \varphi\left(y^1\left(t_k^1\right)\right) < 180^0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\varphi\left(y^1\left(t_k^i+\pi\right)\right) - \varphi\left(y^1\left(t_k^i\right)\right) < 180^0.$$

Поэтому если решение y^1 на $\left(t_k^1,\ t_k^2\right]$ ни разу не было ортогональным некоторому вектору m^1, то подавно и на промежутках

$$\left(t_k^2,\ t_k^3\right], \left(t_k^3,\ t_k^4\right], \ldots, \left(t_k^i,\ t_{k+1}\right]$$

это решение также ни разу не будет ортогонально этому вектору. Выбранному вектору m^1 решение y^1 на промежутке $\left(t_k,\ t_k+\pi\right]$ ровно один раз будет ортогональным, поэтому

$$\inf_{m\in R^2} \nu\left(y^1, m, t_{k+1}, t_k\right) = \nu\left(y^1, m^1, t_{k+1}, t_k\right) = 2^{i(k)}, \quad k \in N.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\chi_k\left(y^1\right) \equiv \frac{2^{i(k)}}{2^{i(k)+1}} = 2^{-1}, \quad \forall k \in N.$$

При любом фиксированном $k \ge k_2$ на промежутках (8) решение $y^2 \in S_*(A)$ в силу (3), (7) удовлетворяет соотношениям

$$270^0 > \varphi\left(y^2(t_k+\pi)\right) - \varphi\left(y^2(t_k)\right) > 180^0,$$
$$\varphi\left(y^2\left(t_k^1+\pi\right)\right) - \varphi\left(y^2\left(t_k^1\right)\right) = 180^0,$$
$$\varphi\left(y^2\left(t_k^2+\pi\right)\right) - \varphi\left(y^2\left(t_k^2\right)\right) < 180^0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\varphi\left(y^2\left(t_k^i+\pi\right)\right) - \varphi\left(y^2\left(t_k^i\right)\right) < 180^0.$$

Поэтому для обеспечения минимального количества нулей функции (y^2, m) на промежутках

$$\left(t_k^3,\ t_k^4\right],\left(t_k^4,\ t_k^5\right],\ldots,\left(t_k^i,\ t_{k+1}\right]$$

достаточно выбрать вектор m^2 так, чтобы решение y^2 на промежутке $\left(t_k^2,\ t_k^3\right]$ ни разу не было ортогональным этому вектору.

На каждом из промежутков $(t_k,\ t_k+\pi]$, $\left(t_k^1,\ t_k^1+\pi\right]$ решение y^2 будет ортогональным вектору m^2 один раз, а значит,

$$\inf_{m\in R^2}\nu\left(y^2, m, t_{k+1}, t_k\right)=\nu\left(y^2, m^2, t_{k+1}, t_k\right)=3\cdot 2^{i(k)-1},\quad k\geq k_2,$$

поэтому

$$\chi_k\left(y^2\right)\equiv\frac{3\cdot 2^{i(k)-1}}{2^{i(k)+1}}=\frac{3}{4},\ \ \forall k\geq k_2 .$$

Начиная с первого момента k_q появления шага Δ_q при любом фиксированном $k\geq k_q$ на участках (8) решение $y^q\in S_*(A)$ в силу (3), (7) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered}
270^0>\varphi\left(y^q(t_k+\pi)\right)-\varphi\left(y^q(t_k)\right)>180^0,\\
\varphi\left(y^q\left(t_k^1+\pi\right)\right)-\varphi\left(y^q\left(t_k^1\right)\right)>180^0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi\left(y^q\left(t_k^{q-2}+\pi\right)\right)-\varphi\left(y^q\left(t_k^{q-2}\right)\right)>180^0,\\
\varphi\left(y^q\left(t_k^{q-1}+\pi\right)\right)-\varphi\left(y^q\left(t_k^{q-1}\right)\right)=180^0,\\
\varphi\left(y^q\left(t_k^{q}+\pi\right)\right)-\varphi\left(y^q\left(t_k^{q}\right)\right)<180^0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi\left(y^q\left(t_k^{i}+\pi\right)\right)-\varphi\left(y^q\left(t_k^{i}\right)\right)<180^0.
\end{gathered}$$

Поэтому, выбрав вектор m^q таким, чтобы решение y^q ни разу не было ортогональным этому вектору на промежутке $\left(t_k^q,\ t_k^{q+1}\right]$, обеспечим на промежутках

$$\left(t_k^{q+1},\ t_k^{q+2}\right],\left(t_k^{q+2},\ t_k^{q+3}\right],\ldots,\left(t_k^i,\ t_{k+1}\right]$$

минимальное количество нулей функции (y^q, m) при $m=m^q$. Выбранному вектору решение y^q будет ортогональным один раз на каждом из промежутков

$$(t_k,\ t_k+\pi],\left(t_k^1,\ t_k^1+\pi\right],\ldots,\left(t_k^{q-1},\ t_k^{q-1}+\pi\right],$$

следовательно,

$$\inf_{m\in R^2}\nu\left(y^q, m, t_{k+1}, t_k\right)=\nu\left(y^q, m^q, t_{k+1}, t_k\right)=\left(2^q-1\right)\cdot 2^{i(k)-q+1},\quad k\geq k_q,$$

откуда следует

$$\chi_k\left(y^q\right)\equiv\frac{\left(2^q-1\right)\cdot 2^{i(k)-q+1}}{2^{i(k)+1}}=1-2^{-q},\ \ k\geq k_q. \tag{9}$$

7. При вычислении нижних векторных частот любого выбранного решения y^q будем пользоваться леммой, согласно которой (см. (4)) можно не учитывать полуинтервал $\left(0,\ t_{k_q}\right]$ (т.е. не учитывать его вклад ни в длину промежутка, на котором подсчитывается число нулей решения, ни в само это число). Следовательно, при любом $q\in N$ для решения y^q, с учетом равенств (9), получим:

$$\zeta(y^q) \equiv \overline{\lim_{p\to+\infty}} \inf_{m\in R^2} \frac{\pi}{t_p} \nu\left(y^q, m, t_p\right) = \overline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{\pi}{t_p} \nu\left(y^q, m^q, t_p\right) =$$

$$= \overline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{\pi\nu\left(y^q, m^q, t_{k_q}\right) + \pi\sum_{i=k_q}^{p}\left(\nu\left(y^q, m^q, t_{i+1}, t_i\right)\right)}{t_{p+1}} = \overline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{\pi\sum_{i=k_q}^{p}\left(\nu\left(y^q, m^q, t_{i+1}, t_i\right)\right)}{t_{p+1} - t_{k_q}} =$$

$$= \overline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{\pi\sum_{i=k_q}^{p}\left(\nu\left(y^q, m^q, t_i^1, t_i\right) + \nu\left(y^q, m^q, t_i^2, t_i^1\right) + \cdots + \nu\left(y^q, m^q, t_{i+1}, t_i^{j(i)}\right)\right)}{\pi\left(2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \cdots + 2^{j(p)+1}\right)} =$$

$$= \overline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{\pi\left(2^{j(k_q)+1}\chi_{k_q}\left(y^q\right) + 2^{j(k_q+1)+1}\chi_{k_q+1}\left(y^q\right) + \cdots + 2^{j(p)+1}\chi_p\left(y^q\right)\right)}{\pi\left(2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \cdots + 2^{j(p)+1}\right)} =$$

$$= \overline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{\left(1-2^{-q}\right)\left(2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \cdots + 2^{j(p)+1}\right)}{2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \cdots + 2^{j(p)+1}} = 1 - 2^{-q},$$

где $j(i)$ совпадает с номером шага между t_i и t_{i+1}.

Для полной частоты решения y^q имеем следующую оценку:

$$\sigma\left(y^q\right) = \inf_{m\in R^2} \overline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{\pi}{t_p} \nu\left(y^q, m, t_p\right) \le \overline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{\pi}{t_p} \nu\left(y^q, m^q, t_p\right) = 1 - 2^{-q}.$$

Из определений частот следует, что для любого решения $y \in S_*(A)$ имеет место неравенство $\zeta(y) \le \sigma(y)$, на основании которого окончательно получаем

$$\sigma\left(y^q\right) = \zeta\left(y^q\right) = 1 - 2^{-q}, \quad q \in N. \tag{10}$$

8. Для каждого $q \in N$ произвольное решение $z \in S_*(A)$ с начальными условиями

$$\varphi(z(0)) \in \left[\varphi(y^q(0)), \varphi(y^{q+1}(0))\right)$$

при любом фиксированном $k \ge k_q$ удовлетворяет соотношениям:

$$270^0 > \varphi\left(z(t_k + \pi)\right) - \varphi\left(z(t_k)\right) > 180^0,$$
$$\varphi\left(z\left(t_k^1 + \pi\right)\right) - \varphi\left(z\left(t_k^1\right)\right) > 180^0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\varphi\left(z\left(t_k^{q-2} + \pi\right)\right) - \varphi\left(z\left(t_k^{q-2}\right)\right) > 180^0,$$
$$\varphi\left(z\left(t_k^{q-1} + \pi\right)\right) - \varphi\left(z\left(t_k^{q-1}\right)\right) > 180^0,$$
$$\varphi\left(z\left(t_k^{q} + \pi\right)\right) - \varphi\left(z\left(t_k^{q}\right)\right) < 180^0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\varphi\left(z\left(t_k^{i} + \pi\right)\right) - \varphi\left(z\left(t_k^{i}\right)\right) < 180^0.$$

Поэтому, на основании пункта 7 настоящего доказательства, для решения $z \in S_*(A)$ выполняются равенства

$$\sigma(z) = \zeta(z) = 1 - 2^{-q}, \quad q \in N.$$

Следовательно, значения, задаваемые равенствами (10), являются существенными и метрически, и топологически.

Теорема полностью доказана.

Замечание. Доказанная теорема остается в силе и после замены верхнего предела в определениях полной и векторной частот на нижний предел.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

Примечания:

1. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 6. С. 908.
2. Сергеев И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1661-1662.
3. Сергеев И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1567-1568.
4. Сергеев И.Н. Сравнение полных частот и показателей блуждаемости решений линейной системы // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 11. С. 1667-1668.
5. Бурлаков Д.С., Цой С.В. Равенство полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Дифференциальные уравнения 2011. Т. 47, № 11. С. 1662-1663.
6. Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот двумерных линейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 6. С. 807-808.
7. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот решений двумерных линейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1497-1498.
8. Сташ А.Х. О разрывности крайних частот на множестве линейных двумерных дифференциальных систем // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2013. Вып. 4 (125). С. 25-31. URL: http://vestnik.adygnet.ru
9. Сташ А.Х. О конечных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной периодической системы // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2014. Вып. 1 (133). С. 30-36. URL: http://vestnik.adygnet.ru
10. Сергеев И.Н.Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249-294.

References:

1. Sergeev I.N. Determination of full frequencies of solutions of a linear system // Differential equations. 2009. Vol. 45, No. 6. P. 908.
2. Sergeev I.N. Metricaally typical and essential values of indices of linear systems // Differential equations. 2011. Vol. 47, No. 11. P. 1661-1662.
3. Sergeev I.N. Topologically typical and essential values of indices of linear systems // Differential equations. 2012. Vol. 48, No. 11. P. 1567-1568.
4. Sergeev I.N. Comparison of full frequencies and indices of roaming of solutions of a linear system // Differential equations. 2010. Vol. 46, No. 11. P. 1667-1668.
5. Burlakov D.S., Tsoy S.V. Equality of full and vector frequencies of solutions of linear autonomous system // Differential equations. 2011. Vol. 47, No. 11. P. 1662-1663.
6. Stash A.Kh. Spectra of full and vector frequencies of two-dimensional linear differential systems // Differential equations. 2013. Vol. 49, No. 6. P. 807-808.
7. Stash A.Kh. Properties of full and vector frequencies of solutions of two-dimensional linear differential systems // Differential equations. 2013. Vol. 49, No. 11. P. 1497-1498.
8. Stash A.Kh. On discontinuity of extreme frequencies on a set of the linear two-dimensional differential systems // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2013. Iss. 4 (125). P. 25-31. URL: http://vestnik.adygnet.ru
9. Stash A.Kh. On finite spectra of full and vector frequencies of linear two-dimensional differential periodic system // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2014. Iss. 1 (133). P. 30-36. URL: http://vestnik.adygnet.ru
10. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of the linear equation // Works of Seminar of I.G. Petrovsky. 2006. Iss. 25. P. 249-294.