УДК 517.925.41
ББК 22.161.61
У 95

Ушхо А.Д.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-08, e-mail: uschho76@mail.ru
Феклистов Г.С.
Кандидат педагогических наук, доцент кафедры теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-08, e-mail: german_f@mail.ru

О прямых изоклинах и особых точках плоских полиномиальных векторных полей в специальных случаях

(Рецензирована)

Аннотация. *Приводятся новые доказательства ранее известных фактов теории прямых изоклин плоских кубических векторных полей, основанные на введении определенного свойства (a). Множество M обладает свойством (a), если его элементами являются параллельные между собой прямые изоклины полиномиальной дифференциальной системы и в нем нет двух прямых, на которых индуцировано одно и то же направление. Показано, что если полиномиальное векторное поле n-ой степени имеет n-элементное множество M_1 прямых изоклин, обладающее свойством (a) и n-элементное множество M_2 параллельных между собой прямых изоклин, то M_2 также обладает свойством (a). Доказано, что векторное поле n-ой степени имеет n(n–1) особых точек, и все они простые, если множество всех его прямых изоклин содержит два n-элементных подмножества со свойством (a).*

Ключевые слова*: изоклина, полиномиальное векторное поле, особая точка.*

Ushkho A.D.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Theoretical Physics Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-08, e-mail: uschho76@mail.ru
Feklistov G.S.
Candidate of Pedagogy, Associate Professor of Theoretical Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-08, e-mail: german_f@mail.ru

On straight-line isoclines and singular points of the flat polynomial vector fields in special cases

Abstract. *The new proofs of the early known data on straight-line isoclines of planar cubic vector fields are presented. These proofs are based on the introduction of a specific property (a). The set M has the property (a) if its elements are parallel to each other straight-line isoclines of polynomial differential system and there are no two lines in it, which induced the same direction. It is shown that if a polynomial vector field of the n-power has the n-element set M_1 of the straight-line isoclines with the (a) property and the n-element set M_2 of parallel straight-line isoclines, then the M_2 also has the (a) property. We prove that the vector field of the n-power has n(n–1) singular points, and they are all simple, if the set of its straight-line isoclines contains two n-element subset of the (a) property.*

Keywords: *polynomial vector field, singular point, parallelism, straight-line isocline.*

Изучению различных аспектов теории прямых изоклин плоских полиномиальных векторных полей посвящены работы [1-10]. В данной статье рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j \equiv P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} b_{ij} x^i y^j \equiv Q_n(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R, (P_n(x,y), Q_n(x,y)) = 1, \deg(P^2{}_n(x,y) + Q^2{}_n(x,y)) = 2n, P_n(tx,ty) \not\equiv t^n P_n(x,y)$ или $Q_n(tx,ty) \not\equiv t^n Q_n(x,y)$.

Дается оценка сверху числа прямых изоклин системы (1) в случае, когда во множестве всех прямых изоклин этой системы содержатся n-элементные подмножества со специальными свойствами.

Под символом $l_j^{m_i}$ будем понимать прямую изоклину l_j, на которой индуцировано направление m_i. Прямые изоклины с различными нижними индексами считаются несовпадающими.

Будем говорить, что множество M обладает свойством (α), если:

1) элементами M являются параллельные между собой прямые изоклины системы (1);
2) в M нет двух прямых, на которых индуцировано одно и то же направление.

Теорема 1. Пусть $M_1 = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_2}, ..., l_n^{m_n}\}$ – множество прямых изоклин системы (1), обладающее свойством (α), $M_2 = \{l_{n+1}^{m_{n+1}}, l_{n+2}^{m_{n+2}}, ..., l_{2n}^{m_{2n}}\}$ – множество параллельных между собой прямых изоклин этой же системы. Тогда $(\forall i \in \{1,2,...,n\})(\forall j \in \{n+1, n+2, ..., 2n\}) : l_i^{m_i} \cap l_j^{m_j} \neq \varnothing$ и множество M_2 обладает свойством (α).

Доказательство. Согласно теореме 5 [11] система (1) имеет не более $2n-1$ параллельных между собой прямых изоклин. Следовательно, каждая прямая изоклина, принадлежащая множеству M_2, пересекает все прямые изоклины множества M_1. Покажем, что во множестве M_2 нет двух прямых, на которых индуцировано одно и то же направление. Предположим противное, то есть пусть существуют во множестве M_2 две прямые изоклины $l_s^{m_s}$ и $l_r^{m_r}$ такие, что $m_r = m_s$. На всех прямых множества M_2 не может быть индуцировано одно и то же направление m, так как в противном случае по теореме 1 [10] $m \notin \{m_1, m_2, ..., m_n\}$, и каждая прямая изоклина множества M_1 пересекается с прямыми множества M_2 в n особых точках. В силу того, что прямые во множестве M_2 параллельны между собой, приходим к противоречию с леммой [10], согласно которой на каждой прямой изоклине множества M_1 расположены не более $n-1$ особых точек. Таким образом, во множестве M_2 есть хотя бы одна прямая изоклина $l_p^{m_p}$ такая, что $m_p \neq m_r$. Посредством преобразования [12]

$$\begin{cases} x = \overline{x} + \overline{y}, \\ y = m_r \overline{x} + m_p \overline{y} \end{cases} \tag{2}$$

переведем систему (1) в систему (обозначения переменных x и y сохраняем неизменными)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (ax + by + c_1) P_{n-1}(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = (ax + by + c_2)(ax + by + c_3) Q_{n-2}(x,y), \end{cases} \tag{3}$$

где $c_i \neq c_j$ при $i \neq j, i, j \in \{1,2,3\}, P_{n-1}(x,y)(Q_{n-2}(x,y))$ – многочлен степени $n-1$ ($n-2$).

Согласно [4] прямая изоклина $l_p^{m_p}$ в результате преобразования (2) перешла в изоклину бесконечности $L_1 : ax + by + c_1 = 0$, а прямые $l_s^{m_s}$ и $l_r^{m_r}$ – в изоклины нуля

$L_2: ax+by+c_2=0, L_3: ax+by+c_3=0$ системы (3).

Из (3) видно, что на прямой L_1 система (3) имеет не более $n-2$ особых точек. Но это возможно в том и только в том случае, когда во множестве M_1 найдутся не менее двух прямых изоклин, на которых индуцировано одно и то же направление m_p. Приходим к противоречию с тем, что по условию теоремы M_1 – множество прямых изоклин, обладающее свойством (α). Теорема доказана.

Введем обозначение M^m – множество, состоящее из прямых изоклин, на которых индуцировано одно и то же направление m.

Очевидным является

Утверждение 1. Если система (1) имеет хотя бы одно подмножество множества M всех прямых изоклин (1), состоящее из n прямых изоклин и обладающее свойством (α), то во множестве M есть, по крайней мере, n подмножеств вида M^m.

Пусть во множестве M всех прямых изоклин системы (1) содержатся k n-элементных подмножеств, обладающих свойством (α). Тогда согласно теореме 2 [10] об оценке числа прямых изоклин имеет место неравенство $kn \le 6n-5 (n \ge 2)$, из которого следует $k \le 6-\frac{5}{n}$. Таким образом, число всех n-элементных подмножеств со свойством (α) во множестве M всех прямых изоклин системы (1) не более пяти. Так, для квадратичной системы таких подмножеств не более двух. Из леммы [10] следует

Утверждение 2. Если M_0 – k-элементное множество прямых изоклин системы (1), обладающее свойством (α), и $k \ge n+1$, то эта система не имеет множества прямых изоклин со свойством (α), отличного от M_0.

Теорема 2. Если M_1 – k-элементное множество прямых изоклин системы (1), обладающее свойством (α), и $k \ge n+1$, M_2 – множество, состоящее из l параллельных между собой прямых изоклин этой же системы, то $2 \le l \le n-1$, где $n \ge 3$.

В самом деле, согласно утверждению 2, на всех прямых изоклинах множества M_2 индуцировано одно и то же направление, и в силу теоремы 1 [10] $l \le n$. Поэтому предположение о том, что $l > n-1$, допускает наличие во множестве M_1 хотя бы одной прямой изоклины, проходящей через n особых точек. С другой стороны, по лемме [10] на прямых изоклинах множества M_1 система (1) имеет не более $n-1$ особых точек. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $M_1=\left\{l_1^{m_1}, l_2^{m_2}, ..., l_n^{m_n}\right\}$ и $M_2=\left\{l_{n+1}^{m_{n+1}}, l_{n+2}^{m_{n+2}}, ..., l_{2n}^{m_{2n}}\right\}$ – множества прямых изоклин системы (1), обладающие свойством (α). Тогда система (1) имеет $n(n-1)$ особых точек, через каждую из которых проходят две прямые изоклины множества $M_1 \cup M_2$, причем все эти особые точки простые. Если система (1) имеет особую точку $W(x_0, y_0)$, не принадлежащую ни одной из прямых множества $M_1 \cup M_2$, то она простая, и через нее проходят не более n прямых изоклин системы (1), где $n \ge 2$.

Доказательство. Согласно работе [10] система (1) имеет не более $2n-1$ параллельных между собой прямых изоклин. Следовательно, прямые изоклины множества M_1 пересекает любая прямая изоклина, принадлежащая множеству M_2. Поэтому в силу леммы [10] на каждой прямой изоклине множества $M_1 \cup M_2$ система (1) имеет не более $n-1$ особых точек, то есть общее число особых точек системы (1), через каждую из которых проходят две прямые изоклины множества $M_1 \cup M_2$, равно $n(n-1)$. Из леммы [10] следует также, что для любой прямой изоклины множества $M_1(M_2)$ найдется ровно одна прямая изоклина множества $M_2(M_1)$ такая, что на этих двух прямых изоклинах индуцировано одно и то же направление. В этой связи можно переобозначить прямые изоклины множества M_2: $M_2 = \left\{l_{n+1}^{m_1}, l_{n+2}^{m_2}, ..., l_{2n}^{m_n}\right\}$. Согласно утверждению 1 существуют множества $M^{m_1}, M^{m_2}, ..., M^{m_n}$ прямых изоклин системы (1), причем $l_i^{m_i}, l_{n+i}^{m_i} \in M^{m_i}, i = \overline{1,n}$.

Покажем, что особая точка системы (1), принадлежащая прямым изоклинам множества $M_1 \cup M_2$, является простой. Для этого из семейства множеств $\left\{M^{m_i}\right\}_{i=1}^{n}$ произвольным образом выберем два множества M^{m_i} и M^{m_j}, $m_i \neq m_j$, где $i \neq j, i, j \in \{1,2,...,n\}$. Прямые изоклины $l_i^{m_i}, l_{n+i}^{m_i} (l_j^{m_j}, l_{n+j}^{m_j})$, принадлежащие множеству $M^{m_i}(M^{m_j})$, переведем в изоклины бесконечности (нуля) дифференциальной системы (обозначения переменных x и y оставляем неизменными)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a_i x + b_i y)(a_{n+i}x + b_{n+i}y + c_{n+i})P_{n-2}(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = (a_i x + b_i y + c_j)(a_{n+i}x + b_{n+i}y)Q_{n-2}(x,y), \end{cases} \tag{4}$$

где $c_j c_{n+i} \neq 0, a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i \neq 0, P_{n-2}(x,y), Q_{n-2}(x,y)$ – многочлены степени, не выше $n-2$.

В системе (4) $O(0,0)$ – особая точка, в которую преобразована особая точка системы (1), через которую проходят прямые изоклины множества $M_1 \cup M_2$. Предположим, что точка O – сложная особая точка системы (4). Тогда $P_{n-2}(0,0)Q_{n-2}(0,0) = 0$. Если $P_{n-2}(0,0) = 0 (Q_{n-2}(0,0) = 0)$, то прямая изоклина $a_{n+i}x + b_{n+i}y = 0 (a_i x + b_i y = 0)$ пересекает изоклину бесконечности (нуля) не более чем в $n-2$ точках. Но по доказанному на каждой прямой изоклине множества $M_1 \cup M_2$ система (1) имеет $n-1$ особых точек. Таким образом, доказано, что особая точка системы (1), расположенная на прямой изоклине множества $M_1 \cup M_2$, является простой.

Покажем, что и особая точка $W(x_0, y_0)$ системы (1), не принадлежащая ни одной прямой изоклине множества $M_1 \cup M_2$, является простой. Для этого, не умаляя общности, совершим параллельный перенос $x = \overline{x} + x_0, y = \overline{y} + y_0$ в системе (4), учитывая, что $W(x_0, y_0)$ – общая точка кривых $P_{n-2}(x,y) = 0$ и $Q_{n-2}(x,y) = 0$ (обозначения фазовых переменных оставляем неизменными):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (A_1 x + B_1 y)(\overline{a}_i x + \overline{b}_i y + \overline{c}_i)(\overline{a}_{n+i} x + \overline{b}_{n+i} y + \overline{c}_{n+i})P_{n-3}(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = (A_2 x + B_2 y)(\overline{a}_i x + \overline{b}_i y + \overline{c}_j)(\overline{a}_{n+i} x + \overline{b}_{n+i} y + \overline{c}_{n+j})Q_{n-3}(x,y), \end{cases} \tag{5}$$

где $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0, c_i \neq c_j, c_{n+i} \neq c_{n+j} \neq 0, \overline{c}_i \overline{c}_j \overline{c}_{n+i} \overline{c}_{n+j} \neq 0, P_{n-3}(x,y), Q_{n-3}(x,y)$ – многочлены степени, не выше $n-3$.

Пусть в результате перехода от системы (1) к системе (5) прямые изоклины множества $M_1 \cup M_2$ перешли в прямые изоклины множества $\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2$. Заметим, что ни одна из прямых изоклин $A_1 x + B_1 y = 0$ и $A_2 x + B_2 y = 0$ не параллельна ни прямым множества $\overline{M}_1$ и ни прямым множества $\overline{M}_2$, так как в противном случае допускается наличие во множестве $\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2$ таких прямых изоклин, на которых система (5) имеет n особых точек. Но это противоречит лемме [10].

Итак, каждая изоклина $A_1x + B_1y = 0$ и $A_2x + B_2y = 0$, проходящая через особую точку $(0,0)$ системы (5), проходит через n особых точек системы (5). Предположим, что $(0,0)$ – сложная особая точка. Тогда из вида правых частей уравнений системы (5) следует, что $P_{n-3}(0,0)Q_{n-3}(0,0) = 0$. Если $P_{n-3}(0,0) = 0$ $(Q_{n-3}(0,0) = 0)$, то прямая изоклина $A_2x + B_2y = 0$ ($A_1x + B_1y = 0$) пересекает изоклину бесконечности (нуля) системы (5) не более чем в $n-1$ точках. Но это противоречит тому, что на каждой прямой изоклине $A_sx + B_sy = 0$ $(s = 1,2)$ система (5) имеет n особых точек. Тем и доказано, что $W(x_0, y_0)$ – простая особая точка системы (1). Для полноты доказательства теоремы покажем, что через особую точку $(0,0)$ системы (5) проходят не более n прямых изоклин. Так как на прямой изоклине $A_1x + B_1y = 0$ кроме $(0,0)$ расположены еще $n-1$ особых точек, но при этом прямая $A_1x + B_1y = 0$ пересекает n параллельных прямых изоклин как множества $\overline{M}_1$, так и множества $\overline{M}_2$, то на прямой $A_1x + B_1y = 0$ индуцировано направление $m \in \{m_1, m_2, ..., m_n\}$. Аналогичный вывод можно сделать относительно прямой изоклины $A_2x + B_2y = 0$. Предположим теперь, что через особую точку $(0,0)$ системы (5) проходят не менее $n+1$ прямых изоклин. В силу того, что направления, индуцированные на прямых изоклинах, инцидентных особой точке $(0,0)$, принадлежат n-элементному множеству $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$, то среди прямых изоклин, проходящих через точку $(0,0)$, найдутся хотя бы две, на которых индуцировано одно и то же направление. Пришли к противоречию с тем, что $(0,0)$ – простая особая точка системы (5). Теорема доказана.

Следствие 1. Если дифференциальная система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^j \equiv P_2(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} b_{ij}x^i y^j \equiv Q_2(x,y) \end{cases} \tag{6}$$

имеет два двухэлементных множества прямых изоклин M_1 и M_2 со свойством (α), то число прямых изоклин этой системы равно пяти, а число особых точек – двум.

В самом деле, по теореме 3 система (6) имеет две особые точки F_1 и F_2 – вершины параллелограмма, образованного прямыми изоклинами множества $M_1 \cup M_2$. Так как любая прямая, проходящая через две особые точки системы (6), является ее изоклиной [12], то прямая F_1F_2 – изоклина системы (6). Система (6) не имеет особой точки, через которую не проходит ни одна прямая изоклина множества $M_1 \cup M_2$. Действительно, по лемме [10] на каждой прямой изоклине множества $M_1 \cup M_2$ система (6) имеет не более одной особой точки. Предположив существование особой точки G, не принадлежащей ни одной из прямых множества $M_1 \cup M_2$, мы тем самым допускаем, что G лежит на прямой F_1F_2. Это противоречит свойству системы (6) иметь на прямой не более двух особых точек. Следствие доказано.

Пример 1. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-x-1)(y+x-1), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-x-3)(y+x-3) \end{cases} \tag{7}$$

имеет два множества прямых изоклин

$$M_1 = \{y-x-1=0, y-x-3=0\}, M_2 = \{y+x-1=0, y+x-3=0\}$$

со свойством (α) и две особые точки $R(1;2), S(-1;2)$. Следовательно, прямая RS – изоклина системы (7). Других прямых изоклин, кроме RS и изоклин множества $M_1 \cup M_2$, система (7) не имеет. Она не имеет также особых точек, отличных от R и S.

Теорема 4. Пусть система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} a_{ij}x^i y^j \equiv P_3(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} b_{ij}x^i y^j \equiv Q_3(x,y) \end{cases} \tag{8}$$

имеет два трехэлементных множества прямых изоклин M_1 и M_2 со свойством (α). Тогда эта система имеет не более одной особой точки, которой инцидентна хотя бы одна прямая изоклина системы (8), но не инцидентна ни одна прямая изоклина множества $M_1 \cup M_2$.

Доказательство. По теореме 3 система (8) имеет шесть особых точек, через каждую из которых проходят две прямые изоклины множества $M_1 \cup M_2$, где $M_1 = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_2}, l_3^{m_3}\}, M_2 = \{l_4^{m_1}, l_5^{m_2}, l_6^{m_3}\}$. Пусть A – особая точка системы (8), через которую не проходит ни одна прямая изоклина множества $M_1 \cup M_2$, и L_A – пряма изоклина системы (8), инцидентная точке A. В процессе доказательства теоремы 3 установлено, что L_A пересекает все прямые изоклины множества $M_1 \cup M_2$ и на L_A индуцировано направление $m_A \in \{m_1, m_2, m_3\}$. Предположим, что наряду с особой точкой A система (8) имеет особую точку B, не принадлежащую ни одной прямой изоклине множества $M_1 \cup M_2$, и L_B – прямая изоклина системы (8), проходящая через точку B. Тогда на прямой L_B индуцировано направление $m_B \in \{m_1, m_2, m_3\}$. Прямая изоклина L_A проходит через две особые точки G_1 и G_2 – вершины параллелограмма, образованного четырьмя прямыми изоклинами множества $M_1 \cup M_2$. Так как G_1 и G_2 – простые особые точки системы (8), то L_B не проходит ни через одну из особых точек G_1 и G_2, и по теореме 4.5 [12] на L_A и L_B индуцировано одно и то же направление. Поскольку во множестве $M_1 \cup M_2$ имеются две прямые изоклины, на которых индуцировано то же направление, что и на прямых L_A и L_B, то система (8) имеет не менее четырех прямых изоклин, на которых индуцировано одно и то же направление. Пришли к противоречию с теоремой 1 [10]. Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть система (8) имеет два трехэлементных множества M_1 и M_2 прямых изоклин со свойством (α). Тогда число прямых изоклин этой системы не превосходит десяти, а число особых точек – не более семи.

В самом деле, по теореме 4 система (8) имеет не более одной особой точки, не принадлежащей ни одной прямой изоклине множества $M_1 \cup M_2$, а по теореме 3 через такую особую точку проходят не более трех прямых изоклин.

Пример 2. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(y+x-1)(y-x-2), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-1)(y+x-2)(y+2x) \end{cases} \tag{9}$$

имеет десять прямых изоклин, в том числе шесть очевидных главных изоклин, три изоклины $y-2=0, y+x=0, y+\frac{1}{2}x-1=0$, на которых индуцировано направление $m_2=1$. Таким образом, во множестве всех прямых изоклин системы (9) имеются два подмножества $M_1=\{y=0, y-1=0, y-2=0\}, M_2=\{y+x-1=0, y+x-2=0, y+x=0\}$, обладающие свойством (α). Нетрудно видеть, что система (9) имеет семь особых точек.

Теорема 5. Пусть система (8) имеет не менее девяти прямых изоклин, в том числе две параллельные прямые $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$ $(m_1 \neq m_2)$. Тогда во множестве всех прямых изоклин системы (8) найдется прямая изоклина $l_3^{m_3}$, параллельная прямым $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$, причем $(m_3-m_1)(m_2-m_1)\neq 0$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что существует прямая изоклина $l_3^{m_3}$, параллельная прямым $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$. Предположим противное. Тогда прямые $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$ пересекают не менее семи прямых изоклин. Учитывая теорему 1 и лемму из работы [10], можно утверждать, что на каждой прямой изоклине $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$ система (8) имеет две особые точки, причем через одну из них проходят четыре прямые изоклины (не считая $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$). Пусть особой точке $A \in l_1^{m_1}$ инцидентны четыре прямые изоклины, исключая $l_1^{m_1}$. Тогда через A проходят две прямые изоклины, на которых индуцировано направление m_2. Перенесем начало координат в особую точку A, а затем к полученной системе применим преобразование [4]:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \bar{y}, \\ y = m_1\bar{x} + m_2\bar{y}. \end{cases} \tag{10}$$

В результате получим систему (обозначения фазовых переменных оставляем неизменными)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a_1x+b_1y)(a_2x+b_2y)(a_3x+b_3y+c_3), \\ \dfrac{dy}{dt} = (a_3x+b_3y)Q_2(x,y), \end{cases} \tag{11}$$

где $c_3 \neq 0, Q_2(x,y)$ – многочлен не выше второй степени. Согласно работе [4] прямая изоклина $l_1^{m_1}$ системы (8) перешла в изоклину нуля $l: a_3x+b_3y=0$. Нетрудно видеть, что на прямой l система (11) имеет не более одной особой точки. Это противоречит установленному выше факту о наличии двух особых точек системы (8) на каждой из прямых изоклин $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$. Тем и доказано, что существует прямая изоклина $l_3^{m_3}$ системы (8), параллельная прямым $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$. Впрочем, по теореме 4 [11] $l_3^{m_3}$ – единственная прямая изоклина (8), параллельная прямым $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$.

Покажем, что $(m_3-m_1)(m_2-m_1)\neq 0$. Полагая противное, имеем условие $m_3=m_1$ или $m_3=m_2$. Если $m_3=m_1 (m_3=m_2)$, переведем прямые $l_3^{m_3}$ и $l_1^{m_1}$ ($l_3^{m_3}$ и $l_2^{m_2}$) в изоклины бесконечности, а прямую $l_2^{m_2}$ ($l_1^{m_1}$) в изоклину нуля системы (обозначения переменных x и y оставляем неизменными)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (ax+by+c_1)(ax+by+c_2)(Kx+Ly+N), \\ \dfrac{dy}{dt} = (ax+by+c_3)Q_2(x,y), \end{cases} \tag{12}$$

где $c_i \neq c_j$, если $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,3\}$, $Q_2(x,y)$ – многочлен не выше второй степени.

Из вида правых частей уравнений системы (12) следует, что эта система имеет на изоклине нуля $ax+by+c_3=0$ не более одной особой точки. Приходим к противоречию со следствием 2 [10], согласно которому через особую точку системы (8) проходят не более пяти прямых изоклин. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 5, доказанная нами выше, доказана в работе [11] (см. теорему 13) иным способом, а именно с использованием факта: если кубическая система имеет не менее семи прямых изоклин, то во множестве всех ее прямых изоклин содержатся только одноэлементные и трехэлементные подмножества.

Теорема 6. Существуют системы вида (8), имеющие три множества прямых изоклин M_1, M_2, M_3, каждое из которых обладает свойством (α) и состоит из трех прямых изоклин.

Доказательство. Рассмотрим систему (8), имеющую два трехэлементных множества M_1 и M_2 прямых изоклин, каждое из которых обладает свойством (α). Если система имеет менее девяти прямых изоклин, то ясно, что у этой системы не может быть трех трехэлементных множеств прямых изоклин со свойством (α). Поэтому полагаем, что система (8) имеет не менее девяти прямых изоклин. При доказательстве теоремы 3 установлено, что множество $M_1 \cup M_2$ определяет семейство множеств $\{M^{m_i}\}_{i=1}^{3}$, каждое из которых содержит две пересекающиеся прямые изоклины, на которых индуцировано одно и то же направление m_i. Выберем произвольным образом из этого семейства два множества M^{m_k} и M^{m_l}, где $m_k \neq m_l, m_k, m_l \in \{m_1, m_2, m_3\}$, и посредством линейного преобразования [4] переведем прямые изоклины множества M^{m_k} (M^{m_l}) в изоклины бесконечности (нуля) системы (обозначения фазовых переменных оставляем неизменными)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(A_1x+B_1y+C_1), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-k_1x-b_3)(y-k_2x-b_4)(A_2x+B_2y+C_2). \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $k_1 \neq k_2, b_1 \neq b_3, b_2 \neq b_4$.

Потребуем выполнения условий:

$$\frac{C_1}{B_1} = -b_5, \frac{C_2}{B_2} = -b_6, \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = -k_3, b_5 \neq b_6, (k_3-k_1)(k_3-k_2) \neq 0.$$

Тогда систему (13) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = B_1(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_5), \\ \dfrac{dy}{dt} = B_2(y-k_1x-b_3)(y-k_2x-b_4)(y-k_3x-b_6), \end{cases} \tag{14}$$

где $B_1B_2 \neq 0$.

В системе (13), а значит и в системе (14), считаем, что $l_1: y-k_1x-b_1=0, l_3: y-k_1x-b_3=0$ ($l_2: y-k_1x-b_2=0, l_4: y-k_1x-b_4=0$) – это те прямые изоклины, в которые в результате линейного преобразования перешли две прямые изоклины из множества $M_1(M_2)$. Ничто нам не мешает выбрать b_5 и b_6 так, чтобы на прямых l_5 и l_6 система (14) имела по две простые особые точки. По теореме 5 система (14) имеет прямую изоклину l_7, параллельную прямым l_5 и l_6. В силу леммы [10] l_7 не является главной изоклиной системы (14), а значит множество $M_3=\{l_5,l_6,l_7\}$ обладает свойством (α). Теорема доказана.

Пример 3. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(y-1)(y-x)(x-1), \\ \dfrac{dy}{dt}=y(y-x-1)(x-2) \end{cases} \tag{15}$$

имеет три множества прямых изоклин со свойством (α):

$$M_1=\{y=0, y-1=0, y-2=0\}, M_2=\{y-x=0, y-x-1=0, y-x+1=0\},$$
$$M_3=\{x=0, x-1=0, x-2=0\}.$$

Теорема 7. Система (8) имеет не более трех трехэлементных множеств прямых изоклин, каждое из которых обладает свойством (α).

Доказательство. Предположим, что система (8) имеет не менее четырех трехэлементных множеств прямых изоклин со свойством (α). Выберем из них произвольным образом четыре множества M_1, M_2, M_3, M_4. Каждая прямая изоклина множества M_i, $i\in\{1,2,3,4\}$, пересекается со всеми прямыми изоклинами множества M_j, $j\in\{1,2,3,4\}\backslash\{i\}$. Пусть на прямой $l\in M_i$ индуцировано направление m. По лемме [10] любой прямой изоклине множества $\bigcup_{s=1}^{4} M_s$ инцидентны две особые точки, которые являются простыми в силу теоремы 3. Поэтому в каждом множестве M_j, $j\in\{1,2,3,4\}\backslash\{i\}$, найдется в точности одна прямая изоклина, на которой индуцировано направление m. Иначе говоря, существует множество M^m, состоящее по меньшей мере из четырех прямых изоклин. Пришли к противоречию с теоремой 1 [10]. Теорема доказана.

Замечание 2. Доказательство теоремы 7 является более кратким и другим доказательством теоремы 14 [11].

Теорема 8. Если система (8) имеет три трехэлементных множества M_1, M_2, M_3 прямых изоклин со свойством (α), то число прямых изоклин этой системы равно девяти, а число особых точек – шести.

Доказательство. Так как система (8) имеет три трехэлементных множества прямых изоклин со свойством (α), то согласно утверждению 1 во множестве M всех прямых изоклин системы (8) есть три подмножества $M^{m_1}=\{l_1^{m_1}, l_4^{m_1}, l_7^{m_1}\}, M^{m_2}=\{l_2^{m_2}, l_5^{m_2}, l_8^{m_2}\}, M^{m_3}=\{l_3^{m_3}, l_6^{m_3}, l_9^{m_3}\}$. Не нарушая общности, считаем, что $M_1=\{l_1^{m_1},l_4^{m_2},l_7^{m_3}\},M_2=\{l_2^{m_1},l_5^{m_2},l_8^{m_3}\},M_3=\{l_3^{m_1},l_6^{m_2},l_9^{m_3}\}$. Посредством линейного невырожденного преобразования [4] переведем прямые изоклины множества $M^{m_1}(M^{m_2})$ в изоклины бесконечности (нуля) системы (обозначения фазовых переменных оставляем неизменными)

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=A(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_3),\\ \dfrac{dy}{dt}=B(y-k_1x-b_4)(y-k_2x-b_5)(y-k_3x-b_6).\end{cases}\tag{16}$$

Здесь $AB\neq 0,(k_1-k_2)(k_1-k_3)(k_2-k_3)\neq 0,(b_1-b_4)(b_2-b_5)(b_3-b_6)\neq 0$.

Покажем, что система (16) не имеет прямой изоклины, не принадлежащей множеству $M_1\cup M_2\cup M_3$. Предположим, что система (16) имеет прямую изоклину $l_{10}:y-k_4x-b_{10}=0$, на которой индуцировано направление m. По теореме 1 [10] $(m-m_1)(m-m_2)(m-m_3)\neq 0$. Кроме того, прямая l_{10} не параллельна ни одной из прямых изоклин множества $M_1\cup M_2\cup M_3=\overline{M}$, так как в противном случае во множестве $\overline{M}$ найдется прямая изоклина, проходящая через три особые точки. Это противоречит лемме [10]. Так как по определению l_{10} – изоклина системы (16), то имеет место равенство:

$$\begin{aligned}&B(y-k_1x-b_4)(y-k_2x-b_5)(y-k_3x-b_6)-\\&-mA(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_3)\equiv(y-k_4x-b_{10})R_2(x,y).\end{aligned}\tag{17}$$

Из теоремы 7 [11] и теоремы 3 следует, что $R_2(x,y)$ – многочлен второй степени. Из (17) с учетом того, что l_{10} пересекает две главные изоклины системы (16), получаем следующие тождества:

$$R_2(x,y)\equiv A_1x+B_1y+C_1+(y-k_1x-b_1)r_1(x,y)\,,\tag{18}$$

$$R_2(x,y)\equiv A_2x+B_2y+C_2+(y-k_2x-b_2)s_1(x,y)\,,\tag{19}$$

$$R_2(x,y)\equiv A_3x+B_3y+C_3+(y-k_3x-b_3)u_1(x,y)\,,\tag{20}$$

где $r_1(x,y),s_1(x,y),u_1(x,y)$ – линейные функции.

Из (18)-(20) следуют равенства:

$$A_1x+B_1y+C_1+(y-k_1x-b_1)r_1(x,y)\equiv A_2x+B_2y+C_2+(y-k_2x-b_2)s_1(x,y)\,,\tag{21}$$

$$A_1x+B_1y+C_1+(y-k_1x-b_1)r_1(x,y)\equiv A_3x+B_3y+C_3+(y-k_3x-b_3)u_1(x,y)\,.\tag{22}$$

Из (21) и (22) имеем

$$r_1(x,y)\equiv\alpha_1(y-k_2x-b_2)+\beta_1\,,\tag{23}$$

$$r_1(x,y)\equiv\alpha_3(y-k_3x-b_3)+\beta_3\,,\tag{24}$$

где $\alpha_1\alpha_3\neq 0$.

Приравнивая правые части (23) и (24), окончательно получаем равенство $k_2=k_3$, которое противоречит условию $(k_1-k_2)(k_1-k_3)(k_2-k_3)\neq 0$. Тем и доказано, что система (16) не имеет прямой изоклины, не принадлежащей множеству $M_1\cup M_2\cup M_3$.

Ссылка на теорему 3 завершает доказательство теоремы.

Замечание 3. Доказательство теоремы 8 является строгим доказательством следствия 5 [11].

Теорема 9. Если прямая l_1 проходит через n особых точек $A_1, A_2, ..., A_n$ системы (1), l_2 – прямая изоклина этой же системы, причем $\forall i \in \{1,2,...,n\} / A_i \notin l_2$, то на l_1 и l_2 индуцировано одно и то же направление.

Доказательство. Предположим, противное, то есть пусть m_i – направление, индуцированное на прямой $l_i, i = 1,2,$ при этом $m_1 \neq m_2$. Применим к системе (1) преобразование (10), которое в силу работы [4] переводит прямую l_1 в изоклину нуля $\bar{l}_1 : a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1 = 0$, а прямую l_2 – в изоклину бесконечности $\bar{l}_2 : a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2 = 0$ дифференциальной системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = (a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2)P_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} = (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)Q_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \tag{25}$$

где $P_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), Q_{n-1}(\bar{x}, \bar{y})$ – многочлены степени не выше $n-1$.

Так как l_1 проходит через n особых точек системы (1), то $\bar{l}_1$ проходит также через n особых точек системы (25). Следовательно, $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ пересекаются в особой точке системы (25). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 3. Пусть прямая l_1 проходит через две особые точки системы (6), ни одна из которых не принадлежит прямой изоклине l_2 этой же системы. Тогда на прямых l_1 и l_2 система (6) индуцирует одно и то же направление.

Следствие 4. Пусть прямая l_1 проходит через три особые точки системы (8), ни одна из которых не принадлежит прямой изоклине l_2 этой же системы. Тогда на прямых изоклинах l_1 и l_2 система (8) индуцирует одно и то же направление.

Замечание 4. Теоремы 2.9 и 4.5 [12] являются следствием теоремы 9.

Теорема 10. Пусть множество M всех прямых изоклин системы (8) имеет одно трехэлементное подмножество $M_1 = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}, l_3^{m_1}\}$ и одно двухэлементное подмножество $M_2 = \{l_4^{m_2}, l_5^{m_2}\}$, причем $l_4^{m_2} \parallel l_5^{m_2}$. Тогда при наличии хотя бы одного состояния равновесия эта система не имеет прямой изоклины $l_6^{m_3}$, такой что $l_6^{m_3} \parallel l_4^{m_2}$ и $(m_3 - m_2)(m_3 - m_1) \neq 0$.

Доказательство. В силу теоремы 1 [10] выполняется неравенство $m_1 \neq m_2$. С помощью преобразования (10) прямые изоклины множества $M_1(M_2)$ переведем в изоклины нуля (бесконечности) системы (обозначения переменных x и y оставляем неизменными)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - k_4x - b_4)^r (y - k_4x - b_5), \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta(y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_2)(y - k_3x - b_3), \end{cases} \tag{26}$$

где $(r-1)(r-2) = 0, b_4 \neq b_5, \beta \in R \setminus \{0\}$.

Пусть вопреки утверждению теоремы существует прямая изоклина $l_6^{m_3}$, где $l_6^{m_3} \parallel l_4^{m_2}$,

$(m_3 - m_2)(m_3 - m_1) \neq 0$. Пусть в результате применения к системе (8) преобразования (10) $l_6^{m_3}$ перешла в изоклину $l_6^{\overline{m}_3} : y - k_4 x - b_6 = 0$ системы (26). Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned}&\beta(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_3) \equiv \overline{m}_3(y-k_4x-b_4)^r(y-k_4x-b_5)+\\&+(y-k_4x-b_6)R_2(x,y),\end{aligned} \tag{27}$$

где $R_2(x,y)$ – многочлен не выше второй степени.

Так как система (26) имеет хотя бы одно состояние равновесия, то прямая $l_6^{\overline{m}_3}$ пересекает хотя бы одну из прямых изоклин нуля системы (26). Поэтому, полагая в равенстве (27) $y = k_4 x + b_6$, в правой его части получим постоянное число, а в левой части – многочлен не ниже первой степени относительно x. Это противоречие и доказывает теорему.

Теорема 11. Если система (26) имеет прямую изоклину $l_6^m : y - k_6 x - b_6 = 0, m \notin \{0, \infty\}$, то l_6^m пересекает не менее двух прямых изоклин нуля этой системы.

Доказательство. Предположим противное, то есть пусть $k_6 = k_1 = k_2$, тогда выполняется равенство

$$\begin{aligned}&\beta(y-k_6x-b_1)(y-k_6x-b_2)(y-k_3x-b_3) \equiv m(y-k_4x-b_4)^r(y-k_4x-b_5)+\\&+(y-k_6x-b_6)R_2(x,y),\end{aligned} \tag{28}$$

где $R_2(x,y)$ – многочлен не выше второй степени.

Полагая в равенстве (28) $y = k_6 x + b_6$ и учитывая теорему 10, приходим к выводу, что левая часть полученного тождества есть многочлен не выше первой степени, а правая часть – многочлен не ниже второй степени относительно x. Теорема доказана.

Теорема 12. Если система (26) имеет прямую изоклину $l_6^m : y - k_6 x - b_6 = 0, m \notin \{0, \infty\}$, то ни одна из ее изоклин нуля не параллельна изоклинам бесконечности.

Доказательство. Предположим, что вопреки утверждению теоремы $k_6 = k_1$ и l_6^m – изоклина системы (26). Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned}&\beta(y-k_4x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_3) \equiv m(y-k_4x-b_4)^r(y-k_4x-b_5)+\\&+(y-k_6x-b_6)R_2(x,y),\end{aligned} \tag{29}$$

где $R_2(x,y)$ – многочлен не выше второй степени.

Пусть в равенстве (29) $y = k_4 x + b_1$, тогда в левой его части имеем нуль, а в правой – многочлен не ниже первой степени относительно x. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 13. Если через особую точку системы (26) проходят три прямые изоклины нуля, то эта система не имеет прямой изоклины $l_6^m : y - k_6 x - b_6 = 0, m \notin \{0, \infty\}$.

Доказательство. Не сужая общности, рассмотрим вместо (26) систему

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = \beta(y-k_4x)^{r_1}(y-k_4x-b_5)^{r_2},\\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = (y-k_1x)(y-k_2x)(y-k_3x),\end{cases} \tag{30}$$

где $\beta b_5 \neq 0, \quad r_1, r_2 \in \{1,2\}, \quad r_1 + r_2 \in \{2,3\}, \quad (k_1 - k_2)(k_1 - k_3)(k_2 - k_3) \neq 0$.

Пусть $l_6^m : y - k_6 x - b_6 = 0$ – изоклина системы (30), то есть имеет место тождество:

$$\begin{aligned}&(y-k_1x)(y-k_2x)(y-k_3x) \equiv m\beta(y-k_4x)^{r_1}(y-k_4x-b_5)^{r_2} + \\ &+(y-k_6x-b_6)R_2(x,y),\end{aligned} \tag{31}$$

где $R_2(x,y)$ – многочлен не выше второй степени.

По теореме 12 $k_4 \neq k_i \ \forall i \in \{1,2,3\}$. Поэтому при $y = k_4 x$ левая часть (31) есть одночлен третьей степени относительно x, а следовательно, $b_6 = 0$. Таким образом, через особую точку $(0,0)$ системы (30), кроме трех изоклин нуля, проходит еще и прямая изоклина $l_6^m : y - k_6 x = 0$. Приходим к противоречию с тем, что на прямой изоклине $y - k_4 x - b_5 = 0$ система (30) имеет не более трех особых точек. Теорема доказана.

Теорема 14. Пусть система (26) имеет три различные изоклины нуля, две из которых проходят через одну и ту же особую точку этой системы. Тогда (26) имеет не более одной прямой изоклины, не являющейся главной.

Доказательство. Пусть $l_6^{m_1} : y - k_6 x - b_6 = 0$ – изоклина системы (26), причем $m_1 \notin \{0,\infty\}$. Кроме того, пусть система (26) имеет три прямые изоклины нуля, две из которых проходят через одну и ту же особую точку этой системы. Тогда не уменьшая общности, будем рассматривать систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \beta(y-k_4x)^{r_1}(y-k_4x-b_5)^{r_2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-k_1x)(y-k_2x)(y-k_3x-b_3), \end{cases} \tag{32}$$

где $\beta b_3 b_5 \neq 0, \quad r_1, r_2 \in \{1,2\}, \quad r_1 + r_2 \in \{2,3\}, \quad k_1 \neq k_2$.

Так как $l_6^{m_1}$ – изоклина системы (32), то справедливо равенство

$$\begin{aligned}&(y-k_1x)(y-k_2x)(y-k_3x-b_3) \equiv m_1\beta(y-k_4x)^{r_1}(y-k_4x-b_5)^{r_2} + \\ &+(y-k_6x-b_6)R_2(x,y),\end{aligned} \tag{33}$$

где $R_2(x,y)$ – многочлен не выше второй степени.

По теореме 12 $k_4 \neq k_i \ \forall i \in \{1,2,3\}$, поэтому, полагая в равенстве (33) $y = k_4 x$, убеждаемся в том, что $b_6 = 0$. Предположим, что система (32), кроме $l_6^{m_1}$, имеет еще одну прямую изоклину $l_7^{m_2}, m_2 \notin \{0,\infty\}$. Тем самым мы допускаем, что через особую точку $(0,0)$ системы (32) проходят, кроме двух изоклин нуля $y - k_1 x = 0$ и $y - k_2 x = 0$, еще две прямые изоклины $l_6^{m_1}$ и $l_7^{m_2}$. Это означает, что на прямой изоклине $l_5^0 : y - k_4 x - b_5 = 0$ система (32) имеет не менее четырех особых точек. Полученное противоречие доказывает теорему.

Примечания:

1. Чересиз В.М. Об изоклинах полиномиальных векторных полей // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35, № 6. С. 1390-1396.
2. Шахова Л.В. О прямых изоклинах // Труды Самаркандского гос. ун-та им. Алишера Навои.

References:

1. Cheresiz V.M. On isoclines of polynomial vector fields // The Siberian mathematical journal. 1994. Vol. 35, No. 6. P. 1390-1396.
2. Shakhova L.V. On straight isoclines // Works of Samarkand State Un-ty of Alisher Navoi. Samar-

Самарканд: Изд-во гос. ун-та, 1964. Вып. 144. С. 93-95.

3. Ушхо Д.С., Горних М.И. Прямые изоклины и канонические формы квадратичной дифференциальной системы на плоскости // Труды ФОРА. 2002. № 7. С. 72-82. URL: http://I.adygnet.ru
4. Ушхо Д.С. О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы // Труды ФОРА. 2003. № 8. С. 7-21. URL: http://I.adygnet.ru
5. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. О прямых изоклинах кубических систем на плоскости // Вестник ИЖГТУ. 2009. № 4 (44). С. 186-189.
6. Ушхо А.Д., Тлячев В.Б., Ушхо Д.С. Прямые изоклины полиномиальных дифференциальных систем на плоскости // Материалы международной конференции к 100-летию со дня рождения академика Н.Н.Боголюбова, 8-13 июня 2009 г. Черновцы: Изд-во ЧГУ, 2009. С. 215-217.
7. Ушхо А.Д. О прямых изоклинах квадратичной системы // СамДиф-2009. Дифференциальные уравнения и их приложения: тез. докл. Всерос. конф., 29 июня - 2 июля 2009 г. Самара: Изд-во СГУ, 2009. С. 60-61.
8. Ушхо А.Д. Параллельные прямые изоклины кубичных дифференциальных систем на плоскости // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2009. Вып. 2 (49). С. 16-25. URL: http://vestnik.adygnet.ru
9. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. К вопросу о прямых изоклинах полиномиальных дифференциальных систем на плоскости // Вестник Нижегородского университета. Сер. Математика. 2010. № 1. С. 156-162.
10. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Оценка числа прямых изоклин полиномиальных векторных полей на плоскости // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2013. Вып. 3 (122). С. 18-27. URL: http://vestnik.adygnet.ru
11. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Прямые изоклины и особые точки кубических дифференциальных систем на плоскости // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2010. Вып. 1 (53). С. 32-55. URL: http://vestnik.adygnet.ru
12. Ушхо Д.С. Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Майкоп, 2007. 93 с.

kand: Un-ty Publishing House, 1964. Iss. 144. P. 93-95.

3. Ushkho A.D., Gornikh M.I. Straight isoclines and canonical forms of the quadric differential system on the plane // Proceedings of Physical Society of Adyghea Republic. 2002. No. 7. P. 72-82. URL: http://fora.adygnet.ru
4. Ushkho D.S. On straight-line isoclines of cubic differential system // Proceedings of I. 2003. No. 8. P. 7-21. URL: http://I.adygnet.ru
5. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. On straight isoclines of cubic systems on the plane // IZhSTU Bulletin. 2009. No. 4 (44). P. 186-189.
6. Ushkho A.D., Tlyachev V.B., Ushkho D.S. The straight isoclines of polynomial differential systems on the plane // Materials of the international conference to the 100 anniversary of Academician Bogolyubov N.N., June 8-13, 2009. Chernovtsy: ChGU Publishing House, 2009. P. 215-217.
7. Ushkho A.D. On straight isoclines of the quadric system // SamDif-2009. Differential equations and their applications: theses of reports all-Russia conf., June, 29 - July, 2. 2009. Samara: SSU, 2009. P. 60-61.
8. Ushkho A.D. Parallel straight-line isoclines of planar cubic differential systems // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2009. Iss. 2 (49). P. 16-25. URL: http://vestnik.adygnet.ru
9. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. On the problem of straight isoclines of polynomial differential systems on the plane // Bulletin of Nizhny Novgorod University. Ser. Mathematics. 2010. No. 1. P. 156-162.
10. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. Assessment of the number of straight-line isoclines of the polynomial vector fields on the plane // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2013. Iss. 3 (122). P. 18-27. URL: http://vestnik.adygnet.ru
11. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. Straight-line isoclines and singular points of plane cubic differential systems // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2010. Iss. 1 (53). P. 32-55. URL: http://vestnik.adygnet.ru
12. Ushkho D.S. Straight isoclines and canonical forms of polynomial differential systems on the plane. Maikop, 2007. 93 pp.