УДК 531
ББК 22.21
М 20

Малых В.С.
Кандидат педагогических наук, доцент кафедры теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-08
Феклистов Г.С.
Кандидат педагогических наук, доцент кафедры теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-08, e-mail: german_f@mail.ru

Адекватность законов Ньютона для задач динамики систем с голономными связями

(Рецензирована)

Аннотация

Анализируется доказательство У. Стадлера о недостаточности законов Ньютона для рассмотрения движения жесткого двойного маятника. Указывается на некорректность вывода о нарушении центральности внутренних сил. Подтверждается полнота аксиоматики классической механики для решения задач динамики систем материальных точек с голономными связями.

Ключевые слова: *двойной жесткий маятник, момент импульса, концепция близкодействия, аксиоматика Ньютона, центральные силы, голономная связь.*

Malykh V.S.
Candidate of Pedagogy, Associate Professor of Theoretical Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-08
Feklistov G.S.
Candidate of Pedagogy, Associate Professor of Theoretical Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-08, e-mail: german_f@mail.ru

Adequacy of Newton's laws for problems of the dynamics of systems with holonomic constraints

Abstract

U. Stadler's proof about insufficiency of Newton's laws for examination of a rigid double pendulum movement is analyzed. The authors suggest that a conclusion about violation of centrality of internal forces is incorrect. Completeness of axiomatics of classical mechanics for the solution of problems of the dynamics of material point systems with holonomic constraints is confirmed.

Keywords: *double rigid pendulum, impulse moment, short-range interaction concept, Newton's axiomatics, central forces, holonomic constraints.*

Данная статья является реакцией на статью У. Стадлера (W. Stadler, San Francisco State University) «Неадекватность обычной формулировки законов Ньютона для некоторых задач механики материальной точки» [1, с. 7-19], в которой утверждается, что «трех законов Ньютона недостаточно для получения решения задачи о жестком двойном маятнике». По мысли автора, двойной жесткий маятник представляет собой систему из трех материальных точек с массами m_0, m_1, m_2, соединенных безмассовым стержнем (рис. 1). Движение маятника происходит в вертикальной плоскости xy. Требуется найти угол отклонения стержня от вертикали как функцию времени.

В ходе решения задачи в [1] используется прием освобождения материальных точек от связей с заменой их соответствующими внутренними силами. При этом соединительный стержень мысленно выбрасывается из системы, т.е. точки 1 и 2 движутся свободно. Показывается, что внутренние силы, с которыми взаимодействуют эти точки, не являются центральными и что таким образом нарушается третий закон Ньютона. Из этого автор заключает: «задача о жестком двойном маятнике не имеет решения в традиционных рамках ньютоновской механики» и показывает, что «введение в качестве независимой аксиомы закона изменения момента импульса делает задачу разрешимой».

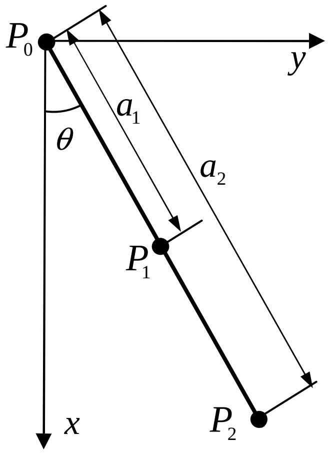

Рис. 1

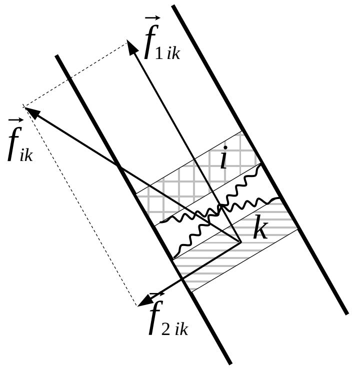

Рис. 2

Считаем, что вывод о нецентральности внутренних сил, обусловленный принятием ложной концепции дальнодействия, является здесь неверным и что задачу можно решить, не прибегая к закону изменения момента импульса.

Решение будем проводить с точки зрения современного истолкования аксиоматики Ньютона, оставаясь в традиционных рамках ньютоновской динамики. Согласно концепции близкодействия стержень здесь является переносчиком взаимодействия между материальными точками 0, 1 и 2. Упругое действие передается по стержню от одного элемента к другому, причем действие соседних элементов стержня друг на друга не сводится к нормальному напряжению растяжения, но обязательно (кроме момента прохождения маятника через положение равновесия) появляется тангенциальное напряжение сдвига.

Предлагаем упрощенную модель, объясняющую этот механизм (рис. 2). Здесь при плоском движении маятника для передачи действия *i*-го элемента на *k*-й элемент достаточно двух пружин, обеспечивающих в поперечном сечении стержня механическое напряжение при деформации растяжения (или сжатия), а также при деформации сдвига (или изгиба). Сила $\vec{f}_{ik}$, с которой *i*-й элемент действует на *k*-й элемент, имеет две составляющие: $\vec{f}_{1\,ik}$ (соответствующую натяжению) и $\vec{f}_{2\,ik}$ (соответствующую напряжению сдвига). В итоге сила $\vec{f}_{ik}$ составляет с осью стержня отличный от нуля угол. Согласно третьему закону Ньютона сила $\vec{f}_{ki}$, с которой *k*-й элемент стержня действует на *i*-й элемент, равна $-\vec{f}_{ik}$ и составляет с осью стержня такой же угол.

В духе такого моделирования можно представить весь стержень с грузами P_0, P_1 и P_2. Элемент стержня, соприкасающийся с нижней частью груза P_1, действует на этот груз с силой $\vec{F}_1$. На второй груз со стороны соприкасающегося с ним элемента стержня действует сила $\vec{F}_2$ (рис. 3). Можно ли считать, что силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ являются силами взаимодействия грузов P_1 и P_2? В аналогичном примере [2, с. 90-91] показано, что такой способ рассуждений допустим, если масса соединительного стержня пренебрежимо мала по сравнению с массами грузов. В этом приближении результат получается такой же, как и в случае непосредственного взаимодействия грузов P_1 и P_2 между собой.

Из вышеизложенного ясно, что при невесомом стержне $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, но силы не являются центральными: действуют вдоль разных прямых. У Стадлера это уравнение записано с двойными индексами:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}, \tag{1}$$

что подчеркивает дальнодействие грузов 1 и 2. Получается, что третий закон Ньютона применяется здесь в так называемой ограниченной форме: два тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю, но противоположными по направлению. Как известно, в обычной формулировке добавляется факт центральности действующих сил.

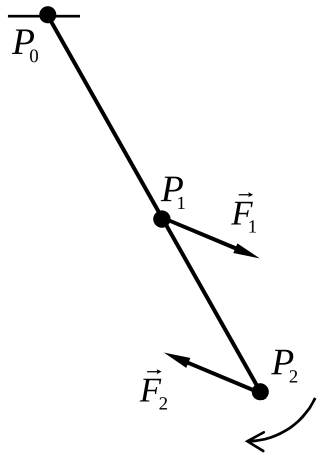

Рис. 3

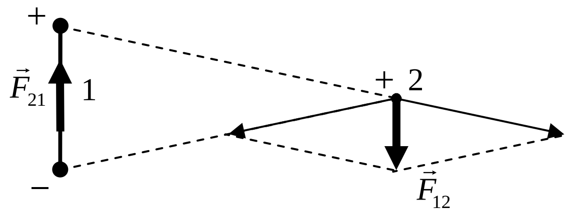

Рис. 4

Согласно третьему закону Ньютона в ограниченной форме происходит, например, взаимодействие диполя и точечного заряда (рис. 4). В этом примере переносчиком взаимодействия является электростатическое поле, а не твердое тело, как в двойном маятнике. Отсюда существенное различие: при полевом взаимодействии на тело действует сила со стороны поля при отсутствии силы, действующей со стороны тела на поле, а в твердом теле можно проследить поэлементное распределение механических напряжений (как указано выше: от одного груза к другому). На наш взгляд, нарушение центральности внутренних сил с точки зрения ньютоновской механики в примере с диполем и зарядом является действительным, а в примере с двойным маятником – мнимым.

Рассуждения, подобные проведенным для двойного маятника, легко обобщаются на любой случай движения механических систем с голономными связями (конечно, предполагается, что переносчиком взаимодействия являются твердые тела): во всех случаях применимости законов Ньютона внутренние силы являются центральными.

По Стадлеру равенство (1) при отсутствии центральности сил ведет к противоречию. Действительно, согласно уравнению движения для невесомого стержня, которое представляет собой второй закон Ньютона для вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, должно быть: $F_{21\,\theta} a_1 + F_{12\,\theta} a_2 = 0$, где $F_{21\,\theta}$ и $F_{12\,\theta}$ – составляющие сил вдоль направления $\vec{e}_\theta$ в полярной системе координат; a_1 и a_2 - расстояния от грузов до точки подвеса. Отсюда следует, что $F_{21\,\theta} \neq -F_{12\,\theta}$, в то время как из (1) следует $F_{21\,\theta} = -F_{12\,\theta}$.

Считаем, что для разрешения противоречия нет необходимости отказываться от третьего закона Ньютона в традиционной форме и заменять его дополнительной аксиомой, но нужно отказаться от признания дальнодействия сил $\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{12}$ и включить стержни в систему уравнений движения на основе второго закона Ньютона для поступательного движения отдельных частей маятника и для вращения всего маятника вокруг оси z:

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{f}_0+\vec{f}_1+\mu_1\vec{g}=\mu_1\vec{w}_1,\\
&-\vec{f}_1+\vec{f}_2+m_1\vec{g}=m_1\vec{w}_2,\\
&-\vec{f}_2+\vec{f}_3+\mu_2\vec{g}=\mu_2\vec{w}_3,\\
&-\vec{f}_3+m_2\vec{g}=m_2\vec{w}_4,\\
&-\mu_1 g\cdot\frac{a_1}{2}\sin\theta-m_1ga_1\sin\theta-\mu_2 g\cdot\frac{a_1+a_2}{2}\sin\theta-m_2ga_2\sin\theta=J\ddot{\theta},
\end{aligned}\right\}$$

где $\vec{f}_0$ – сила действия груза P_0 на стержень;

$\vec{f}_1$ – сила действия груза P_1 на стержень в сечении A;

$-\vec{f}_1$ – сила действия стержня на груз P_1 в сечении A;

$\vec{f}_2$ – сила действия стержня на груз P_1 в сечении B;

$-\vec{f}_2$ – сила действия груза P_1 на стержень в сечении B;

$\vec{f}_3$ – сила действия груза P_2 на стержень;

$-\vec{f}_3$ – сила действия стержня на груз P_2;

$J=m_1a_1^2+m_2a_2^2+\dfrac{(\mu_1+\mu_2)a_2^2}{3}$ – момент инерции маятника относительно оси z.

Решение полученной системы уравнений дает возможность при заданных начальных условиях описать состояние маятника в любой момент времени, т.е. найти θ, $\dot{\theta}$, а также вычислить силы упругости в указанных на рисунке 5 сечениях *A*, *B*, *C*, *D*.

В предельном случае для невесомого стержня ($\mu_1=\mu_2=0$) получаем известное уравнение движения двойного жесткого маятника [1, с. 16]:

$$\ddot{\theta}=-\frac{m_1a_1+m_2a_2}{m_1a_1^2+m_2a_2^2}\cdot g\sin\theta .$$

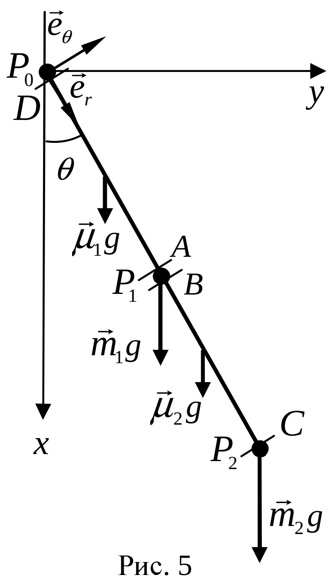

Рис. 5

В заключение заметим, что использование в данной статье для решения задачи о двойном жестком маятнике дополнительного к трем аксиомам Ньютона закона вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, как и использование для этой же цели Стадлером закона изменения момента импульса, оставляют законы Ньютона адекватными для задач динамики механических систем, поскольку дополнительные утверждения нельзя считать независимыми аксиомами, т.к. они легко выводятся из ньютоновских аксиом.

Примечания:

1. Физика за рубежом ’84. Сер. Б (преподавание): сб. ст. М.: Мир, 1984. 208 с.
2. Сивухин Д.В. Механика. М.: Наука: Гл. ред. Физматлит, 1989. 576 с.

References:

1. Physics abroad ’84. Ser. B (teaching): coll. of art. M.: Mir, 1984. 208 pp.
2. Sivukhin D.V. Mechanics. M.: Nauka. The chief ed. board of Physmathlit. 1989. 576 pp.