

УДК 517.958:532.5

ББК 22.161.68

С 77

Стародумов И.О.*Аспирант кафедры математической физики института математики и компьютерных наук Уральского федерального университета, Екатеринбург, e-mail: ilyastarodumov@yahoo.ca***Кинематическое уравнение Сен-Венана. Метод решения***(Рецензирована)***Аннотация**

Рассматриваются одномерная дифференциальная модель Сен-Венана и ее кинематическое приближение, описывающие свободное движение воды в открытом русле. Для кинематического приближения, являющегося квазилинейным уравнением первого порядка, в стационарном случае существует общее аналитическое решение; для нестационарного случая потребовалось разработать алгоритм поиска численного решения. В работе приводятся результаты решения тестовых задач.

Ключевые слова: гидравлика, уравнение Сен-Венана, кинематическое приближение, численное решение.

Starodumov I.O.*Post-graduate student of Mathematic Physics Department of Institute of Mathematics and Computer Sciences, Ural Federal University, Ekaterinburg, e-mail: ilyastarodumov@yahoo.ca***The kinematic Saint-Venant equation. The solution method****Abstract**

The paper examines one-dimensional differential Saint-Venant model represented with diffusion and kinematic approximation, describing free water dynamic in open bed. For the kinematic approximation, which is a quasi-linear equation of the first order, there is a general analytical solution in stationary case. For the non-stationary case we developed a numerical algorithm. In the paper, the solution results are presented.

Keywords: hydraulics, the Saint-Venant equation, kinematic approximation, numeric method.

В работах [1, 2] для моделирования гидравлического режима североамериканской Красной реки* вполне успешно применялась программа MIKE 11, разработанная Датским Гидродинамическим Институтом [<http://www.dhisoftware.com>]. В модуле MIKE 11 для расчета неустановившегося водного потока решается краевая задача для одномерной системы дифференциальных уравнений Сен-Венана в полном, диффузионном и кинематическом приближении.

Обратимся к модели Сен-Венана для течения воды в открытом русле [2, 3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial h}{\partial x} + S_f \right) = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь x – протяженность по водотоку; t – время; $A(x, t)$ – площадь живого сечения; $Q(x, t)$ – расход воды; $q(x, t)$ – внешний источник, отнесенный к единице длины водотока; g – гравитационное ускорение; $h(x, t)$ – глубина; $S_f(x, t)$ – уклон трения потока.

Глубина и уклон русла определяются следующим образом (см. рис. 1):

$$h = z - z_b, \quad (3)$$

где z – высота уровня свободной поверхности (зеркала); z_b – высота русла.

* Не путать с рекой Хонгха (Вьетнам, Китай), название которой также переводится как Красная река.

$$S_0 = -\frac{\partial z_b}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$



Рис. 1. Параметры водного потока

С учетом (3), (4) уравнение движения (2) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial z}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0. \quad (5)$$

Для расчета величины уклона трения потока на практике, как правило, используют формулу [1]:

$$S_f = \frac{Q|Q|}{A^2 C^2 R}, \quad (6)$$

где R – гидравлический радиус, равный отношению площади живого сечения A к смоченному периметру χ этого сечения; C – коэффициент Шези, зависящий главным образом от шероховатости русла n . Часто для определения коэффициента Шези пользуются формулой Маннинга [1, 4]:

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}. \quad (7)$$

Будем считать пренебрежимо малыми и отбросим в уравнении (5) три первых члена. Тогда $S_0 = S_f$ и (6) равносильна формуле закона Шези для стационарного потока

$$\frac{Q}{A} = C \sqrt{|S_0|} R \operatorname{sgn}(S_0). \quad (8)$$

Выразим Q из (8) и подставим полученное выражение в балансовое уравнение (1). Вновь полагая $A = wh$, $R = h$, получим кинематическое волновое уравнение

$$\frac{\partial(wh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{|S_0|}}{n} wh^{5/3} \right) \operatorname{sgn}(S_0) = q. \quad (9)$$

Уравнение (9) суть квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка:

$$K_1(x, t, h) \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} + K_2(x, t, h) \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = K_3(x, t, h). \quad (10)$$

В стационарном случае (9) – это обыкновенное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{|S_0|}}{n} wh^{5/3} \right) = q, \quad (11)$$

частное решение которого, удовлетворяющее условию $h(x)|_{x=x_{left}} = \tilde{h}$, имеет вид (см. рис. 2, 3):

$$h = \left(\frac{n}{\sqrt{S_0 w}} \left(\int q dx + \left(\tilde{h}^{5/3} \frac{\sqrt{S_0 w}}{n} - \int q dx \right) \Big|_{x=x_{left}} \right) \right)^{3/5} \quad (12)$$

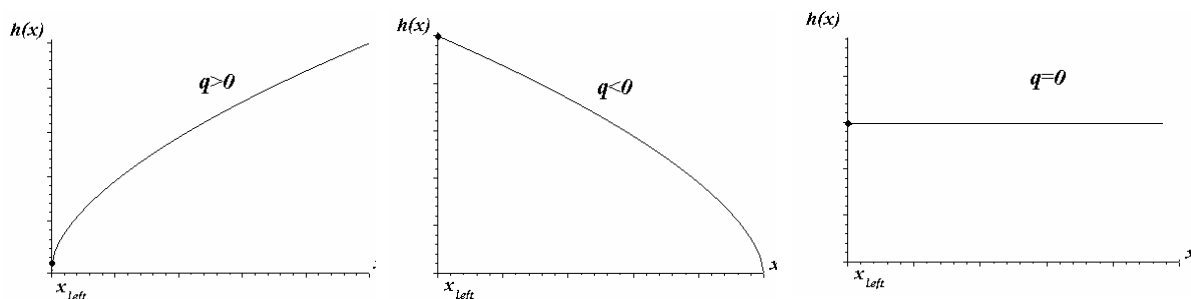


Рис. 2. Характер $h(x)$ в зависимости от знака q при постоянных w, n, S_0, q

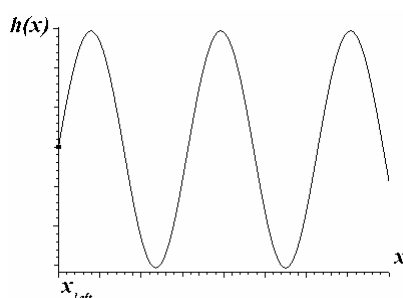


Рис. 3. Характер $h(x)$ при постоянных w, S_0 , нулевом q и $n(x) = a + b \sin(x)$

Нестационарный случай. Будем полагать, что величины w, n, S_0, q в (9) зависят только от пространственной переменной x и не зависят от времени t , кроме того, будем считать ширину w , шероховатость n и уклон S_0 всюду положительными. В этом случае

$$K_1 = \frac{5 \sqrt{S_0 w}}{3 n} h^{2/3}, \quad K_2 = w, \quad K_3 = q - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial S_0}{\partial x} - \frac{S_0}{n} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{S_0}{w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{w}{\sqrt{S_0 n}} h^{5/3}. \quad (13)$$

Задача 1.

$x_{left} = 0, \quad x_{right} \rightarrow \infty, \quad w(x) = S_0(x) = 1, \quad n(x) = 5/3,$
 $q(x) = 0, \quad h(x, 0) = 4 - \sin(x), \quad h(0, t) = 4 + \sin(t).$

Уравнение (9): $\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + h(x, t)^{2/3} \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = 0.$

Интегральная поверхность показана на рисунке 4.

Задача 2.

$x_{left} = 0, \quad x_{right} \rightarrow \infty, \quad w, S_0, n - \text{константы}, \quad q \equiv 0,$
 $h(0, t) = h_1$ при $t > 0, \quad h(x, 0) = h_2$ при $x > 0.$

Уравнение (9): $w \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + \left(\frac{5 w \sqrt{S_0}}{3 n} \right) h(x, t)^{2/3} \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = 0.$

Аналитическое решение:

$$t = \begin{cases} \frac{3}{5} h_1^{-2/3} \frac{n}{\sqrt{S_0}} x + s, & s > 0 \\ \frac{3}{5} h_2^{-2/3} \frac{n}{\sqrt{S_0}} (x + s), & s < 0 \end{cases} \quad (14)$$

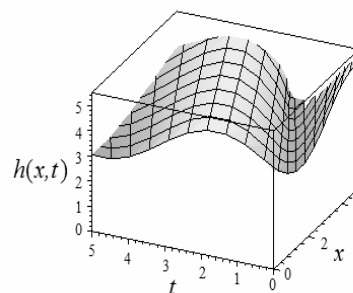


Рис. 4

При $s=0$ вслед за h функция t терпит разрыв, скачком изменяясь на величину $\Delta t = \frac{3}{5} \frac{n}{\sqrt{S_0}} x (h_1^{-2/3} - h_2^{-2/3})$. Данное обстоятельство приводит к появлению в первом квадранте плоскости $\{(x,t)\}$ центрального угла (сектора), внутри которого обратная функция $s(x,t)$ и, как следствие, функция $h(x,t)$ либо не определены, либо неоднозначны (см. рис. 5).

Поскольку функция $h(x,t)$ имеет конкретный физический смысл – глубина, в указанном секторе ее естественно определить однозначно. Функцию $s(x,t)$ можно доопределить в секторе по непрерывности значением 0, в таком случае функцию $h(x,t)$ в секторе можно считать постоянной и равной $h(0)=h_0$. Выбрать константу h_0 , по-видимому, лучше всего из соответствующего условия баланса.

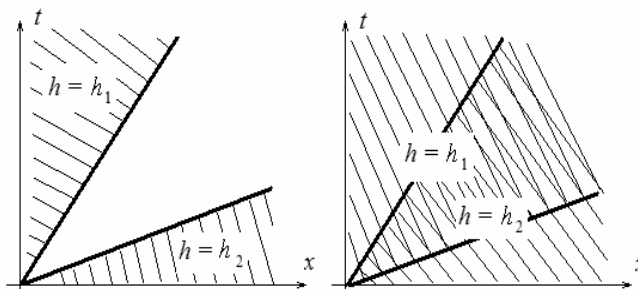


Рис. 5. Решение системы (14)

Представим линейный участок реки в виде цепочки из открытых резервуаров для воды со свободной поверхностью, испытывающей всюду одинаковое атмосферное давление (см. рис. 6). Каждый резервуар i имеет конечную длину Δx_i , он изготовлен из непроницаемого материала, у него достаточно высокие гладкие вертикальные стенки и прямоугольное (w_i) , всюду одинаково шероховатое (n_i) дно, имеющее нулевой крен и небольшой положительный уклон (S_{0i}) . В каждом резервуаре есть два входных отверстия в левой стенке – через них в резервуар вода закачивается, а также одно выходное отверстие в правой стенке – через него из резервуара вода откачивается. Выход любого резервуара i , кроме последнего, через емкость-накопитель соединен с одним из входов (на рис. 6 он верхний) резервуара $i+1$, насос, установленный между этими резервуарами, может перекачивать воду из i -го резервуара в накопитель, а также из накопителя в $i+1$ -ый резервуар в любом заданном режиме.

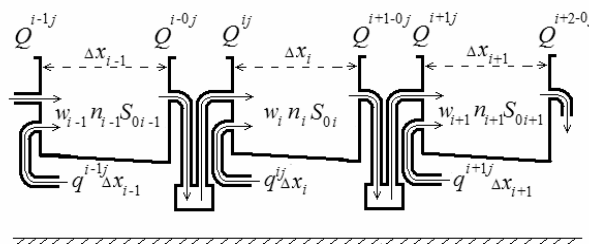


Рис. 6. Цепочка резервуаров

Режимы работы насосов: насоса, закачивающего воду через верхний вход первого резервуара; насосов, перекачивающих воду через емкости-накопители; насосов, закачивающих воду в резервуары через их нижние входы, а также насоса, откачивающего воду из последнего резервуара, – согласуем в предположении, что для любого резервуара i справедливы условия задачи 2, то есть:

1. Движение воды в резервуаре описывается уравнением (9) и формулами (7), (8);
2. На момент времени t_j резервуар i наполнен до уровня ${}^{ij}h$. Для этого достаточно, чтобы до момента t_j в точке x_i (у левой стенки) долгое время выполнялось условие

$Q^{ij-0} + q^{ij-0} \Delta x_i = \left({}^{ij}h \right)^{5/3} \frac{w_i \sqrt{S_{0i}}}{n_i}$, где $Q^{ij-0} + q^{ij-0} \Delta x_i$ – константа интенсивности притока (расхода) воды в резервуар i вплоть до момента t_j , а в точке $x_i + \Delta x_i$ (у правой стенки) было обеспечено условие свободного распространения (вода свободно стекает в накопитель);

3. С момента времени $t_j + 0$ и до момента $t_j + \Delta t_j$ в резервуар i закачивается вода, при этом насосы работают так, что в течение времени Δt_j в точке x_i глубина воды остается постоянной, равной h^{ij} . Значение h^{ij} можно найти из соотношения $Q^{ij} + q^{ij} \Delta x_i = (h^{ij})^{5/3} \frac{w_i \sqrt{S_{0i}}}{n_i}$, где $Q^{ij} + q^{ij} \Delta x_i$ – константа интенсивности притока воды в резервуар i с момента времени $t_j + 0$ и до момента $t_j + \Delta t_j$. В точке $x_i + \Delta x_i$ все это время обеспечивается условие свободного распространения, которому соответствует отток воды в накопитель с интенсивностью $Q^{i+1-0j}(t) = h(x_i + \Delta x_i, t)^{5/3} \frac{w_i \sqrt{S_{0i}}}{n_i}$;

4. Отыскав функцию $h(x, t)$ – решение задачи 2 для $\{x_i \leq x \leq x_i + \Delta x_i; t_j < t \leq t_j + \Delta t_j\}$, можно найти $Q^{i+1j} = \frac{1}{\Delta t_j} \int_{t_j}^{t_j + \Delta t_j} Q^{i+1-0j}(t) dt = \frac{1}{\Delta t_j} \frac{w_i \sqrt{S_{0i}}}{n_i} \int_{t_j}^{t_j + \Delta t_j} h(x_i + \Delta x_i, t)^{5/3} dt$ – среднее по времени значение расхода у правой стенки резервуара i . С этим постоянным расходом воды через верхний вход мы будем искать решение задачи 2 для резервуара $i+1$. Добавив к Q^{i+1j} постоянную величину $q^{i+1j} \Delta x_{i+1} = \frac{1}{\Delta t_j} \int_{x_{i+1}}^{x_i + \Delta x_i} \int_{t_j}^{t_j + \Delta t_j} q(x, t) dt dx$ – расход от независимого источника, мы получим общую интенсивность притока (расхода) воды в резервуар $i+1$ на промежутке с $t_j + 0$ по $t_j + \Delta t_j$. Повторим пп. 3, 4 для резервуара $i+1$. Подобным образом на промежутке времени с $t_j + 0$ по $t_j + \Delta t_j$ можно решить задачу 2 для всех резервуаров, то есть для всего участка реки;

5. Зная функцию $h(x, t)$, можно найти $\bar{h}^{i+1} = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} h(x, t_{j+1}) dx$ – ее среднее в пределах любого резервуара i значение на момент t_{j+1} , соответствующее установившемуся режиму, подобно описанному в п. 2. Мы пришли к ситуации для t_{j+1} , аналогичной ситуации на момент t_j ... Таким образом, повторяя пп. 3-5, можно определить гидравлическое состояние реки на любой сколь угодно большой момент времени.

Прямоугольную область D изменения независимых переменных x и t покроем счетной сеткой, равномерной как по x , так и по t . Каждую ячейку сетки будем идентифицировать индексами ее левого нижнего узла: i – индекс по x и j – индекс по t ; количество интервалов по x будем считать равным I , количество интервалов по t равным J ; положение узла сетки в D будем задавать его пространственной координатой x_i , $i \in \{0, 1, \dots, I\}$ и его временной координатой t_j , $j \in \{0, 1, \dots, J\}$.

В пределах ячейки (i, j) , $i \in \{0, 1, \dots, I-1\}$, $j \in \{0, 1, \dots, J-1\}$, нижнее ребро будем называть ребром с индексом i , верхнее – ребром с индексом $i+1-0$, левое – ребром с индексом j , правое – ребром с индексом $j+1-0$. Длина горизонтальных ребер ячейки равна $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и не зависит от i , длина вертикальных ребер равна $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ и не зависит от j .

Будем считать исходные данные $w(x, t)$, $n(x, t)$, $S_0(x, t)$ положительными и постоянными внутри любой ячейки (i, j) функциями, то есть кусочно-постоянными функциями в пределах области D . Значения w , n и S_0 внутри ячейки (i, j) будем обозначать w_i , n_i и S_{0i} . Внешний источник $q(x, t)$ будем считать сосредоточенным на верти-

кальных ребрах ячеек, так что $q(x,t) = \begin{cases} 0, & x \neq x_i \\ q^{ij}(t), & x = x_i \end{cases}$, где $q^{ij}(t)$ – кусочно-постоянная функция, принимающая постоянные значения q^{ij} на интервале $t_j < t < t_{j+1}$.

Рассмотрим отдельную ячейку. Будем считать глубину $h(x,t)$ на вертикальном ребре j известной константой $h^{ij} > 0$, а на горизонтальном ребре i известной константой ${}^i h > 0$. В ситуации $h^{ij} = {}^i h$ внутри ячейки и на ребрах $i+1-0, j+1-0$ выполняется $h = h^{ij} = {}^i h$. В ситуации же $h^{ij} \neq {}^i h$ возможны три случая (см. рис. 7):

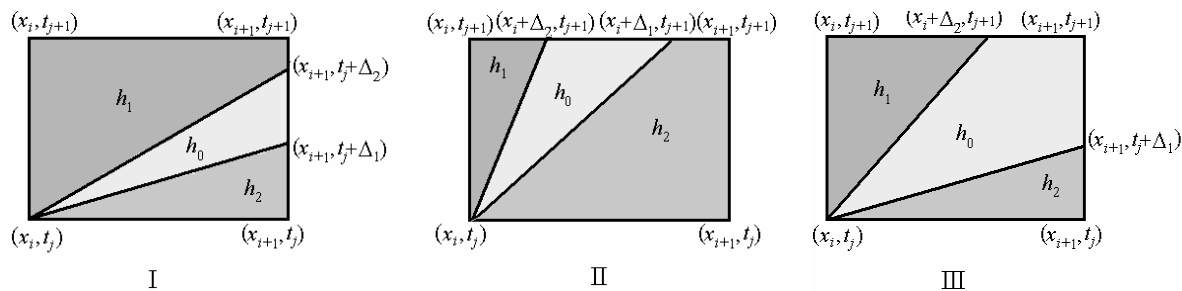


Рис. 7. Случаи изменения глубины в пределах ячейки расчетной сетки

Тестовые задачи

Ниже приведены графики численных решений тестовых задач. Все задачи решались для цепочки из 10 резервуаров длиной 665 единиц.

1. Задачи с условиями, согласованными с рисунками 2 и 3:

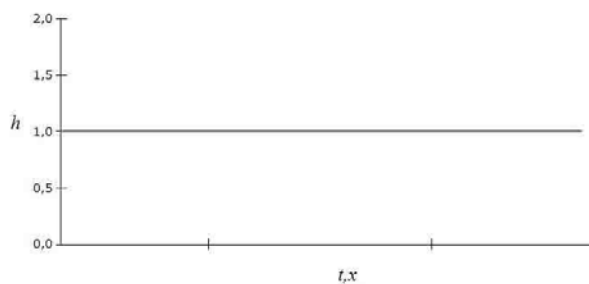


Рис. 8

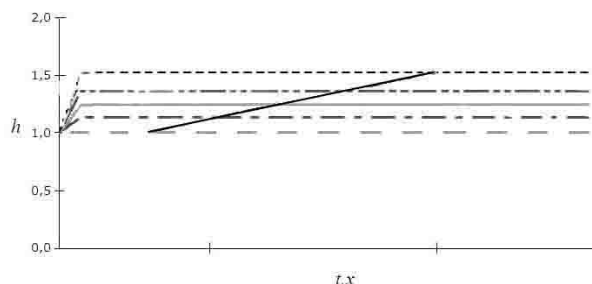


Рис. 9

На рисунке 8 представлен график решения задачи: $w_i = S_{0i} = 1, n_i = 5/3, q_i = 0, {}^i h = h^{0j} = 1$. Решения во всех 10 резервуарах совпадают и равны 1 на всех ребрах во всех счетных ячейках.

На рисунке 9 представлен график решения задачи: $w_i = S_{0i} = 1, n_i = 5/3, q_i = 1/1000, {}^i h = h^{0j} = 1$. За несколько первых временных шагов решения $h(t)$ во всех резервуарах устанавливаются (цветные линии, соответствующие этим решениям, становятся горизонтальными). Построив на участке установления решений $h(t)$ график $h(x)$ (тонкая черная линия), можно отметить совпадение характера этой кривой с характером соответствующей аналитической кривой на рисунке 2.

На рисунке 10 представлен график решения задачи, отличающейся от предыдущей лишь значением $q_i = -1/1000$. Здесь также за несколько первых шагов решения $h(t)$ во всех резервуарах устанавливаются, а построенная на участке установления этих решений кривая $h(x)$ (тонкая черная линия) по характеру напоминает соответствующую кривую на рисунке 2.

На рисунке 11 представлен график решения задачи: $w_i = S_{0i} = 1, n_i = 5/3 + \sin(i\Delta x_i), q_i = 0, {}^i h = h^{0j} = 1$. Решения $h(t)$ в этом случае также быстро устанавливаются. Кривая $h(x)$, построенная на участке установления всех $h(t)$, напоминает кривую на рисунке 3.

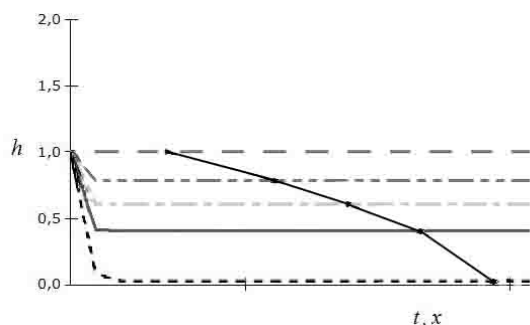


Рис. 10

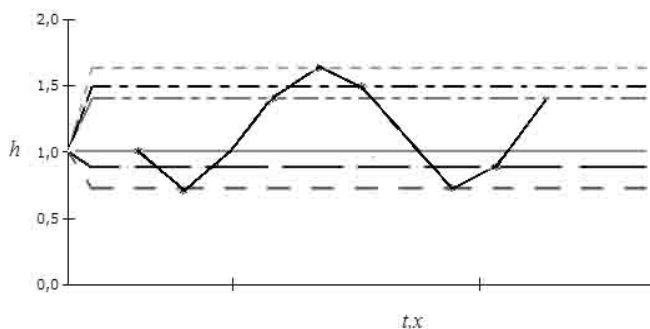


Рис. 11

2. Нестационарная задача 1:

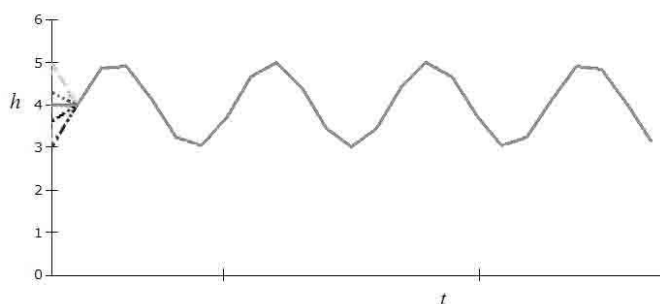


Рис. 12

На рисунке 12 представлен график решения задачи: $w_i = S_{0i} = 1$, $n_i = 5/3$, $q_i = 0$, ${}^{i0}h = 4 - \sin(i\Delta x_i)$, $h^{0j} = 4 + \sin(j\Delta t_j)$. Решения $h(t)$ хорошо согласуются с аналитическим решением задачи 1, они относительно быстро выравнивают фазу своих колебаний и далее во всех резервуарах колебания $h(t)$ происходят практически синфазно.

Заключение

Основным результатом настоящей работы является разработка оригинального алгоритма численного решения одномерного уравнения (9). Созданный алгоритм устойчив, поскольку для решения задачи требуется всего один раз в определенном порядке перебрать все ячейки счетной сетки. Поскольку (9) является приближением модели руслового стока (1)-(2), созданный алгоритм можно рекомендовать для поиска начального приближения при их численном решении.

Примечания:

1. Альтшуль А.Д. Гидравлическое сопротивление. М.: Недра, 1970. 216 с.
2. Klohn-Crippen. Red River one-dimensional unsteady flow model: final report submitted to International Joint Commission. Richmond (British Columbia), 1999. May. 88 pp.
3. Ahmad S., Simonovic S.P. Comparison of One-Dimensional and Two-Dimensional Hydrodynamic Modeling Approaches For Red River Basin, final report to International Joint Commission. Winnipeg: University of Manitoba, 1999. December. 52 pp.
4. Христанович С.А. Неустойчивое движение в каналах и реках // Некоторые вопросы механики сплошной среды: сб. науч. тр. М.; Л., 1938. С. 13-153.

References:

1. Altshul A.D. Hydraulic resistance. M.: Nedra, 1970. 216 pp.
2. Klohn-Crippen. Red River one-dimensional unsteady flow model: final report submitted to International Joint Commission. Richmond (British Columbia), 1999. May. 88 pp.
3. Ahmad S., Simonovic S.P. Comparison of One-Dimensional and Two-Dimensional Hydrodynamic Modeling Approaches For Red River Basin, final report to International Joint Commission. Winnipeg: University of Manitoba, 1999. December. 52 pp.
4. Khristanovich S.A. Unsteady motion in channels and rivers // Some problems of mechanics of continuum: coll. of proceedings. M.; L., 1938. P. 13-153.