

## ФИЗИКА

## PHYSICS

УДК 533.72:532

ББК 22.253

Т 35

### **Малай Н.В.**

*Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного национального исследовательского университета, Белгород, тел. (4722) 30-18-07, e-mail: malay@bsu.edu.ru*

### **Лиманская А.В.**

*Аспирант кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного национального исследовательского университета, Белгород, тел. (4722) 30-18-07, e-mail: limanskayaanna@mail.ru*

### **Щукин Е.Р.**

*Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник объединенного института высоких температур РАН, Москва, тел. (495) 977-51-07, e-mail: evgrom@yandex.ru*

### **Стукалов А.А.**

*Доцент кафедры русского языка и профессионально-речевой коммуникации Белгородского государственного национального исследовательского университета, Белгород, e-mail: stukalov@bsu.edu.ru*

### **Термофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы\***

*(Рецензирована)*

**Аннотация.** В приближении Стокса проведено теоретическое описание стационарного движения крупной аэрозольной частицы сферической формы во внешнем поле градиента температуры. При рассмотрении движения предполагалось, что средняя температура поверхности частицы значительно отличается от температуры окружающей ее газообразной среды. При решении уравнений газовой динамики учитывался степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. Численные оценки показали нелинейный характер зависимости силы и скорости термофореза от средней температуры ее поверхности.

**Ключевые слова:** термофорез, термофорез нагретых сферических частиц, движение нагретых сферических частиц в поле градиента температуры.

### **Malay N.V.**

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Theoretical and Mathematical Physics Department, Belgorod State National Research University, Belgorod, ph. (4722) 30-18-07, e-mail: malay@bsu.edu.ru*

### **Limanskaya A.V.**

*Post-graduate student of Belgorod State National Research University, Belgorod, ph. (4722) 30-18-07, e-mail: limanskayaanna@mail.ru*

### **Shchukin Evgeniy Romanovich**

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor, the Leading Scientist of Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Science, Moscow, ph. (495) 977-51-07, e-mail: evgrom@yandex.ru*

### **Stukalov A.A.**

*Associate Professor of Department of Russian and Professional-Speech Communication of the Belgorod State National Research University, Belgorod, e-mail: stukalov@bsu.edu.ru*

---

\* Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы научно-образовательного центра «Управляемые электромагнитные процессы в конденсированных средах» НИУ «БелГУ».

## Thermophoresis of heated large aerosol spherical particles

**Abstract.** *The stationary motion of large solid aerosol spherical particle in an external field of a temperature gradient is described theoretically in the Stokes approximation. By consideration of the motion it was assumed that average particle surface temperature differs from the temperature of gaseous medium significantly. A power-law dependence of the coefficients of molecular transfer (viscosity, thermal conductivity) and density of gaseous environment on temperature is considered when solving the equations of gas dynamics. Numerical estimates showed non-linear thermophoresis strength and speed dependence upon the average temperature of its surface.*

**Keywords:** *thermophoresis, heated spherical particle thermophoresis, heated spherical particle movement in the field of a temperature gradient.*

**Введение.** В современной науке, технике, промышленности, в областях химических технологий, гидрометеорологии и т.д. широко применяют многофазные системы. Наибольший интерес представляют аэродисперсные системы, состоящие из двух фаз, одна из которых есть частицы, а вторая – газ.

На частицы, входящие в состав аэродисперсных систем, могут действовать силы различной природы, вызывающие их упорядоченное движение. В газообразных средах с неоднородным распределением температуры может возникнуть упорядоченное движение частиц, обусловленное действием сил молекулярного происхождения. Их появление вызвано передачей нескомпенсированного импульса частицам молекулами газообразной среды. При этом движение частиц, обусловленное, например, внешним заданным градиентом температуры, называют термофорезом. Термофорез встречается в природе, широко используется в технике и промышленности [1-6].

Рассмотрение термофореза в газообразной среде является достаточно сложной задачей. Это связано с тем, что в газе движение конкретной частицы определяется как поверхностными явлениями (обусловленными непосредственным взаимодействием молекул газообразной среды с поверхностью частицы), так и с объемными эффектами, возникающими из-за неоднородных распределений гидродинамического и температурного полей.

В опубликованных до настоящего времени работах по теории термофореза это явление хорошо изучено при малых относительных перепадах температуры в окрестности частицы [2-6]. Под относительным перепадом температуры понимают отношение разности между средней температурой поверхности частицы  $T_s$  и температурой газообразной среды вдали от нее  $T_\infty$  к последней. Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство  $(T_s - T_\infty)/T_\infty \ll 1$  и значительным, если  $(T_s - T_\infty)/T_\infty \sim 0(1)$ . В последнем случае частицу называют нагретой. Нагрев поверхности частицы может быть обусловлен, например, протеканием объемной химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением частицы электромагнитного излучения и т.д. Индексы « $e$ » и « $i$ » здесь и далее относятся к газу и частице соответственно; индексом « $S$ » обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы, и индексом « $\infty$ » – физические величины, характеризующие газообразную среду в невозмущенном потоке.

Если  $(T_s - T_\infty)/T_\infty \sim 0(1)$ , то при решении уравнений газовой динамики необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. В этом случае газообразная среда считается неизотермической и система газодинамических уравнений, описывающая такую среду, ставится существенно нелинейной. В связи с этим в литературе имеется мало работ, посвященных исследованию движения частиц при значительных относительных перепадах температуры в газообразных средах [7-9].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим твердую нагретую аэрозольную частицу сферической формы радиуса  $R$ , взвешенную в газе с плотностью  $\rho_e$ , теплопроводностью  $\lambda_e$  и вязкостью  $\mu_e$ . С помощью внешних источников в газе поддерживается постоянный малый градиент температуры  $\nabla T$ . В работе при описании свойств газообразной среды и частицы рассматривается следующий их вид зависимости от температуры:  $\mu_e = \mu_{\infty} t_e^{\beta}$ ,  $\lambda_e = \lambda_{\infty} t_e^{\alpha}$ ,  $\lambda_i = \lambda_{i0} t_i^{\gamma}$ , где  $\mu_{\infty} = \mu_e(T_{\infty})$ ,  $\lambda_{\infty} = \lambda_e(T_{\infty})$ ,  $\lambda_{i0} = \lambda_i(T_{\infty})$ ,  $t_k = T_k / T_{\infty}$  ( $k = e, i$ );  $0,5 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ,  $-1 \leq \gamma \leq 1$  [10].

При теоретическом описании термофореза будем предполагать, что в силу малости времени тепловой релаксации процесс теплопереноса в системе частица – газообразная среда протекает квазистационарно. Движение частицы происходит при малых числах Пекле и Рейнольдса, частица считается однородной по своему составу и крупной [11]. Задача решается гидродинамическим методом, т.е. решаются уравнения гидродинамики с соответствующими граничными условиями.

Термофорез удобно описывать в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ , связанной с центром масс аэрозольной частицы; вектор  $\nabla T$  направлен вдоль полярной оси  $z = r \cos \theta$ . Поскольку система отсчета связана с центром движущейся аэрозольной частицы, то задача сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком газа, скорость которого  $U_{\infty}$  подлежит определению ( $U_{\infty} \parallel OZ$ ). Распределения скоростей, давлений и температур обладают аксиальной симметрией относительно оси  $OZ$ . При указанном выборе начала системы координат нагретую частицу можно считать неподвижной, а внешнюю среду (газ) – движущейся в сторону, противоположную направлению фактического движения нагретой частицы, со скоростью  $U_{\infty} = -U_{th}$ , где  $U_{th}$  – скорость термофореза.

В рамках сформулированных допущений уравнения гидродинамики и теплопроводности имеют вид [12]:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} P_e = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu_e \left[ \frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^e}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial U_n^e}{\partial x_n} \right] \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_e U_k^e) = 0; \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\lambda_e \nabla T_e) = 0, \quad n_e = P_e / k T_e; \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i. \quad (3)$$

Здесь  $x_k$  – декартовы координаты,  $\rho_e = n_e m_e$ ,  $\rho_e, m_e, n_e$  – плотность, масса и концентрация молекул газообразной среды,  $k$  – постоянная Больцмана,  $q_i$  – плотность тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы, за счет которых и происходит ее нагрев.

Система газодинамических уравнений (1)–(3) решалась со следующими граничными условиями в сферической системе координат:

$$y \rightarrow \infty, \quad U_r^e = U_{\infty} \cos \theta, \quad U_{\theta}^e = -U_{\infty} \sin \theta, \quad P_e = P_{\infty}, \quad T_e = T_{\infty} + |\nabla T| r \cos \theta; \quad (4)$$

$$y \rightarrow 0, \quad T_i \neq \infty; \quad (5)$$

$$y = 1, \quad \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} + \sigma_0 \sigma_1 R (T_i^4 - T_{\infty}^4), \quad U_r^e = 0, \quad T_e = T_i, \quad U_{\theta}^e = K_{TS} \frac{v_e}{RT_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta}, \quad (6)$$

где  $U_r^e$  и  $U_{\theta}^e$  – нормальная и касательная компоненты массовой скорости газа  $U_e$ ;  $y = r/R$  – безразмерная радиальная координата;  $U_{\infty} = |U_{\infty}|$ .

В граничных условиях (6) на поверхности аэрозольной частицы учтено [2, 5, 9, 11,

13]: равенство температур, непрерывность потоков тепла, условие непроницаемости для нормальной и тепловое скольжение для касательной компонент массовой скорости. Здесь  $K_{TS}$  – коэффициент теплового скольжения, выражение для которого находится методами кинетической теории газов. При коэффициентах аккомодации тангенциального импульса  $\alpha_r$  и энергии  $\alpha_E$ , равных единице, газокинетический коэффициент  $K_{TS} = 1,152$  (например, [13]);  $\sigma_0$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $\sigma_1$  – интегральная степень черноты [14]. На большом расстоянии от частицы ( $r \rightarrow \infty$ ) справедливы граничные условия (4), а конечность физических величин, характеризующих частицу при  $r \rightarrow 0$ , учтено в (5).

Определяющими параметрами в задаче являются материальные постоянные  $\mu_{\infty}$ ,  $\rho_{\infty}$ ,  $\lambda_{\infty}$  и сохраняющиеся в процессе движения частицы  $R$ ,  $|\nabla T|$ ,  $T_{\infty}$  и  $U_{\infty}$ . Из этих параметров, кроме числа Рейнольдса, можно составить и безразмерную комбинацию  $\varepsilon = R |\nabla T| / T_{\infty}$ , характеризующую перепад температуры на размере частицы. При описании термофореза  $\varepsilon = R |\nabla T| / T_{\infty}$  играет роль малого параметра [2, 11].

При  $\varepsilon \ll 1$  решение уравнений гидродинамики будем искать в виде:

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_e^{(0)} + \varepsilon \mathbf{V}_e^{(1)} + \dots, \quad P_e = P_e^{(0)} + \varepsilon P_e^{(1)} + \dots \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{V}_e = \mathbf{U}_e / U_{\infty}$ .

Вид граничных условий указывает на то, что выражения для компонент массовой скорости  $V_r^e$  и  $V_{\theta}^e$  ищутся в виде разложений по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [15]. Известно [15], что для определения общей силы, действующей на частицу, достаточно определить первые члены этих разложений. С учетом этого выражения для компонент массовой скорости нулевого приближения (7) будем искать в виде:

$$V_r^e(y, \theta) = \cos \theta G(y), \quad V_{\theta}^e(y, \theta) = -\sin \theta g(y). \quad (8)$$

Здесь  $G(y)$  и  $g(y)$  – произвольные функции, зависящие от координаты  $y$ .

**2. Поля температур вне и внутри частицы.** При нахождении термофоретической силы и скорости ограничимся поправками первого порядка малости. Чтобы их найти, нужно знать поля температур вне и внутри частицы. Для этого необходимо решить уравнения (2) – (3). Решая эти уравнения методом разделения переменных, получаем следующие выражения для  $t_e$  и  $t_i$  ( $t_k = T/T_{\infty}$ ,  $k = e, i$ ):

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta), \quad t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{i1}(y, \theta), \quad (9)$$

где

$$t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad t_{i0}(y) = \left(B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y} \int_y^1 \psi_0 dy + \int_y^1 \frac{\psi_0}{y} dy\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad t_{e1}(y) = \frac{1}{t_{e0}^{\alpha}} \cos \theta \left(y + \frac{\Gamma}{y^2}\right),$$

$$t_{i1}(y) = \frac{1}{t_{i0}^{\gamma}} \cos \theta \left[ Dy + \frac{H_1}{y^2} + \frac{1}{3} \left( y \int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y \psi_1 y dy \right) \right], \quad H_0 = \frac{(1+\gamma)R^2}{3\lambda_{i0}T_{\infty}} J_0, \quad H_1 = \frac{R^2}{3\lambda_{i0}T_{\infty}} J_1,$$

$$J_0 = \frac{1}{V} \int_V q_i dV, \quad J_1 = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV = 0, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \varepsilon = |\nabla T| \frac{R}{T_{\infty}},$$

$$\psi_0 = -\frac{R^2(1+\gamma)}{2\lambda_{i0}T_{\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) dx, \quad \psi_1 = -\frac{3R^2}{2\lambda_{i0}T_{\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) x dx, \quad x = \cos \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

$\int_V q_i z dV = 0$  – дипольный момент плотности тепловых источников [1, 8, 16].

Постоянные интегрирования, входящие в выражения для полей температур, определяются из граничных условий на поверхности частицы. В частности для коэффициентов  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  имеем:

$$\Gamma = \frac{Rt_{eS}^\alpha}{\lambda_{iS}T_{e\infty}} J_1 + \frac{1}{\delta} \left\{ \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} - \omega_4 \right\}, \quad \Gamma_0 = t_{eS}^{1+\alpha} - 1. \quad (10)$$

Здесь  $\delta = 2 \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + \omega_4$ ,  $\omega_4 = 1 + 4 \frac{\sigma_0 \sigma_1 R}{\lambda_{iS}} T_{e\infty}^3 t_{eS}^3$ ,  $\lambda_{iS} = \lambda_{i0} t_{iS}^\gamma$ ,  $\lambda_{eS} = \lambda_{e\infty} t_{eS}^\alpha$ ,  $t_{iS} = t_{i0}(y=1)$ ,  $t_{eS} = t_{e0}(y=1)$ .

Среднее значение температуры поверхности частицы  $T_{iS}$  определяется из решения следующей системы уравнений, в которой  $T_{iS} = t_{iS} T_{e\infty}$ ,  $T_{eS} = t_{eS} T_{e\infty}$ ,  $\ell^{(S)} = \Gamma_0 / (1 + \Gamma_0)$ :

$$\begin{cases} T_{eS} = T_{iS}, \\ \frac{\ell^{(S)}}{1+\alpha} t_{eS} = \frac{R^2}{3\lambda_{eS}T_{e\infty}} J_0 - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{eS}} \left[ \left( \frac{T_{iS}}{T_{e\infty}} \right)^4 - 1 \right]. \end{cases} \quad (11)$$

При выполнении неравенства  $\lambda_e \ll \lambda_i$  (имеет место для большинства газов) коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа, тогда в коэффициенте динамической вязкости можно пренебречь зависимостью по углу  $\theta$  в системе «частица-газ» (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры). С учетом этого можно считать, что вязкость связана только с температурой  $t_{e0}(r)$ , т.е.  $\mu_e(t_e(r, \theta)) \approx \mu_e(t_{e0}(r))$ . Это допущение позволяет рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется через граничные условия.

Подставляя (9) в выражение для динамической вязкости, имеем:

$$\mu_e = \mu_{e\infty} t_{e0}^\beta. \quad (12)$$

Полученное выражение для динамической вязкости (12) в дальнейшем используется при нахождении полей скорости и давления в окрестности нагретой аэрозольной частицы сферической формы.

**3. Решение гидродинамической задачи. Нахождение выражений для полей скорости и давления.** Исследование линеаризованного по скорости уравнение Навье-Стокса в сферической системе координат показало, что если предположить коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа (слабая угловая асимметрия распределения температуры), то это уравнение может быть в конечном итоге сведено к неоднородному дифференциальному уравнению 3-го порядка с изолированной особой точкой, и решение этого уравнения можно искать в виде обобщенных степенных рядов [17-19].

Из уравнения непрерывности (1) и уравнения состояния (2), с учетом (8), находим связь между функциями  $G(y)$  и  $g(y)$ :

$$g(y) = \frac{1}{2} y \frac{dG(y)}{dy} + \left( 1 + \frac{1}{2(1+\alpha)} \ell(y) \right) G(y), \quad \ell = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}. \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса

(1), разделяя в нем переменные, после преобразований получаем в конечном итоге уравнение, аналогичное уравнению, полученному в работе [7]. Таким образом, общие выражения для компонент массовой скорости, удовлетворяющие условию ограниченности решения при  $y \rightarrow \infty$ , имеют вид:

$$\begin{aligned}
 U_r^e &= U_\infty \cos \theta G(y), & G(y) &= A_1 G_1 + A_2 G_2 + G_3, \\
 U_\theta^e &= -U_\infty \sin \theta g(y), & g(y) &= A_1 G_4 + A_2 G_5 + G_6, \\
 P_e &= P_{e\infty} + \frac{\mu_{e\infty} U_\infty}{R} t_{e0}^\beta \left\{ \frac{y^2}{2} \frac{d^3 G}{dy^3} + y \left[ 3 + \frac{\beta-1}{2} yf \right] \frac{d^2 G}{dy^2} - \left[ 2 - y^2 f' - \frac{\beta}{2} y^2 f^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\beta-2) yf \right] \frac{dG}{dy} + 2 \left[ y^2 f'' + yf' (4 + y\beta f) - \frac{2}{3} f \right] G \right\}, \tag{14}
 \end{aligned}$$

Здесь  $f = -\frac{\ell}{y(1+\alpha)}$ ,  $G_k = \left( 1 + \frac{\ell}{2(1+\alpha)} \right) G_{k-3} + \frac{1}{2} y G_{k-3}'$  ( $k = 4, 5, 6$ ),  $f'$ ,  $f''$ ,  $G_1'$ ,  $G_2'$ ,  $G_3'$  – первые, вторые производные по  $y$  от соответствующих функций.

$$\begin{aligned}
 G_1(y) &= \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{1,n} \ell^n, & G_3(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{3,n} \ell^n + \omega_3 \ln(y) G_1(y), & \gamma_1 &= \frac{1-\beta}{1+\alpha}, \\
 G_2(y) &= \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2,n} \ell^n + \omega_2 \ln(y) G_1(y), & \gamma_2 &= 2 \frac{1+\beta}{1+\alpha}, & \gamma_3 &= \frac{2+2\alpha-\beta}{(1+\alpha)^2}.
 \end{aligned}$$

Значения коэффициентов  $C_{1,n}$  ( $n \geq 1$ ),  $C_{2,n}$  ( $n \geq 3$ ) и  $C_{3,n}$  ( $n \geq 4$ ) определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}
 C_{1,n} &= \frac{1}{n(n+3)(n+5)} \left\{ [(n-1)(3n^2+13n+8) + \gamma_1(n+2)(n+3) + \gamma_2(n+2)] C_{1,n-1} - \right. \\
 &\quad - [(n-1)(n-2)(3n+5) + 2\gamma_1(n^2-4) + \gamma_2(n-2) + \gamma_3(n+3)] C_{1,n-2} + \\
 &\quad \left. + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3] C_{1,n-3} \right\}, \\
 C_{2,n} &= \frac{1}{(n+1)(n+3)(n-2)} \left\{ [(n-1)(3n^2+n-6) + \gamma_1 n(n+1) + n\gamma_2] C_{2,n-1} - [\gamma_3(n+1) + \right. \\
 &\quad + (n-1)(n-2)(3n-1) + 2\gamma_1 n(n-2) + \gamma_2(n-2)] C_{2,n-2} + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_3 + \\
 &\quad \left. + \gamma_1(n-3)] C_{2,n-3} + \frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) \Delta_k - 6 \frac{(-\gamma_4)(1-\gamma_4) \cdot (n-1-\gamma_4)}{n!} \right\}, \\
 C_{3,n} &= \frac{1}{n(n+2)(n-3)} \left\{ (n-1)[3n^2-5n-4 + \gamma_1 n + \gamma_2] C_{3,n-1} - [(n-1)(n-2)(3n-4) + \right. \\
 &\quad + 2\gamma_1(n-1)(n-2) + \gamma_2(n-2) + n\gamma_3] C_{3,n-2} + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3] C_{3,n-3} + \\
 &\quad \left. + \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1) \Delta_k \right\}, \\
 \Delta_k &= (3k^2+16k+15)C_{1,k} - ((k-1)(6k+13) + \gamma_1(2k+5) + \gamma_2)C_{1,k-1} + (3(k-1)(k-2) + 2\gamma_1(k-2) + \gamma_3)C_{1,k-2}.
 \end{aligned}$$

При вычислении коэффициентов  $C_{1,n}$ ,  $C_{2,n}$  и  $C_{3,n}$  по рекуррентным формулам необходимо учитывать, что  $C_{1,0} = 1$ ,  $C_{2,0} = 1$ ,  $C_{2,2} = 1$ ,  $C_{2,1} = -\frac{1}{8}(2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\gamma_4)$ ,

$\gamma_4 = \beta/(1+\alpha)$ ,  $C_{3,1} = 0$ ,  $C_{3,2} = \frac{1}{4}\gamma_3$ ,  $C_{3,3} = 1$ ,  $C_{3,0} = 1$ ,  $\frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} = -\frac{\gamma_3}{60}(10+3\gamma_1+\gamma_2)$ ,  
 $\frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} = \frac{1}{15}\left[\frac{1}{4}(2\gamma_1+\gamma_2+6\gamma_4)(4+3\gamma_1+\gamma_2)+3\gamma_3+3\gamma_4(\gamma_4-1)\right]$ ,  $C_{1,n}$ ,  $C_{2,n}$  и  $C_{3,n}$  при  $n < 0$   
 равны нулю.

Постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  определяются из граничных условий на поверхности аэрозольной частицы.

**4. Определение термофоретической силы и скорости. Анализ полученных результатов.** В первом приближении по  $\varepsilon$  получены выражения для полей температур вне и внутри аэрозольной частицы, а также распределения скорости и давления в ее окрестности. Результирующая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности аэрозольной частицы и имеет вид [12]:

$$F_z = \int_{(S)} (-P_e \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \Big|_{r=R}. \quad (15)$$

Здесь  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$ ,  $U_r^e$  и  $U_\theta^e$  – компоненты тензора напряжений, радиальная и касательная компоненты массовой скорости,  $\sigma_{rr} = \mu_e \left( 2 \frac{\partial U_r^e}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_e \right)$ ,

$$\sigma_{r\theta} = \mu_e \left( \frac{\partial U_\theta^e}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{y} \right).$$

Подставляя в (15) полученные выше выражения, после интегрирования получаем, что общая сила будет складываться из силы вязкого сопротивления среды  $F_\mu$  и термофоретической силы  $F_{th}$ :

$$F = F_\mu + \varepsilon F_{th}, \quad (16)$$

где  $F_\mu = 6\pi R \mu_{e\infty} U_\infty f_\mu n_z$ ,  $F_{th} = -6\pi R m_{e\infty} f_{th} n_z$ ,  $n_z$  – единичный вектор в направлении оси  $OZ$ .

Значения коэффициентов  $f_\mu$  и  $f_{th}$  могут быть оценены с помощью (17):

$$f_\mu = \frac{2}{3} \frac{N_2}{N_1}, \quad f_{th} = 4K_{TS} \frac{v_{e\infty}}{R\delta} \frac{\lambda_{e\infty}}{\lambda_{i0}} t_{eS}^{\beta-\gamma} \frac{G_1}{N_1}. \quad (17)$$

Здесь  $N_1(1) = G_1(1)G_2'(1) - G_2(1)G_1'(1)$ ,  $N_2(1) = G_1(1)G_3'(1) - G_3(1)G_1'(1)$ ,

$$N_3(1) = G_2(1)G_1''(1) - G_1(1)G_2''(1) + \left( 2 + \frac{\ell^{(s)}}{1+\alpha} \right) (G_2(1)G_1'(1) - G_1(1)G_2'(1)),$$

$$N_4(1) = G_3(1)G_1''(1) - G_1(1)G_3''(1) + \left( 2 + \frac{\ell^{(s)}}{1+\alpha} \right) (G_3(1)G_1'(1) - G_1(1)G_3'(1)).$$

Приравнивая полную силу  $F$  к нулю, получаем следующее выражение для скорости термофореза  $U_{th}$  ( $U_{th} = -U_\infty$ ) твердой крупной нагретой частицы сферической формы:

$$U_{th} = -h_{th} n_z, \quad (18)$$

где  $h_{th} = f_{th} / f_\mu$ .

Полученные выше формулы для силы и скорости термофореза можно

использовать и при малых относительных перепадах температуры в окрестности частицы. В случае, когда величина нагрева поверхности частицы мала, т.е. средняя температура поверхности по величине незначительно отличается от температуры окружающей среды вдали от частицы ( $\Gamma_0 \rightarrow 0$ ), зависимостью коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) и плотности от температуры можно пренебречь, и тогда ( $y=1$ ) имеем:  $G_1=1$ ,  $G_1^I=-3$ ,  $G_1^{II}=12$ ,  $G_1^{III}=-60$ ,  $G_2=1$ ,  $G_2^I=-1$ ,  $G_2^{II}=2$ ,  $G_2^{III}=-6$ ,  $G_3=1$ ,  $G_3^I=0$ ,  $G_3^{II}=0$ ,  $G_3^{III}=0$ ,  $N_1=2$  и  $N_2=3$ . В этом случае формулы для силы и скорости термофореза совпадают с известными в литературе результатами (см., например, [2]).

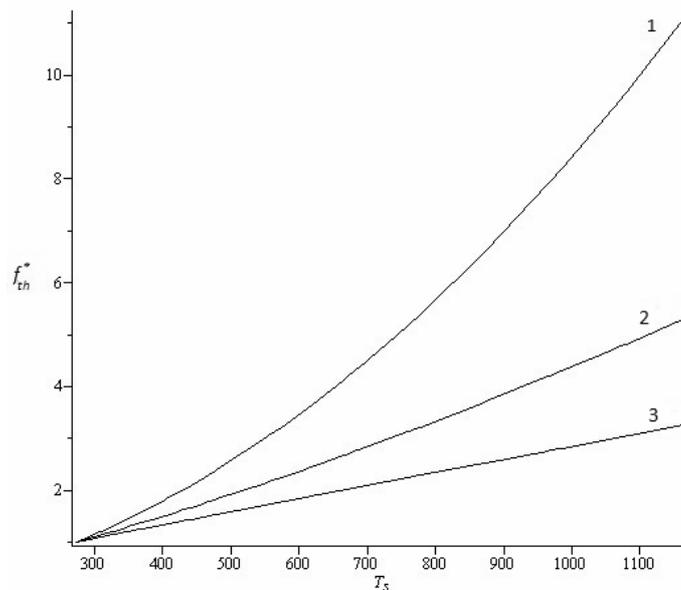


Рис. 1. Кривые зависимости  $f_{th}^*$  от средней температуры  $T_s$

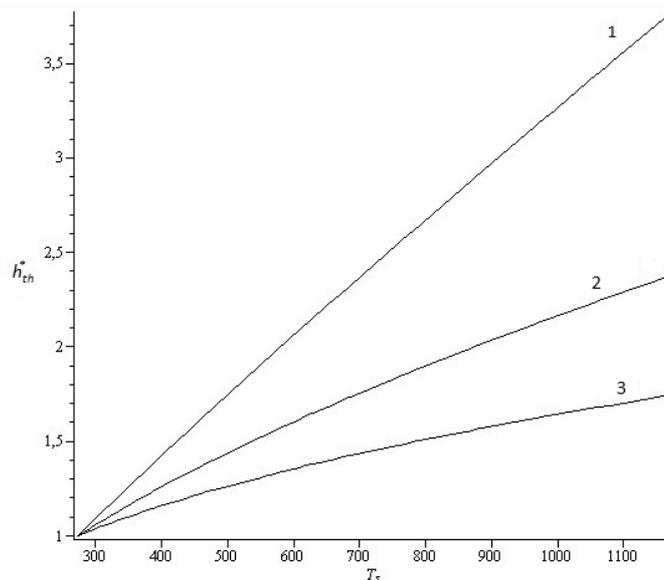


Рис. 2. Кривые зависимости  $h_{th}^*$  от средней температуры  $T_s$

Для иллюстрации зависимости  $F_{th}$  и  $U_{th}$  от  $T_s$  на рисунках 1, 2 приведены кривые, связывающие значения коэффициентов  $f_{th}^* = f_{th} / f_{th}|_{T_s=273K}$  и  $h_{th}^* = h_{th} / h_{th}|_{T_s=273K}$

со значениями  $T_s$  крупных частиц меди с радиусом  $R = 25 \mu m$ , движущихся в воздухе при нормальных условиях. Кривые 1-3 на рисунках 1, 2 построены при  $\alpha = \beta = 1; 0,7; 0,5$ . Значения коэффициентов  $\nu_{\infty}$ ,  $\lambda_{\infty}$ ,  $\lambda_{i0}$  были взяты при  $T_s = 273K$  из [11]. При  $T_s = 273K$  значения коэффициентов  $f_{th}$  и  $h_{th}$  равны  $f_{th}|_{T_s=273K} = 7,409 \cdot 10^{-5}$  и  $h_{th}|_{T_s=273K} = 7,409 \cdot 10^{-5}$ .

Проведенные с помощью найденных формул численные оценки показали нелинейный характер зависимости силы и скорости термофореза от средней температуры поверхности частицы.

**Выводы.** Формулы (16), (18) позволяют оценивать силу и скорость термофореза крупных нагретых аэрозольных частиц сферической формы при произвольных относительных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее с учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. Полученные формулы носят наиболее общий характер.

#### Примечания:

1. Вальдберг А.Ю., Исянов П.М., Яламов Ю.И. Теоретические основы охраны атмосферного воздуха от загрязнения промышленными аэрозолями. СПб.: Нииогаз-фильтр, 1993. 235 с.
2. Баканов С.П. Термофорез в газах при малых числах Кнудсена // УФН. 1992. Т. 162, № 9. С. 133-152.
3. Jayaraj S., Dinesh K.K., Pillai K.L. Thermophoresis in natural convection with variable properties // Heat Mass Transf. 1999. No. 34. P. 469-475.
4. Selim A., Hossain M.A., Rees D.A.S. The effect of surface mass transfer on mixed convection flow past a heated vertical flat permeable plate with thermophoresis // Int. J. Thermal Sci. 2003. No. 42. P. 973-982.
5. Reineck P., Wienken C.J., Braun D. Thermophoresis of single stranded DNA // Electrophoresis. 2010. No. 31 (2). P. 279-286.
6. Optical Thermophoresis for Quantifying the Buffer Dependence of Aptamer Binding / P. Baaske, C.J. Wienken, P. Reineck // Angewandte Chemie International Edition. 2010. No. 49 (12). P. 2238-2241.
7. Малай Н.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде // ПМТФ. 2008. № 1. С. 74-80.
8. О силе, действующей на нагретую сферическую каплю движущуюся в газообразной среде / Н.В. Малай, К.С. Рязанов, Е.Р. Щукин, А.А. Стукалов // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 4. С. 63-71.
9. Фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы / Н.В. Малай, А.В. Лиманская, Е.Р. Щукин, А.А. Стукалов // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 10. С. 42-50.
10. Бретшнаyder Ст. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия, 1966. 535 с.
11. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс,

#### References:

1. Valldberg A.Yu., Isyanov P.M., Yalamov Yu.I. Theoretical foundations of protection of atmospheric air from pollution by industrial aerosols. SPb.: Niiogaz-filtr, 1993. 235 pp.
2. Bakanov S.P. Thermophoresis in gases at small Knudsen numbers // UFN. 1992. Vol. 162, No. 9. P. 133-152.
3. Jayaraj S., Dinesh K.K., Pillai K.L. Thermophoresis in natural convection with variable properties // Heat Mass Transf. 1999. No. 34. P. 469-475.
4. Selim A., Hossain M.A., Rees D.A.S. The effect of surface mass transfer on mixed convection flow past a heated vertical flat permeable plate with thermophoresis // Int. J. Thermal Sci. 2003. No. 42. P. 973-982.
5. Reineck P., Wienken C.J., Braun D. Thermophoresis of single stranded DNA // Electrophoresis. 2010. No. 31 (2). P. 279-286.
6. Optical Thermophoresis for Quantifying the Buffer Dependence of Aptamer Binding / P. Baaske, C.J. Wienken, P. Reineck // Angewandte Chemie International Edition. 2010. No. 49 (12). P. 2238-2241.
7. Malay N.V., Shchukin E.R., Stukalov A.A., Ryazanov K.S. The gravitational movement of evenly heated firm particle in the gaseous environment // PMTF. 2008. No. 1. P. 74-80.
8. On the force affecting the heated spherical drop moving in the gaseous environment / N.V. Malay, K.S. Ryazanov, E.R. Shchukin, A.A. Stukalov // PMTF. 2011. Vol. 52, No. 4. P. 63-71.
9. Photophoresis of heated large aerosol particles of a spherical form / N.V. Malay, A.V. Limanskaya, E.R. Shchukin, A.A. Stukalov // ZhTF. 2012. Vol. 82. Iss. 10. P. 42-50.
10. Bretshnayder St. Properties of gases and liquids. Engineering methods of calculation. M.: Chemistry, 1966. 535 pp.
11. Yalamov Yu.I., Galoyan V.S. Dynamics of drops in non-uniform viscous environments. Yerevan:

1985. 207 с.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: ТТЛ, 1954. 795 с.
13. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны // ЖТФ. 1982. Т. 52, № 11. С. 2253-2262.
14. Шейндлин А.Е. Излучательные свойства твердых материалов: справочник. М.: Энергия, 1974. 471 с.
15. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
16. Береснев С.А., Кочнева Л.Б. Фактор асимметрии поглощения излучения и фотофорез аэрозолей // Оптика атмосферы и океана. 2003. Т. 16, № 2. С. 134-141.
17. Коддингстон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностран. лит., 1958. 474 с.
18. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. III, ч. II. М.: Наука, 1974. 672 с.
19. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 1961. 703 с.
- Luis, 1985. 207 pp.
12. Landau L.D., Lifshits E.M. Mechanics of continua. M.: TTL, 1954. 795 pp.
13. Poddoskin A.B., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. On boundary conditions during circumfluence by non-uniform heated gas of a spherical surface of small curvature // ZhTF. 1982. Vol. 52, No. 11. P. 2253-2262.
14. Sheyndlin A.E. Radiating properties of solid materials: a reference book. M.: Energy, 1974. 471 pp.
15. Happel G., Brenner G. Hydrodynamics at small Reynolds numbers. M.: Mir, 1976. 630 pp.
16. Beresnev S.A., Kochneva L.B. Factor of asymmetry of absorption of radiation and photophoresis of aerosols // Optics of the atmosphere and ocean. 2003. Vol. 16, No. 2. P. 134-141.
17. Koddington E.A., Levinson N. Theory of the ordinary differential equations. M.: Inostr. lit., 1958. 474 pp.
18. Smirnov V.I. The course of higher mathematics. Vol. III, Pt. II. M.: Nauka, 1974. 672 pp.
19. Kamke E. Reference book on the ordinary differential equations. M.: Fizmatlit, 1961. 703 pp.