УДК 517.925.5
ББК 22.161.1
С 78

Сташ А.Х.
Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-05, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

О существенных значениях частот решений линейного дифференциального периодического уравнения третьего порядка

(Рецензирована)

Аннотация. *Для любого наперед заданного натурального числа N приводится линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с периодическими коэффициентами, множество полных (векторных) частот нетривиальных решений которого состоит не менее чем из N различных существенных чисел.*

Ключевые слова: *линейное дифференциальное уравнение, колеблемость решений, число нулей функции, полная частота, векторная частота.*

Stash A.Kh.
Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics, Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-05, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

On essential values of frequencies of solutions of the third order linear differential periodic equation

Abstract. *The third order linear differential equation with periodic coefficients is given for any beforehand set natural number N. The set of its full (vector) frequencies of uncommon solutions consists of not less than N various essential numbers.*

Keywords: *linear differential equation, variability of solutions, number of function zeros, full frequency, vector frequency.*

Введение

Для заданного натурального n обозначим через E^n множество линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \qquad t \in R^+ \equiv [0;\infty),$$

с ограниченными непрерывными коэффициентами, образующими строку

$$a \equiv (a_1,...,a_n)\colon R^+ \to R^n$$

(каждую такую строку будем отождествлять с соответствующим уравнением). Пространство решений уравнения $a \in E^n$ обозначим через $S(a)$, а его подмножество ненулевых решений – $S_*(a)$.

Определение 1 [1]. Скалярной частотой нулей решения $y \in S_*(a)$ уравнения $a \in E^n$ будем называть величину

$$\nu(y) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t} \nu(y,t),$$

где $\nu(y,t)$ – число нулей функции y на промежутке $(0;t]$.

Определение 2 [2]. Каждому решению $y \in S_*(a)$ уравнения $a \in E^n$ поставим в соответствие его полную и векторную частоты

$$\sigma(y) \equiv \inf_{m\in R^n} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu(y,m,t), \quad \zeta(y) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in R^n} \frac{\pi}{t}\nu(y,m,t),$$

где $\nu(y,m,t)$ – число нулей при $\tau \in (0;t]$ скалярного произведения $\langle \psi y(\tau), m\rangle$, $\psi y \equiv \left(y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)}\right)$.

К определениям 1 и 2 добавим обозначения

$$v(y,t,s) \equiv v(y,t) - v(y,s), \quad v(y,m,t,s) \equiv v(y,m,t) - v(y,m,s).$$

Определение 3 [3, 4]. Множество всех значений показателя $\lambda : S_*(a) \to R$ назовем спектром этого показателя уравнения $a \in E^n$. Значение показателя, принадлежащее спектру уравнения $a \in E^n$, назовем:

а) метрически существенным, если оно принимается на решениях $y \in S_*(a)$ множество наборов

$$\left(y(0), \dot{y}(0), ..., y^{(n-1)}(0)\right) \in R^n \tag{1}$$

начальных значений которых содержит множество положительной меры Лебега в R^n;

б) топологически существенным, если оно принимается на решениях $y \in S_*(a)$, множество наборов (1) начальных значений которых, пересеченное с некоторым открытым подмножеством $U \subset R^n$, служит дополнением в U к множеству первой категории Бэра.

В докладах [3, 4] И.Н. Сергеева было установлено, что:

– спектры полной и векторной частот любого линейного автономного уравнения содержат одно существенное значение;

– спектр скалярной частоты нулей линейного автономного уравнения не более третьего порядка может содержать максимум два существенных значения;

– спектр скалярной частоты нулей линейного автономного уравнения более третьего порядка может содержать любое наперед заданное число существенных значений.

В работе [5] доказано существование линейного дифференциального уравнения третьего порядка с непрерывными ограниченными коэффициентами, спектры скалярной частоты нулей, полной и векторной частот которого содержат одно и то же счетное множество метрически и топологически существенных значений.

В докладе [6] М.В. Смоленцева была анонсирована теорема о существовании линейного дифференциального периодического уравнения третьего порядка с любым наперед заданным числом существенных значений скалярной частоты нулей. В связи с этим возникал вопрос: существует ли линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с периодическими коэффициентами, спектры полной и векторной частот которого содержали бы любое наперед заданное число метрически или топологически существенных значений? Этому вопросу посвящена настоящая работа.

Вспомогательные результаты

Имеют место следующие

Лемма 1 [1]. Пусть последовательность положительных чисел $t_1 < t_2 < ...$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1.$$

Тогда для любого решения $y \in S_*(a)$ любого уравнения $a \in E^n$ справедливы равенства:

$$\nu(y) \equiv \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\pi}{t_k} \nu(y,t_k)\ ,$$

$$\sigma(y) \equiv \inf_{m\in R^n} \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\pi}{t_k} \nu(y,m,t_k), \quad \zeta(y) \equiv \overline{\lim_{k\to+\infty}} \inf_{m\in R^n} \frac{\pi}{t_k} \nu(y,m,t_k)\ .$$

Лемма 2. Для любого $k \in N$ найдется уравнение $a_k \in E^3$, фундаментальная система решений x, y, z которого удовлетворяет следующим условиям:

$$(x,y,z)(t) = \begin{cases} (\exp(-\cos t) + \alpha, 1, \sin t), & 0 \le t \le (2k+1)\pi, \\ (\exp(-\cos t) + \alpha + 3, 1, \sin t), & t \ge (2k+4)\pi, \end{cases}$$

$$\nu(x(t) - \alpha - 1, (2k+4)\pi, (2k+1)\pi) = \nu(x(t) - \alpha - 4, (2k+4)\pi, (2k+1)\pi) = 0, \qquad (2)$$

где α – произвольное число.

Лемма 3. Для любого $k \in N$ найдется уравнение $a_k \in E^3$, фундаментальная система решений x, y, z которого удовлетворяет следующим условиям:

$$(x,y,z)(t) = \begin{cases} (\exp(-\cos t) + \alpha + 3, 1, \sin t), & 0 \le t \le 2\pi k, \\ (\exp(-\cos t) + \alpha, 1, \sin t), & t \ge 2\pi k + 3\pi, \end{cases}$$

$$\nu(x(t) - \alpha - 1, 2\pi k + 3\pi, 2\pi k) = \nu(x(t) - \alpha - 4, 2\pi k + 3\pi, 2\pi k) = 0,$$

где α – произвольное число.

Доказательство леммы 2.

1. Для набора функций

$$f_1(t) = \exp(-\cos t) + \alpha, \qquad f_2(t) = 1, \qquad f_3(t) = \sin t$$

определитель Вронского

$$W_{f_1,f_2,f_3}(t) = \begin{vmatrix} \exp(-\cos t) + \alpha & 1 & \sin t \\ \sin t \exp(-\cos t) & 0 & \cos t \\ (\cos t + \sin^2 t)\exp(-\cos t) & 0 & -\sin t \end{vmatrix} = \exp(-\cos t)(1 + \sin^2 t \cos t)$$

при любом $t \ge 0$ положителен, а линейное однородное уравнение, решениями которого они являются, имеет вид (см. [7]):

$$\begin{vmatrix} \exp(-\cos t) + \alpha & 1 & \sin t & y \\ \sin t \exp(-\cos t) & 0 & \cos t & \dot{y} \\ (\cos t + \sin^2 t)\exp(-\cos t) & 0 & -\sin t & \ddot{y} \\ (\sin^3 t + 3\sin t \cos t - \sin t)\exp(-\cos t) & 0 & -\cos t & \dddot{y} \end{vmatrix} = 0\ .$$

Раскладывая в последнем равенстве определитель по элементам последнего столбца, получим

$$W_{f_1,f_2,f_3}(t) \cdot \dddot{y} - \Delta_1(t) \cdot \ddot{y} + \Delta_2(t) \cdot \dot{y} = 0$$

или

$$\dddot{y} - \frac{\Delta_1(t)}{W_{f_1,f_2,f_3}(t)} \cdot \ddot{y} + \frac{\Delta_2(t)}{W_{f_1,f_2,f_3}(t)} \cdot \dot{y} = 0, \qquad (3)$$

где

$$\varDelta_1(t)=\begin{vmatrix}\exp(-\cos t)+\alpha & 1 & \sin t\\ \sin t\exp(-\cos t) & 0 & \cos t\\ (\sin^3 t+3\sin t\cos t-\sin t)\exp(-\cos t) & 0 & -\cos t\end{vmatrix}=\exp(-\cos t)(\cos t\sin^3 t+3\sin t\cos^2 t)\,,$$

$$\varDelta_2(t)=\begin{vmatrix}\exp(-\cos t)+\alpha & 1 & \sin t\\ \left(\cos t+\sin^2 t\right)\exp(-\cos t) & 0 & -\sin t\\ (\sin^3 t+3\sin t\cos t-\sin t)\exp(-\cos t) & 0 & -\cos t\end{vmatrix}=\exp(-\cos t)(1-2\cos t\sin^2 t-\sin^4 t)\,.$$

2. Для заданного $k\in N$ введем обозначения:

$$T_1\equiv(2k+1)\pi,\quad T_2\equiv T_1+\pi,\quad T_3\equiv T_1+2\pi,\quad T_4\equiv T_1+3\pi.$$

На отрезке $[T_1,T_4]$ выберем непрерывно трижды дифференцируемую функцию $\theta(t)$, убывающую на интервалах (T_1,T_2), (T_3,T_4), возрастающую на (T_2,T_3), имеющую перегибы в точках

$$s_1\equiv T_1+\pi/2,\quad s_2\equiv T_2+\pi/2,\quad s_3\equiv T_3+\pi/2$$

и обладающую свойствами

$$\theta(T_1)=f_1(T_1),\quad \theta(T_2)=\alpha+2,$$

$$\theta(T_3)=\alpha+3{,}5,\quad \theta(T_4)=f_1(T_4)+3,$$

$$\theta'(T_1)=f_1'(T_1),\quad \theta''(T_1)=f_1''(T_1),\quad \theta'''(T_1)=f_1'''(T_1),$$

$$\theta'(T_4)=f_1'(T_4),\quad \theta''(T_4)=f_1''(T_4),\quad \theta'''(T_4)=f_1'''(T_4).$$

Определитель Вронского системы функций $\theta(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ на отрезке $[T_1,T_4]$ равен

$$W_{\theta,f_2,f_3}(t)=\begin{vmatrix}\theta(t) & 1 & \sin t\\ \theta'(t) & 0 & \cos t\\ \theta''(t) & 0 & -\sin t\end{vmatrix}=\theta'(t)\sin t+\theta''(t)\cos t.$$

Из вида функции $\theta(t)$ следует, что функции

$$g_1(t)=\theta'(t)\sin t,\quad g_2(t)=\theta''(t)\cos t,\quad t\in[T_1,T_4],$$

принимают неотрицательные значения. А поскольку эти функции на отрезке $[T_1,T_4]$ одновременно в нуль не обращаются, то имеет место неравенство

$$W_{\theta,f_2,f_3}(t)>0,\quad t\in[T_1,T_4].$$

3. Таким образом, положительность определителя Вронского системы трижды непрерывно дифференцируемых функций

$$x(t)=\begin{cases}f_1(t), & t\le T_1,\\ \theta(t), & t\in[T_1,T_4],\\ f_1(t)+3, & t\ge T_4,\end{cases}\quad y(t)\equiv 1,\quad z(t)\equiv\sin t$$

позволяет восстановить уравнение третьего порядка, решением которого она является, совпадающим на $[0,T_1]\cup[T_4,+\infty)$ с уравнением (3).

4. Так как функция $\theta(t)$ на отрезке $[T_1,T_4]$ принимает свои наибольшее и наименьшее значения соответственно в точках T_2, T_3, то справедливы оценки:

$$x(t)\ge\theta(T_2)=\alpha+2,\quad x(t)\le\theta(T_3)=\alpha+3{,}5,\quad \forall t\in[T_1,T_2],$$

на основании которых на отрезке $[T_1, T_4]$ имеем:

$$x(t)-\alpha-1=\theta(t)-\alpha-1\geq\alpha+2-\alpha-1=1,$$
$$x(t)-\alpha-4=\theta(t)-\alpha-4\leq\alpha+3{,}5-\alpha-4=-0{,}5.$$

Последние две оценки устанавливают справедливость равенства (2).

Лемма 2 полностью доказана.

Доказательство леммы 3 проводится аналогично.

Основной результат

Теорема. Для любого натурального N найдется уравнение $a\in E^n$, имеющее набор решений $y_1, y_2,..., y_N$, удовлетворяющий условиям

$$\nu(y_i)=\sigma(y_i)=\zeta(y_i),\quad i=1,2,...,N,$$
$$\sigma(y_i)\neq\sigma(y_i),\quad i\neq j,$$

причем все эти значения частот являются метрически и топологически существенными.

Эта теорема, анонсированная в докладе [8] и развивающая результаты доклада [9], обобщает теорему 1 [6] на большее число разновидностей частот.

Доказательство теоремы.

1. Пусть задано N. Определим множество точек

$$0\equiv t_0<t_1<t_2<...<t_{2N-1}$$

так, что

$$T\equiv 3\pi,\quad t_1\equiv 3\pi,\quad t_2\equiv t_1+T+5\pi,\quad t_3\equiv t_2+T+7\pi,...,$$
$$t_{N-2}\equiv t_{N=3}+T+(2N-3)\pi,\quad t_{N-1}\equiv t_{N-2}+T+(2N-1)\pi,$$
$$t_N\equiv t_{N-1}+T+2(2N+1)\pi,\quad t_{N+1}\equiv t_N+T+(2N-1)\pi,$$
$$t_{N+2}\equiv t_{N+1}+T+(2N-3)\pi,\quad t_{N+3}\equiv t_{N+2}+T+(2N-5)\pi,...,$$
$$t_{2N-2}\equiv t_{2N-3}+t+5\pi,\quad t_{2N-1}\equiv t_{2N-2}+T+3\pi.$$

Поэтому

$$t_{2N-1}\equiv 2(3\pi+5\pi+7\pi+\cdots+(2N+1)\pi)+2(N-1)T=2\pi(N^2+5N-3).$$

2. На каждом из промежутков

$$[0,t_1],\quad [t_1+T,t_2],\quad [t_2+T,t_3],...,[t_{2N-2}+T,t_{2N-1}]$$

зададим фундаментальные системы решений уравнения (3) с положительными определителями Вронского. На отрезке $[0,t_{2N-1}]$ построим уравнение a^1 в соответствии с леммами 2, 3 следующим образом:

– прежде всего, на участке $[t_1, t_1+T]$ возьмем уравнение, переводящее набор

$$(\exp(-\cos t)+2,1,\sin t)\tag{4}$$

решений, заданных слева от точки t_1, в набор

$$(\exp(-\cos t)+5,1,\sin t)\tag{5}$$

решений, заданных справа от точки t_1+T (здесь и далее первое решение начального набора переходит в первое решение конечного набора, второе – во второе, а третье – в третье);

– теперь на участке $[t_2, t_2+T]$ возьмем уравнение, переводящее набор (5) решений, заданных слева от точки t_2, в набор

$$(\exp(-\cos t)+8,1,\sin t) \tag{6}$$

решений, заданных справа от точки t_2+T;

– и т.д.;

– на участке $[t_{N-1},t_{N-1}+T]$ возьмем уравнение, переводящее набор

$$(\exp(-\cos t)+3N-4,1,\sin t) \tag{7}$$

решений, заданных слева от точки t_{N-1}, в набор

$$(\exp(-\cos t)+3N-1,1,\sin t) \tag{8}$$

решений, заданных справа от точки $t_{N-1}+T$;

– после этого на участке $[t_N,t_N+T]$ возьмем уравнение, переводящее набор (8) решений, заданных слева от точки t_N, в набор (7) решений, заданных справа от точки t_N+T;

– на участке $[t_{N+1},t_{N+1}+T]$ возьмем уравнение, переводящее последний набор (7) решений, заданных слева от точки t_{N+1}, в набор

$$(\exp(-\cos t)+3N-7,1,\sin t)$$

решений, заданных справа от точки $t_{N+1}+T$;

– и т.д.;

– далее, на участке $[t_{2N-3},t_{2N-3}+T]$ возьмем уравнение, переводящее набор (6) решений, заданных слева от точки t_{2N-3}, в набор (5) решений, заданных справа от точки $t_{2N-3}+T$;

– наконец, на участке $[t_{2N-2},t_{2N-2}+T]$ возьмем уравнение, переводящее набор (5) решений, заданных слева от точки t_{2N-2}, в набор (4) решений, заданных справа от точки $t_{2N-2}+T$.

Таким образом, фундаментальная система решений построенного на отрезке $[0,t_{2N-1}]$ уравнения $a^1\in\varepsilon^3$ удовлетворяет условиям

$$(x_1,x_2,x_3)(t)=\begin{cases}(\exp(-\cos t)+2,1,\sin t), & 0\le t\le t_1,\\ (\exp(-\cos t)+5,1,\sin t), & t_1+T\le t\le t_2,\\ \dots\dots\dots\dots & \\ (\exp(-\cos t)+3N-4,1,\sin t), & t_{N-2}+T\le t\le t_{N-1},\\ (\exp(-\cos t)+3N-1,1,\sin t), & t_{N-1}+T\le t\le t_N,\\ (\exp(-\cos t)+3N-4,1,\sin t), & t_N+T\le t\le t_{N+1},\\ \dots\dots\dots\dots & \\ (\exp(-\cos t)+5,1,\sin t), & t_{2N-3}+T\le t\le t_{2N-2},\\ (\exp(-\cos t)+2,1,\sin t), & t_{2N-2}+T\le t\le t_{2N-1}.\end{cases}$$

3. Зададим последовательность

$$s_0\equiv 0,\quad s_i=s_{i-1}+t_{2N-1},\quad i\in N,$$

обладающую свойством

$$\lim_{i\to\infty}s_i=+\infty,\quad \lim_{i\to\infty}\frac{s_i}{s_{i-1}}=\lim_{i\to\infty}\left(1+\frac{t_{2N}}{s_{i-1}}\right)=1.$$

Благодаря тому, что s_1 кратно 2π, а функции $\exp(-\cos t)+2, \sin t$ являются 2π периодическими, можно определить на R^+ следующую фундаментальную систему:

$$(z_1, z_2, z_3)(t) = \begin{cases} (x_1, x_2, x_3)(t), & 0 \le t \le s_1, \\ (x_1, x_2, x_3)(t - s_1), & s_1 \le t \le s_2, \\ (x_1, x_2, x_3)(t - s_2), & s_2 \le t \le s_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

являющуюся решением уравнения

$$a(t) = \begin{cases} a^1(t), & 0 \le t \le s_1, \\ a^1(t - s_1), & s_1 \le t \le s_2, \\ a^1(t - s_2), & s_2 \le t \le s_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

с непрерывными ограниченными s_1-периодическими коэффициентами.

4. Для вычисления скалярной частоты произвольного периодического решения $y \in S_*(a)$ определим числа

$$L(y) \equiv \nu(y, s_1), \quad l(y) \equiv \inf_{m \in R^n} \nu(y, m, s_1), \tag{9}$$

тогда по лемме 1 имеем равенство

$$\nu(y) = \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{\pi}{s_p} \nu(y, s_p) = \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{\pi \sum_{i=1}^{p} \nu(y, s_i, s_{i-1})}{s_1 p} = \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{\pi p \nu(y, s_1)}{s_1 p} = \frac{\pi \nu(y, s_1)}{s_1} = \frac{\pi}{s_1} \cdot L(y),$$

а также равенства

$$\sigma(y) = \inf_{m \in R^n} \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{\pi}{s_p} \nu(y, m, s_p) = \inf_{m \in R^n} \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{\pi \sum_{i=1}^{p} \nu(y, m, s_i, s_{i-1})}{s_1 p} =$$

$$= \inf_{m \in R^n} \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{\pi p \nu(y, m, s_1)}{p s_1} = \frac{\pi}{s_1} \inf_{m \in R^n} \nu(y, m, s_1) = \frac{\pi}{s_1} l(y),$$

$$\zeta(y) = \overline{\lim_{p\to\infty}} \inf_{m \in R^n} \frac{\pi}{s_p} \nu(y, m, s_p) = \overline{\lim_{p\to\infty}} \inf_{m \in R^n} \frac{\pi \sum_{i=1}^{p} \nu(y, m, s_i, s_{i-1})}{s_1 p} =$$

$$= \overline{\lim_{p\to\infty}} \inf_{m \in R^n} \frac{\pi p \nu(y, m, s_1)}{p s_1} = \frac{\pi}{s_1} \inf_{m \in R^n} \nu(y, m, s_1) = \frac{\pi}{s_1} l(y).$$

Итак, получили равенства

$$\nu(y) = \frac{\pi}{s_1} \cdot L(y), \quad \sigma(y) = \zeta(y) = \frac{\pi}{s_1} \cdot l(y). \tag{10}$$

5. В силу равенств (10) вычисление частот решений, построенного уравнения, сводится к подсчету величин (9), а для этого достаточно знать поведение решений на промежутке $(0, s_1]$. Из множества $y \in S_*(a)$ выделим N следующих решений

$$y_1(t) \equiv (z_1 - 3z_2)(t) = \begin{cases} \exp(-\cos t) - 1, & 0 \le t \le t_1, \\ \exp(-\cos t) + 2, & t_1 + T \le t \le t_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \exp(-\cos t) + 3N - 7, & t_{N-2} + T \le t \le t_{N-1}, \\ \exp(-\cos t) + 3N - 4, & t_{N-1} + T \le t \le t_N, \\ \exp(-\cos t) + 3N - 7, & t_N + T \le t \le t_{N+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \exp(-\cos t) + 2, & t_{2N-3} + T \le t \le t_{2N-2}, \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_{2N-2} + T \le t \le t_{2N-1}, \end{cases}$$

$$y_2(t) \equiv (z_1 - 6z_2)(t) = \begin{cases} \exp(-\cos t) - 4, & 0 \le t \le t_1, \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_1 + T \le t \le t_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \exp(-\cos t) + 3N - 10, & t_{N-2} + T \le t \le t_{N-1}, \\ \exp(-\cos t) + 3N - 7, & t_{N-1} + T \le t \le t_N, \\ \exp(-\cos t) + 3N - 10, & t_N + T \le t \le t_{N+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_{2N-3} + T \le t \le t_{2N-2}, \\ \exp(-\cos t) - 4, & t_{2N-2} + T \le t \le t_{2N-1}, \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_N(t) \equiv (z_1 - 3Nz_2)(t) = \begin{cases} \exp(-\cos t) + 2 - 3N, & 0 \le t \le t_1, \\ \exp(-\cos t) + 5 - 3N, & t_1 + T \le t \le t_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \exp(-\cos t) - 4, & t_{N-2} + T \le t \le t_{N-1}, \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_{N-1} + T \le t \le t_N, \\ \exp(-\cos t) - 4, & t_N + T \le t \le t_{N+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \exp(-\cos t) + 5 - 3N, & t_{2N-3} + T \le t \le t_{2N-2}, \\ \exp(-\cos t) + 2 - 3N, & t_{2N-2} + T \le t \le t_{2N-1}. \end{cases}$$

6. Если для каждого $i = 1, 2, ..., N$ определить величины

$$\omega(y_i) \equiv \nu(y_i, t_1, 0) + \nu(y_i, t_2, t_1 + T) + \cdots + \nu(y_i, t_{2N}, t_{2N-1} + T),$$

$$\omega(y_i, m) \equiv \nu(y_i, m, t_1, 0) + \nu(y_i, m, t_2, t_1 + T) + \cdots + \nu(y_i, m, t_{2N}, t_{2N-1} + T),$$

$$\omega^*(y_i) \equiv \nu(y_i, t_1 + T, t_1) + \nu(y_i, t_2 + T, t_2) + \cdots + \nu(y_i, t_{2N-1} + T, t_{2N-1}),$$

$$\omega^*(y_i, m) \equiv \nu(y_i, m, t_1 + T, t_1) + \nu(y_i, m, t_2 + T, t_2) + \cdots + \nu(y_i, m, t_{2N-1} + T, t_{2N-1}),$$

то, в силу лемм 2, 3, имеют место равенства

$$L(y_i) = \omega(y_i) + \omega^*(y_i) = \omega(y_i), \quad l(y_i) = \inf_{m \in R^n} (\omega(y_i, m) + \omega^*(y_i, m)).$$

7. Определим функцию $u(t) = \exp(-\cos t) - 1$ и установим, что число нулей функции

$$\langle \psi u(t), m\rangle = m_1(\exp(-\cos t) - 1) + m_2 \sin t \exp(-\cos t) + m_3 \exp(-\cos t)(\cos t + \sin^2 t)$$

на отрезке $[0, 2\pi]$ при любом ненулевом векторе $m = (m_1, m_2, m_3)$ не меньше двух. Для этого проследим за значениями функции $\langle \psi u, m\rangle$ в точках $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$:

$$(\psi u(0), m) = (\psi u(2\pi), m) = \frac{m_1}{e} - m_1 + \frac{m_3}{e}, \tag{11}$$

$$(\psi u(\pi), m) = m_1 e - m_1 - m_3 e, \tag{12}$$

$$(\psi u(\pi/2), m) = m_2 + m_3, \tag{13}$$

$$(\psi u(3\pi/2), m) = -m_2 + m_3. \tag{14}$$

Если $m_2 = m_3 = 0$ $(m_1 \neq 0)$, то функция $\langle \psi u, m\rangle$ совпадает с $m_1 u$, а значит, имеет два нуля. Без труда устанавливается невыполнимость следующих систем:

$$\begin{cases} \langle \psi u(0), m\rangle > 0, \\ \langle \psi u(\pi), m\rangle = 0, \\ \langle \psi u(\pi/2), m\rangle > 0, \\ \langle \psi u(3\pi/2), m\rangle > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \langle \psi u(0), m\rangle < 0, \\ \langle \psi u(\pi), m\rangle = 0, \\ \langle \psi u(\pi/2), m\rangle < 0, \\ \langle \psi u(3\pi/2), m\rangle < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \langle \psi u(0), m\rangle > 0, \\ \langle \psi u(\pi), m\rangle > 0, \\ \langle \psi u(\pi/2), m\rangle = 0, \\ \langle \psi u(3\pi/2), m\rangle > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle \psi u(0), m\rangle < 0, \\ \langle \psi u(\pi), m\rangle < 0, \\ \langle \psi u(\pi/2), m\rangle = 0, \\ \langle \psi u(3\pi/2), m\rangle < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \langle \psi u(0), m\rangle > 0, \\ \langle \psi u(\pi), m\rangle > 0, \\ \langle \psi u(\pi/2), m\rangle > 0, \\ \langle \psi u(3\pi/2), m\rangle = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \langle \psi u(0), m\rangle < 0, \\ \langle \psi u(\pi), m\rangle < 0, \\ \langle \psi u(\pi/2), m\rangle < 0, \\ \langle \psi u(3\pi/2), m\rangle = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle \psi u(0), m\rangle > 0, \\ \langle \psi u(\pi), m\rangle > 0, \\ \langle \psi u(\pi/2), m\rangle > 0, \\ \langle \psi u(3\pi/2), m\rangle > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \langle \psi u(0), m\rangle < 0, \\ \langle \psi u(\pi), m\rangle < 0, \\ \langle \psi u(\pi/2), m\rangle < 0, \\ \langle \psi u(3\pi/2), m\rangle < 0. \end{cases}$$

Следовательно, для значений (11)-(14) исключили восемь критических случаев, а все оставшиеся случаи обеспечивают существование, по крайней мере, двух нулей функции $\langle \psi u(t), m\rangle$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Таким образом, установили равенство $\inf\limits_{m \in R^n} v(u, m, 2\pi) = 2$, из которого при любом $i = 1, 2, ..., N$ следует

$$\inf_{m \in R^n} v(y_i, m, t_i, t_{i-1} + T) = v(y_i, t_i, t_{i-1} + T) = 2i + 1,$$

$$\inf_{m \in R^n} v(y_i, m, t_{2N-i}, t_{i2N-i-1} + T) = v(y_i, t_{2N-i}, t_{2N-i-1} + T) = 2i + 1.$$

На остальных частях полуинтервала $(0, t_{2N-1}]$ все решения y_i отделены от нуля, поэтому

$$\omega(y_i) = v(y_i, t_i, t_{i-1} + T) + v(y_i, t_{2N-i}, t_{2N-i-1} + T) = 4i + 2, \quad i = 1, 2, ..., N,$$

а значит, выполнены

$$l(y_i) = \inf_{m \in R^n} (\omega(y_i, m) + \omega^*(y_i, m)) = \omega(y_i) = L(y_i) = 4i + 2, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Таким образом, вспоминая равенства (10) и $s_1 = t_{2N-1} = 2\pi(N^2 + 5N - 3)$, получаем, что для построенных решений $y_1, y_2, ..., y_N$ справедливы цепочки равенств

$$\nu(y_i) = \sigma(y_i) = \varsigma(y_i) = \frac{(4i+2)\pi}{2\pi(N^2+5N-3)} = \frac{2i+1}{N^2+5N-3}. \tag{15}$$

8. Докажем, что каждое из значений частот выбранных решений (15) является существенным и метрически, и топологически.

С одной стороны, согласно теореме об изоморфизме [10], линейное пространство решений $S(a)$ изоморфно линейному пространству их начальных значений.

С другой стороны, функции z_1, z_2, z_3 образуют фундаментальную систему решений a. Поэтому каждому решению $y \in S(a)$ можно поставить в соответствие единственную тройку коэффициентов его линейного разложения

$$y = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in R,$$

получив, тем самым, еще один изоморфизм линейных пространств $S(a)$ и R^3.

В итоге мы имеем отображение множества начальных значений $\psi y(0) \in R^3$ во множество троек коэффициентов $c = (c_1, c_2, c_3) \in R^3$, которое также осуществляет изоморфизм линейных пространств. Учитывая, что естественная топология в R^3 задается нормой и не зависит от ее выбора, без ограничения общности можно считать, что эта норма задается формулой $|c| = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$.

Таким образом, достаточно доказать, что для каждого исходного решения y_i уравнения a возмущенное решение

$$\bar{y}_i = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3, \tag{16}$$

$$c_1 \in (1, 1+\varepsilon), \quad c_2 \in (1-3i, 1-3i+\varepsilon), \quad c_3 \in (0, \varepsilon),$$

того же уравнения при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет равенствам

$$\sigma(\bar{y}_i) = \zeta(\bar{y}_i) = \nu(\bar{y}_i) = \sigma(y_i). \tag{17}$$

Отсюда будет следовать, что частоты исходного решения совпадут с частотами возмущенных решений уравнения, соответствующих точкам из некоторой окрестности точки $(1, 1-3i, 0)$ в пространстве троек коэффициентов или, что то же, из некоторой окрестности U_i точки $\psi y_i(0)$ в пространстве начальных значений. Это сразу повлечет за собой и метрическую, и топологическую существенность значений (15), поскольку мера окрестности U_i положительна, а дополнение к ней в U_i вообще пусто.

По теореме о непрерывной зависимости решений от начальных значений решение (16) на любом отрезке будет мало отличаться от y_i. Поэтому решение $\bar{y}_i$ ни разу не будет обращаться в нуль на тех участках, где функция y_i отделена от нуля. На остальных участках вида

$$[t_{i-1} + T, t_i], \quad [t_{2N-i-1} + T, t_{2N-i}],$$

где функция y_i имеет вид $\exp(-\cos t) - 1$, решение $\bar{y}_i$ представимо в виде

$$\bar{y}_i \equiv c_1(\exp(-\cos t) - 1) + c_2^* + c_3 \sin t,$$

где c_2^* – положительное, достаточно малое число.

Покажем, что функция

$$\langle \psi \bar{y}_i(t), m\rangle \equiv m_1\big(c_1(\exp(-\cos t)-1)+c_2^*+c_3\sin t\big)+$$
$$+m_2\exp(-\cos t)(c_1\sin t+c_3\cos t)+m_3\exp(-\cos t)(c_1(\cos t+\sin^2 t)-c_3\sin t)$$

на отрезке $[0, 2\pi]$ при любом ненулевом векторе $m\in R^3$ имеет не менее двух нулей.

Нетрудно проверить, что следующие системы

$$\begin{cases}\langle \psi\bar{y}_i(0),m\rangle>0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi),m\rangle=0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi/2),m\rangle>0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(3\pi/2),m\rangle>0,\end{cases}\quad \begin{cases}\langle \psi\bar{y}_i(0),m\rangle<0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi),m\rangle=0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi/2),m\rangle<0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(3\pi/2),m\rangle<0,\end{cases}\quad \begin{cases}\langle \psi\bar{y}_i(0),m\rangle>0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi),m\rangle>0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi/2),m\rangle=0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(3\pi/2),m\rangle>0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\langle \psi\bar{y}_i(0),m\rangle<0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi),m\rangle<0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi/2),m\rangle=0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(3\pi/2),m\rangle<0,\end{cases}\quad \begin{cases}\langle \psi\bar{y}_i(0),m\rangle>0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi),m\rangle>0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi/2),m\rangle>0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(3\pi/2),m\rangle=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\langle \psi\bar{y}_i(0),m\rangle<0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi),m\rangle<0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi/2),m\rangle<0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(3\pi/2),m\rangle=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\langle \psi\bar{y}_i(0),m\rangle>0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi),m\rangle>0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi/2),m\rangle>0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(3\pi/2),m\rangle>0,\end{cases}\quad \begin{cases}\langle \psi\bar{y}_i(0),m\rangle<0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi),m\rangle<0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(\pi/2),m\rangle<0,\\ \langle \psi\bar{y}_i(3\pi/2),m\rangle<0\end{cases}$$

не имеют места.

Следовательно, рассмотренные восемь различных комбинаций знаков значений $\langle \psi\bar{y}_i, m\rangle$ в точках $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ не имеют места, а любая другая комбинация гарантирует существование хотя бы двух нулей функции $\langle \psi\bar{y}_i, m\rangle$ на отрезке $[0, 2\pi]$ и тем самым установлено равенство

$$\inf_{m\in R^n} \nu(\bar{y}_i, m, 2\pi) = \nu(\bar{y}_i, 2\pi) = 2. \tag{18}$$

Таким образом, при каждом $i\in\{1,2,3,...,N\}$ решение $\bar{y}_i$ обладает свойством (17). Последнее означает, что значения, задаваемые равенствами (15), являются метрически и топологически существенными.

Теорема полностью доказана.

Замечание. Доказанная теорема остается в силе и после замены верхнего предела в определениях скалярной, полной и векторной частот на нижний предел.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

Примечания:

1. Сергеев И.Н. Определения и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249-294.
2. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1577.
3. Сергеев И.Н. Метрически типичные и сущест-

References:

1. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of the linear equation // Works of Seminar of I.G. Petrovsky. 2006. Iss. 25. P. 249-294.
2. Sergeev I.N. Determination of full frequencies of solutions of the linear equation // Differential equations. 2008. Vol. 44, No. 11. P. 1577.
3. Sergeev I.N. Metricaally typical and essential val-

венные значения показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1661-1662.

4. Сергеев И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 48, № 11. С. 1567-1568.
5. Сташ А.Х. О существенных значениях характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2013. Вып. 2 (119). С. 9-23. URL: http://vestnik.adygnet.ru
6. Смоленцев М.В. О спектрах частот периодического и непериодического линейного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 6. С. 909.
7. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.
8. Сташ А.Х. О некоторых спектрах частот линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 48, № 6. С. 908.
9. Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 6. С. 908.
10. Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения. М.: Академия, 2013. 288 с.

ues of indices of linear systems // Differential equations. 2011. Vol. 47, No. 11. P. 1661-1662.

4. Sergeev I.N. Topologically typical and essential values of indices of linear systems // Differential equations. 2011. Vol. 48, No. 11. P. 1567-1568.
5. Stash A.Kh. On essential values of variability characteristics for the solutions of third order linear differential equations // The Bulletin of the Adyghe State University. Series Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2013. Iss. 2 (119). P. 9-23. URL:http://vestnik.adygnet.ru
6. Smolentsev M.V. On the spectra of frequencies of periodic and non-periodic linear differential equation // Differential equations. 2012. Vol. 48, No. 6. P. 909.
7. Filippov A.F. Introduction in the theory of differential equations. M.: Editorial URSS, 2004. 240 pp.
8. Stash A.Kh. On some spectra of frequencies of the linear homogeneous differential tertiary equations // Differential equations. 2014. Vol. 48, No. 6. P. 908.
9. Stash A.Kh. Spectra of full and vector frequencies of the linear differential tertiary equations // Differential equations. 2012. Vol. 48, No. 6. P. 908.
10. Sergeev I.N. Differential equations. M.: Academia, 2013. 288 pp.