МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.977.1
ББК 22.19
Ш 96

Шумафов М.М.
Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-05, e-mail: shumaf@mail.ru

Стабилизация двумерных линейных управляемых систем обратной связью с запаздыванием по Пирагосу

(Рецензирована)

Аннотация. *Рассматривается задача стабилизации по выходу двумерных линейных управляемых систем обратной связью с запаздыванием по Пирагосу. Даны необходимые и/или достаточные условия стабилизируемости двумерных систем. Показаны возможности стабилизации линейных управляемых систем второго порядка обратной связью с запаздыванием по Пирагосу. Полученные результаты сравниваются с необходимыми и достаточными условиями стабилизации обратной связью без запаздывания.*

Ключевые слова: *линейная управляемая система, обратная связь с запаздыванием по Пирагосу, квазиполином, асимптотическая устойчивость, D-разбиение.*

Shumafov M.M.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-05, e-mail: shumaf@mail.ru

Stabilization of two-dimensional linear controllable systems by Pyragas' delay feedback

Abstract. *In the paper the problem of stabilization of two-dimensional linear time-invariant controllable systems by means of Pyragas' static time-invariant delayed output feedback is considered. Necessary and/or sufficient conditions of stabilizability of two-dimensional systems are given. The potential of Pyragas' delayed feedback is shown for stabilization of two-dimensional systems. The obtained results are compared with necessary and sufficient stabilization conditions given by feedback without delay.*

Keywords: *linear controllable system, delay feedback by Pyragas', quasipolynom, asymptotic stability, D-decomposition.*

1. Введение

Управление динамическими системами является одной из классических задач в прикладных науках, а стабилизация систем – одна из важнейших проблем в теории управления. Различные вопросы, касающиеся проблемы стабилизации динамических систем, интенсивно изучались в последние четыре десятилетия и в настоящее время эти вопросы остаются в центре внимания многочисленных исследователей (см. библиографию в [1], а также обзорные статьи [2, 3]). Повышенный интерес к проблемам стабилизации мотивируется прежде всего запросами практики управления. Наиболее эффективные алгоритмы стабилизации разработаны для линейных стационарных систем. Следует отметить, что в линейной теории управления остается еще много нерешенных трудных задач (см. [3]).

Возникает вопрос: каковы возможности линейной стационарной обратной связи с запаздыванием для стабилизации линейных неустойчивых стационарных систем?

Хорошо известно [4], что для достаточно малых и достаточно больших запаздываний такая стабилизация невозможна. Одной из мотиваций к исследованию задач стабилизации путем введения запаздывания в обратную связь явились компьютерные эксперименты К. Пирагоса (K. Pyragas) [5-9] по стабилизации хаоса. В своей пионерской работе [5] Пирагос предложил весьма мощный и эффективный метод стабилизации неустойчивых периодических орбит, встроенных в странные аттракторы динамических систем с хаотическим поведением, в частности, в системах Лоренца и Ресслера. Этот метод состоит во введении в систему обратной связи с запаздыванием специального вида, которая формируется пропорционально разности значений выходного сигнала в текущий момент времени и значения этого сигнала в некоторой предыдущий момент времени. Первоначально примененный для стабилизации неустойчивых периодических орбит этот метод оказался эффективным и для стабилизации неустойчивых состояний равновесия [10-13].

В настоящей статье задача линейной стационарной стабилизации с запаздыванием решается для случая двумерных линейных управляемых систем. Здесь получены необходимые и/или достаточные условия стабилизируемости неустойчивых линейных систем второго порядка с постоянными коэффициентами путем введения в систему обратной связи с запаздыванием по Пирагосу. Эти условия получены на основе *D*-разбиения пространства параметров рассматриваемой системы. Оказывается, что линейная система в седловом случае не является стабилизируемой. Некоторые частные результаты по стабилизации рассматриваемой системы были анонсированы в [14, 15]. Вопрос о стабилизации рассматриваемой системы с помощью стандартной обратной связи с запаздыванием рассматривался в работе [16].

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную управляемую систему со скалярным входом и скалярным выходом

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad y = cx(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^2$ – вектор состояния в момент времени *t*; $u(t) \in \mathbb{R}$ – управление (вход), $y(t) \in \mathbb{R}$ – выход; *A, b, c* – вещественные постоянные матрицы размеров $2\times 2, 2\times 1$ и 1×2 соответственно.

Системы вида (1) представляют собой важный класс для анализа нелинейных управляемых систем в окрестности состояния равновесия $(x=0, u=0)$. К системам вида (1) также сводятся линейные периодические системы, возникающие как системы уравнений в вариациях в окрестности их периодических орбит.

Предположим, что система (1) управляема. Введем в систему (1) обратную связь по Пирагосу [5]

$$u(t) = -k\big(y(t) - y(t-\tau)\big), \tag{2}$$

где $k \neq 0$ и $\tau > 0$ – варьируемые параметры.

Основная задача заключается в том, чтобы найти такие значения параметров *k* и τ, чтобы система (1), замкнутая обратной связью (2), оказалась бы асимптотически устойчивой.

Замкнутая система (1), (2) представляет собой линейное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом относительно вектор-функции $x(t)$, где *k* и τ – параметры.

3. Формулировка результата

Приведем систему (1) невырожденным линейным преобразованием координат к каноническому виду [17, с. 239]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) - u(t), \\ y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \end{cases} \tag{3}$$

где a_1, a_2, c_1, c_2 – вещественные параметры. Приведение системы (1) к виду (3) возможно в силу управляемости системы (1).

В работах [14, 15] были даны необходимые и достаточные условия стабилизируемости системы (3) в случаях

$$1)\ c_1 \neq 0, c_2 = 0, \quad 2)\ c_1 = 0, c_2 \neq 0$$

и в случае, когда $c_1 > 0,\ c_2 = 1$.

В настоящей статье рассматривается случай произвольных c_1 и c_2 таких, что $c_1 \neq 0,\ c_2 \neq 1$. В этом случае здесь нами получено достаточное условие стабилизируемости системы (3) обратной связью (2). Это условие расширяет область стабилизации $\{a_2 > c_1\}$, полученной в [14, 15].

Введем в рассмотрение числа

$$m_0 = \min_{\sigma \in [0,\, 2\pi]} \left(\cos\sigma + \frac{\sin\sigma}{\sigma} \right), \quad m_1 = \min_{\sigma \in [0,\, 2\pi]} \frac{\sin\sigma}{\sigma}$$

$(m_0 \approx -1{,}0419, \quad m_1 \approx -0{,}2172)$.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть в системе (3) $c_1 \neq 0,\ c_2 \neq 0$. Тогда система (3) стабилизируема обратной связью (2), если выполнено хотя бы одно из условий

$$a)\ c_1 c_2 > 0,\ a_1 > 0; \qquad b)\ c_1 c_2 < 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > c_1/c_2;$$

$$c)\ c_1 c_2 < 0,\ a_1 > \frac{c_1}{c_2} a_2 + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \frac{a_2^2}{\beta^2},\ -\infty < a_2 < \frac{2 c_2 m_1 \beta^2}{m\beta - 2c_1/c_2},\ \beta \in \left(0, \frac{2c_1}{mc_2} \right).$$

Замечание. В обоих случаях $c_1 c_2 > 0$ и $c_1 c_2 < 0$ условие $a_1 > 0$ является необходимым для стабилизируемости системы (3) обратной связью по Пирагосу. Таким образом, в случае $c_1 c_2 > 0$ условие *a*) теоремы является необходимым и достаточным.

4. Доказательство теоремы

Замкнутая система (3), (2) имеет вид

$$\dot{x}(t) = (A - kbc)x(t) + kbcx(t - \tau), \tag{4}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = (c_1 \quad c_2). \tag{5}$$

Характеристическое уравнение системы (4), (5) представляет собой квазиполином

$$F(z; a_1, a_2; c_1, c_2; k, \tau) \equiv z^2 + (a_2 - kc_2)z + (a_1 - kc_1) + ke^{-\tau z}(c_2 z + c_1). \tag{6}$$

Как хорошо известно [4, с. 118], для асимптотической устойчивости линейной системы (4), (5) необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического полинома (6) лежали в левой полуплоскости $\mathrm{Re} z > 0$ плоскости комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$.

Далее доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [16] или теоремы 3 из [15]. Оно основано на применении метода *D*-разбиения пространства

$\mathbb{R}_a^2 = \{a_1, a_2\}$ коэффициентов квазиполинома (6) с последующим использованием теоремы Руше о нулях аналитической функции [18, с. 160].

Определим границу $\Gamma_{k,\tau}$ D-разбиения пространства коэффициентов $\mathbb{R}_a^2$ квазиполинома F из (6). Она представляет собой образ мнимой оси $z = iy$ плоскости комплексного переменного z в $\mathbb{R}_a^2$ при отображении $z \to a = (a_1, a_2)$, определяемом уравнением $F(z; a; c) = 0$ ($c = (c_1, c_2)$ – фиксировано). Имеем $F(iy; a; c) = 0$, или после разделения вещественной и мнимой частей

$$\begin{cases} a_1 = y^2 - kc_2 y \sin(\tau y) - kc_1 \cos(\tau y) + kc_1, \\ a_2 = kc_1 \sin(\tau y)/y - kc_2 \cos(\tau y) + kc_2, \end{cases} \tag{7}$$

при $y \neq 0$ и $a_1 = 0$ при $y = 0$.

Таким образом, граница $\Gamma_{k,\tau}$ состоит из особой прямой $K = \{a_1 = 0\}$ и кривой $L_{k,\tau}$, определяемой параметрическими уравнениями (7): $\Gamma_{k,\tau} = K \cup L_{k,\tau}$. В силу четности функций $a_1(y)$ и $a_2(y)$ достаточно рассмотреть (7) для $y \geq 0$.

Кривая $L_{k,\tau}$, выходя (при $y = 0$) из точки $(a_1 = 0, a_2 = k\tau c_1)$, при достаточно малых τ колебательным образом поступательно навивается на ось абсцисс a_1, а при больших значениях τ она движется возвратно-поступательно, т.е. возникают точки самопересечения и, следовательно, кривая $L_{k,\tau}$ содержит петли. Поэтому при малых τ кривая (7) устроена проще. С помощью теоремы Руше будет показано, что выше кривой (7) располагается область устойчивости S. Затем подберем значения k, τ такие, чтобы точка $(a_1 > 0, a_2)$ оказалась в области S. Проще всего это сделать для малых τ. Ясно, что условием отсутствия петель является неравенство $a_1'(y) \geq 0$.

Обозначим через $D_{k,\tau}^p$ область в плоскости $\mathbb{R}_a^2$ параметров a_1 и a_2, точкам которых соответствуют квазиполиномы вида (6) с одинаковым числом p корней в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ плоскости комплексного переменного z.

Как и в доказательстве теоремы 3 из [15], применяя теорему Руше к функциям

$$f(z; a_1, a_2) = z^2 + (a_2 - kc_2)z + (a_1 - kc_1)$$

и

$$\varphi(z) = k(c_2 z + c_1)\exp(-\tau z),$$

устанавливаем, что единственной областью $D_{k,\tau}^0$ $(p = 0)$ будет область, лежащая выше кривой $L_{k,\tau}$ в правой полуплоскости $a_1 > 0$.

Возможны четыре случая:

$A)$ $c_1 > 0, c_2 > 0$; $B)$ $c_1 < 0, c_2 < 0$; $C)$ $c_1 < 0, c_2 > 0$; $D)$ $c_1 > 0, c_2 < 0$.

Случай А: $c_1 > 0, c_2 > 0$.

Пусть (a_1, a_2) – произвольная точка с $a_1 > 0$. Будем считать $k < 0$. Кривая $L_{k,\tau}$ начинается (при $y = 0$) в точке $(0, k\tau c_1)$ на отрицательной полуоси a_2. Возьмем отрицательное число $\beta < a_2$. Выберем k и τ такими, чтобы $k\tau c_1 = \beta$. При таком выборе параметров k и τ производная

$$a_1'(y) = (\sigma/\tau c_1)[2c_1 + (-\beta)c_2(\cos\sigma + (1 - \tau c_1/c_2)\sin\sigma/\sigma)], \quad (\sigma = \tau y), \tag{8}$$

заведомо положительна на интервале $(0, \pi/2\tau)$, а производная

$$a_2'(y) = (\beta\tau/\sigma^2)[\sigma\cos\sigma + (c_2\sigma^2/\tau c_1 - 1)\sin\sigma] \quad (9)$$

отрицательна на интервале $(0, \sigma_0(\tau)/\tau)$ при достаточно малых τ, где $\sigma_0(\tau)$ – наименьший положительный корень уравнения

$$ctg\sigma = (\tau c_1 - c_2\sigma^2)/\tau c_1\sigma. \quad (10)$$

(Здесь $\sigma_0(\tau) \in (\pi/2, \pi)$; $\sigma_0(\tau) \to \pi$ при $\tau \to 0$.)

Заметим, что при $\tau \to 0$

$$da_2/da_1(0;\tau) = \beta\tau(3c_2 - \tau c_1)/3(2c_1 - 2\beta c_2 + \beta\tau c_1) \to -0$$

и $da_2/da_1 < 0$ на том участке кривой $L_{k,\tau}$, который соответствует промежутку $0 < y < \pi/2\tau$.

Возьмем прямую l, проходящую через точку $(0, \beta)$ оси a_2 и точку $(a_1(\pi/\tau), a_2(\pi/\tau))$ на кривой $L_{k,\tau}$. Так как

$$a_1(\pi/\tau) = (\pi^2 + 2\beta\tau)/\tau^2, \quad a_2(\pi/\tau) = 2\beta/\tau c_1,$$

то при достаточно малом τ угловой коэффициент прямой l будет отрицательным и, следовательно, точка (a_1, a_2) с $a_1 > 0$ и $a_2 > \beta$ окажется выше прямой l, а значит, и выше кривой $L_{k,\tau}$, то есть $(a_1, a_2) \in D_{k,\tau}$ при достаточно малом τ и соответствующем $k = \beta/\tau c_1$. Таким образом, стабилизация системы (6) обратной связью (2) возможна при любом $a_1 > 0$ и любом a_2.

Случай B: $c_1 < 0, c_2 < 0$.

Пусть (a_1, a_2) – произвольная точка с $a_1 > 0$. Будем считать $k > 0$. Выбираем значения β, k и τ, как и выше для случая *A*. Тогда совершенно аналогично, как и в случае *A*, получаем, что при достаточно малых τ точка $(a_1, a_2) \in D^0_{k,\tau}$, т.е. стабилизация возможна при любом $a_1 > 0$ и любом a_2.

Случай C: $c_1 < 0, c_2 > 0$.

Пусть (a_1, a_2) – произвольная точка на плоскости $\mathbb{R}^2_a$ с $a_1 > 0$ и $a_2 > c_1/c_2$. Пусть $k > 0$. Возьмем число β, удовлетворяющим условиям: $c_1/c_2 < \beta < a_2$, если $a_2 < 0$, и $\beta < 0$, если $a_2 \geq 0$. Выберем k и τ такими, чтобы $k\tau c_1 = \beta$. Тогда из (8) и (9) следует, что при достаточно малых τ соответствующая функция $a_1(y)$ будет возрастающей на всей полуоси $[0; +\infty)$ (в силу неравенства $\beta > c_1/c_2$), а функция $a_2(y)$ – возрастающей на промежутке $[0; \sigma^0(\tau)/\tau)$ и убывающей на интервале $(\sigma^0(\tau)/\tau; 2\pi/\pi)$, где $\sigma^0(\tau)$ – наименьший положительный корень уравнения (10). (Здесь $\pi < \sigma^0(\tau) < 3\pi/2$, $\sigma^0(\tau) \to \pi$ при $\tau \to 0$.) Поскольку функции $(\sigma\cos\sigma - \sin\sigma)/\sigma^3$ и $\sin\sigma/\sigma$ ограничены на полупрямой $[0, +\infty)$ (их пределы при $\sigma \to +0$ существуют), то производная

$$\frac{da_2}{da_1} = \frac{\tau[(\tau c_1/c_2)\cdot(\sigma\cos\sigma - \sin\sigma)/\sigma^3 + \sin\sigma/\sigma]}{2c_1/c_2\beta - [\cos\sigma + (1 - \tau c_1/c_2)\sin\sigma/\sigma]} \qquad (\sigma = \tau y)$$

по абсолютной величине будет сколь угодно малой для всех $\sigma \in [0; +\infty)$ при достаточно малых τ. Поэтому при некотором достаточно малом $\tau > 0$ кривая $L_{k,\tau}$ окажется ниже точки (a_1, a_2), и, следовательно, $(a_1, a_2) \in D^0_{k,\tau}$ при достаточно малом τ и соответствующем $k = \beta/\tau c_1$. Значит, стабилизация системы (6) возможна при $a_1 > 0$ и $a_2 > c_1/c_2$.

Пусть теперь $k<0$. Тогда $\beta>0$, где $\beta=k\tau c_1$. Из условия $a_1'(y)\ge 0$ отсутствия петель у кривой $L_{k,\tau}$ имеем из (8):

$$\cos\sigma+\left(1-\tau c_1/c_2\right)\sin\sigma/\sigma \ge 2c_1/c_2\beta. \qquad (11)$$

Неравенство (11) будет выполнено, если

$$m-m_1\,\tau c_1/c_2 \ge 2c_1/c_2\beta. \qquad (12)$$

Будем брать β из интервала $\left(0,2c_1/mc_2\right)$. Из неравенства (12) получаем промежуток изменения $\tau>0$, для каждого значения которого соответствующая функция $a_1(y)$ – возрастающая на всей полуоси $[0,+\infty)$. Этот промежуток зависит от β:

$$0<\tau\le\tau^*(\beta),\quad \tau^*(\beta)=\left(mc_2\beta-2c_1\right)/m_1c_1\beta,\quad \beta\in\left(0,2c_1/mc_2\right).$$

Далее, производная $a_2'(y)$ из (9) отрицательна на промежутке $\left[0,\sigma^0(\tau)\right)$, положительна на $\left(\sigma^0(\tau)/\tau,2\pi/\tau\right]$ и $a_2'\left(\sigma^0(\tau)/\tau\right)=0$, где $\sigma^0(\tau)$ – наименьший положительный корень уравнения (10) ($\sigma^0(\tau)\to\pi$ при $\tau\to 0$). Поэтому точка $Q\left(a_1\left(\sigma^0/\tau\right),a_2\left(\sigma^0/\tau\right)\right)$, $\sigma^0=\sigma^0(\tau)$, на кривой $L_{k,\tau}$ будет самой нижней на том участке этой кривой, который соответствует значениям $y\in\left(0,2\pi/\tau\right)$. При изменении τ в промежутке $\left(0,\tau^*(\beta)\right]$ точка Q будет описывать нижнюю границу области, где возможна стабилизация. Чтобы получить явные алгебраические уравнения границы Γ_β подобласти G_β области стабилизации S, возьмем «соседнюю» с точкой Q точку P на кривой $L_{k,\tau}$, соответствующую значению $y=\pi/\tau$, и найдем ее координаты. Имеем

$$\begin{cases} a_1=2kc_1+\pi^2/\tau^2, \\ a_2=2kc_2, \end{cases} \qquad (13)$$

где $k=\beta/\tau c_1$, $\tau\in\left(0,\tau^*(\beta)\right]$. Из (13), учитывая, что

$$-\infty<k\le k^*(\beta),\quad k^*(\beta)=\frac{m_1\beta^2}{m\beta-2c_1/c_2},$$

получаем уравнение границы Γ_β:

$$a_1=\frac{c_1}{c_2}a_2+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2\frac{a_2^2}{\beta^2},\quad -\infty<a_2<\frac{2m_1c_2\beta^2}{m\beta-2c_1/c_2},$$

где $0<\beta<2c_1/mc_2$. Соответствующая подобласть G_β задается неравенствами

$$a_1>\frac{c_1}{c_2}a_2+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2\frac{a_2^2}{\beta^2},\quad -\infty<a_2<\frac{2m_1c_2\beta^2}{m\beta-2c_1/c_2}.$$

Объединение всех областей G_β $\left(0<\beta<2c_1/mc_2\right)$ будет областью, где возможна стабилизация системы (3).

Случай D: $c_1>0, c_2<0$.

Пусть (a_1,a_2) – произвольная точка с $a_1>0$ и $a_2>c_1/c_2$. Пусть $k<0$. Выбрав k и τ так, чтобы $k\tau c_1=\beta$, где число β удовлетворяет неравенствам $c_1/c_2<\beta<a_2$, если $a_2<0$ и неравенству $\beta<0$, если $a_2\ge 0$, как и выше в случае C, получим, что стабилизация системы (3) возможна при указанных выше значениях параметров a_1 и a_2.

Пусть теперь $k > 0$. Тогда совершенно аналогично, как и в предыдущем случае *C*, для $k < 0$ придем к заключению, что область, определяемая неравенствами из условия *c*) теоремы, является подобластью *G* области стабилизации *S*. Теорема доказана полностью.

5. Заключение

В статье получены необходимые и/или достаточные условия стабилизируемости двумерных линейных стационарных систем обратной связью с запаздыванием по Пирагосу. Выявлены возможности стабилизации двумерных систем обратной связью по Пирагосу. В случае $c_1c_2 > 0$ область стабилизации по Пирагосу у́же по сравнению с областью стабилизации ($\mathbb{R}^2_{a_1a_2}$), даваемой обратной связью без запаздывания $u(t) = ky(t)$. В случае $c_1c_2 < 0$ условие *c*) теоремы расширяет область стабилизации, даваемая теоремой 3 из [15].

Примечания:

1. Леонов Г.А., Шумафов М.М. Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. 420 с.
2. Static output feedback: a survey / V.L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato, K. Grigoriadis // Automatica. 1997. Vol. 33, No. 2. P. 125-137.
3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 7-46.
4. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
5. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 170. P. 421-428.
6. Pyragas K. Control of chaos via extended delay feedback // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 206. P. 323-330.
7. Nomajunas A., Pyragas K., Tamaševičius A. Stabilization of an unstable steady state in a Mackey-Class system // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 204. P. 255-262.
8. Pyragas V., Pyragas K. Delayed feedback control of the Lorenz system: An analytical treatment at a subcritical Hopf bifurcation // Phys. Lett. E. 2006. Vol. 73. 036215. P. 1-10.
9. Delayed feedback control of periodic orbits without torsion in nonautonomous systems: Theory and experiment / A. Tamaševičius, G. Mycolaitis, V. Pyragas, K. Pyragas // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. 026203. P. 1-6.
10. Hövel P., Schöll E. Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 72. 046203.
11. Control of unstable steady states by long delay feedback / S. Yanchuk, M. Wolfrum, P. Hövel, E. Schöll // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. 026201.
12. Dahms T., Hövel P., Schöll E. Stabilization of fixed points by extended time-delayed feedback control // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. 056213.
13. Huijberts H., Michiels W., Hijmeijer H. Stabi-

References:

1. Leonov G.A., Shumafov M.M. Methods of stabilization of the linear operated systems. SPb.: SpbSU Publishing House, 2005. 420 pp.
2. Static output feedback: a survey / V.L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato, K. Grigoriadis // Automatica. 1997. Vol. 33, No. 2. P. 125-137.
3. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Difficult problems of the linear theory of control. Some approaches to solution // Automatic equipment and telemechanics. 2005. No. 5. P. 7-46.
4. Elsgolts L.E., Norkin S.B. Introduction to the theory of differential equations with deviating argument. M.: Nauka, 1971. 296 pp.
5. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 170. P. 421-428.
6. Pyragas K. Control of chaos via extended delay feedback // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 206. P. 323-330.
7. Nomajunas A., Pyragas K., Tamaševičius A. Stabilization of an unstable steady state in a Mackey-Class system // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 204. P. 255-262.
8. Pyragas V., Pyragas K. Delayed feedback control of the Lorenz system: An analytical treatment at a subcritical Hopf bifurcation // Phys. Lett. E. 2006. Vol. 73. 036215. P. 1-10.
9. Delayed feedback control of periodic orbits without torsion in nonautonomous systems: Theory and experiment / A. Tamaševičius, G. Mycolaitis, V. Pyragas, K. Pyragas // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. 026203. P. 1-6.
10. Hövel P., Schöll E. Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 72. 046203.
11. Control of unstable steady states by long delay feedback / S. Yanchuk, M. Wolfrum, P. Hövel, E. Schöll // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. 026201.
12. Dahms T., Hövel P., Schöll E. Stabilization of fixed points by extended time-delayed feedback control // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. 056213.
13. Huijberts H., Michiels W., Hijmeijer H. Stabi-

lizability via Time-Delayed Feedback: An Eigenvalue Optimization Approach // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2009. Vol. 8, No. 1. P. 1-20.

14. Шумафов М.М. Стабилизация линейных стационарных управляемых систем второго порядка обратной связью с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2010. № 12. С. 87-90.
15. Шумафов М.М. Стабилизация линейных стационарных управляемых систем второго порядка обратной связью с запаздыванием // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук (АМАН). 2013. Т. 15, № 2. С. 149-155.
16. Шумафов М.М. О стабилизации двумерных линейных управляемых систем обратной связью с запаздыванием // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2010. Вып. 2 (61). С. 40-52. URL: http://vestnik.adygnet.ru
17. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
18. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991. 447 с.

lizability via Time-Delayed Feedback: An Eigenvalue Optimization Approach // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2009. Vol. 8, No. 1. P. 1-20.

14. Shumafov M.M. Stabilization of the linear stationary operated systems of the second order by delayed feedback // News of higher schools. Mathematics. 2010. No. 12. P. 87-90.
15. Shumafov M.M. Stabilization of the linear stationary operated systems of the second order by delayed feedback // Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences (AMAN). 2013. Vol. 15, No. 2. P. 149-155.
16. Shumafov M.M. On stabilization of two-dimensional linear controllable systems by delayed feedback // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2010. Iss. 2 (61). P. 40-52. URL: http://vestnik.adygnet.ru
17. Andreev Yu.N. Control of finite-dimensional linear objects. M.: Nauka, 1976. 424 pp.
18. Evgrafov M.A. Analytical functions. M.: Nauka, 1991. 447 pp.