МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.925
ББК 22.161.6
Р 65

Ройтенберг В.Ш.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ярославского государственного технического университета, Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

О типичных полиномиальных векторных полях на плоскости

(Рецензирована)

Аннотация. *Множество полиномиальных векторных полей, грубых в круге Пуанкаре или на проективной плоскости, открыто и всюду плотно в пространстве плоских полиномиальных векторных полей степени* $\le n$.

Ключевые слова: *полиномиальные векторные поля, круг Пуанкаре, проективная плоскость, грубость.*

Roytenberg V.Sh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Higher Mathematics Department, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

On generic polynomial vector fields on a plane

Abstract. *The set of polynomial vector fields, which are structurally stable on the Poincare cycle or on the projective plane, is open and everywhere is dense in the space of planar polynomial vector fields of degree* $\le n$.

Keywords: *polynomial vector fields, Poincare cycle, projective plane, structural stability.*

Как хорошо известно [1], C^r-гладкие ($r \ge 1$) векторные поля на плоскости, грубые в компактной области на плоскости, типичны – они образуют открытое и всюду плотное множество в пространстве всех векторных полей с C^r-нормой. Мы докажем аналогичное утверждение для пространства полиномиальных векторных полей степени $\le n$, рассматриваемых на всей плоскости.

На плоскости $\mathbf{R}^2$ рассмотрим полиномиальное векторное поле

$$X(x,y) = P(x,y)\partial/\partial x + Q(x,y)\partial/\partial y,$$

где

$$P(x,y) = \sum_{m=0}^{n} P_m(x,y), \qquad P_m(x,y) = \sum_{k=0}^{m} a_{k,m-k} x^k y^{m-k};$$

$$Q(x,y) = \sum_{m=0}^{n} Q_m(x,y), \qquad Q_m(x,y) = \sum_{k=0}^{m} b_{k,m-k} x^k y^{m-k}.$$

Векторное поле X естественно отождествляется с арифметическим вектором $(a_{0,0}, b_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \dots, b_{n,0}, \dots, b_{0,n}) \in \mathbf{R}^{(n+1)(n+2)}$, а множество P_n всех полиномиальных векторных полей степени $\le n$ с пространством $\mathbf{R}^{(n+1)(n+2)}$ – с евклидовой нормой $\|\cdot\|$.

Компактифицируем $\mathbf{R}^2$ двумя способами – вложив в круг $\mathbf{K}$ и в проективную плоскость $\mathbf{RP}^2$. Рассмотрим в $\mathbf{R}^3$ гладкое подмногообразие – полусферу $\mathbf{K} := \{(X,Y,Z) \in \mathbf{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,\ Z \ge 0\}$. Она естественно отождествляется с *кругом Пуанкаре* $\mathbf{K} = \{(X,Y) \in \mathbf{R}^2 \mid X^2 + Y^2 \le 1\}$. Окружность $\partial\mathbf{K} = \{(X,Y,Z) \in \mathbf{K} \mid Z = 0\} \equiv$

$\{(X,Y)\in \mathbf{K} \mid X^2+Y^2=1\}$ называется *экватором*. Покроем $\mathbf{K}$ локальными картами (U_0,ξ_0), $(U_1^{\pm},\xi_1^{\pm})$, $(U_2^{\pm},\xi_2^{\pm})$:

$U_0=\{(X,Y,Z)\in \mathbf{K} \mid Z\neq 0\}$, $\xi_0(X,Y,Z)=(x,y)=(X/Z,Y/Z)$,

$U_1^{+}=\{(X,Y,Z)\in \mathbf{K} \mid X>0\}$, $U_1^{-}=\{(X,Y,Z)\in \mathbf{K} \mid X<0\}$,

$\xi_1^{\pm}(X,Y,Z)=(u,z)=(Y/X,Z/X)$, $U_2^{+}=\{(X,Y,Z)\in \mathbf{K} \mid Y>0\}$,

$U_2^{-}=\{(X,Y,Z)\in \mathbf{K} \mid Y<0\}$, $\xi_2^{\pm}(X,Y,Z)=(v,z)=(X/Y,Z/Y)$.

Будем считать, что $\mathbf{R}^2$ отождествлено с U_0 посредством отображения ξ_0.

Так как отображение $\xi_1^{\pm}\xi_0^{-1}$ задается формулами $u=y/x$, $z=1/x$, то векторное поле X в координатах (u,z) имеет вид $P^*(u,z)\partial/\partial u+Q^*(u,z)\partial/\partial z$, где

$$P^*(u,z)=-uzP(1/z,u/z)+zQ(1/z,u/z),\qquad Q^*(u,z)=-z^2P(1/z,u/z).$$

Рассмотрим теперь в $U_1^{\pm}$ полиномиальное векторное поле

$$X_{U_1^{\pm}}=P^{**}(u,z)\partial/\partial u+Q^{**}(u,z)\partial/\partial z,$$

где при $z\neq 0$ $P^{**}(u,z)=\sigma_1 z^{n-1}P^*(u,z)$, $Q^{**}(u,z)=\sigma_1 z^{n-1}Q^*(u,z)$, а $\sigma_1=1$ в U_1^{+} и $\sigma_1=(-1)^{n-1}$ в U_1^{-}. В точках экватора ($z=0$) оно касается экватора. Аналогично определим в $U_2^{\pm}$ полиномиальное векторное поле $X_{U_2^{\pm}}$. Траектории векторных полей $X|_{U_0\cap U_k^{\pm}}$ и $X_{U_k^{\pm}}|_{U_0\cap U_k^{\pm}}$ $(k=1,2)$ совпадают. Нетрудно убедиться, что особые точки векторных полей $X_{U_1^{+}}$, $X_{U_1^{-}}$, $X_{U_2^{+}}$ и $X_{U_2^{-}}$, лежащие на экваторе и принадлежащие пересечениям их областей определения, совпадают. Следовательно, совпадают траектории векторных полей $X_{U_1^{\pm}}|_{U_1^{\pm}\cap U_2^{+}}$ и $X_{U_2^{+}}|_{U_2^{\pm}\cap U_2^{+}}$, $X_{U_2^{\pm}}|_{U_2^{\pm}\cap U_1^{+}}$ и $X_{U_1^{-}}|_{U_2^{\pm}\cap U_1^{-}}$. На траекториях, отличных от особых точек, совпадают и ориентации, заданные векторными полями. Поэтому можно корректно определить *траекторию векторного поля* X *в* $\mathbf{K}$ как связное подмножество $\mathbf{K}$, пересечения которого с U_0, $U_1^{\pm}$ и $U_2^{\pm}$ являются, соответственно, траекториями векторных полей X в $\mathbf{R}^2$, $X_{U_1^{\pm}}$ и $X_{U_2^{\pm}}$, с ориентацией на ней, индуцированной ориентацией на траекториях указанных выше векторных полей. Более того, используя разбиение единицы, подчиненное покрытию $\mathbf{K}$ множествами U_0, $U_1^{\pm}$ и $U_2^{\pm}$ [2, с. 59-61], можно построить гладкое векторное поле $\hat{X}:\mathbf{K}\to T\mathbf{K}$, такое, что векторные поля $\hat{X}|_{U_0}$ и $\hat{X}|_{U_k^{\pm}}$ получаются из векторных полей X и $X_{U_k^{\pm}}$ умножением на гладкие положительные функции. Тем самым, ориентированные траектории векторного поля X в $\mathbf{K}$ совпадают с ориентированными траекториями векторного поля $\hat{X}$, заданного на всем круге Пуанкаре $\mathbf{K}$.

Экватор является инвариантным множеством – он состоит из траекторий. Траектории, принадлежащие экватору, будем называть *бесконечно удаленными*. Весь экватор может быть целой траекторией при нечетном n.

Отождествив диаметрально противоположные точки экватора, получим из $\mathbf{K}$ проективную плоскость $\mathbf{RP}^2$. Траектории векторного поля X в $\mathbf{K}$ при этом перейдут в *траектории векторного поля* X *в* $\mathbf{RP}^2$.

Векторное поле $X\in \mathrm{P}_n$ назовем *грубым в* $\mathbf{K}$ (*грубым в* $\mathbf{RP}^2$), если существует такая его окрестность $U(X)$ в P_n, что для любого векторного поля $\tilde{X} \in U(X)$ существует гомеоморфизм $h:\mathbf{K} \to \mathbf{K}$ ($h:\mathbf{RP}^2 \to \mathbf{RP}^2$), $h(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2$, переводящий траектории поля $\tilde{X}$ в $\mathbf{K}$ (в $\mathbf{RP}^2$) в траектории поля X в $\mathbf{K}$ (в $\mathbf{RP}^2$) с сохранением ориентации на них (на траекториях, принадлежащих $\mathbf{R}^2$).

Пусть s^0 – особая точка векторного поля $X_{U_1^\pm}$ ($X_{U_2^\pm}$), лежащая на экваторе. Координата $u = u_0$ ($v = v_0$) точки s^0 является нулем многочлена

$$R_1(u) := -uP_n(1,u) + Q_n(1,u) \qquad (R_2(v) := -vQ_n(v,1) + P_n(v,1)).$$

В точке s^0 матрицы линейной части поля $X_{U_1^\pm}$ в координатах u, z и поля $X_{U_2^\pm}$ в координатах v, z имеют треугольный вид, соответственно,

$$A_1^\pm = \begin{pmatrix} \sigma_1 R_1'(u_0) & * \\ 0 & -\sigma_1 P_n(1,u_0) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2^\pm = \begin{pmatrix} \sigma_2 R_2'(v_0) & * \\ 0 & -\sigma_2 Q_n(v_0,1) \end{pmatrix}.$$

Хотя точка s^0 находится на крае $\mathbf{K}$, мы будем для нее пользоваться той же терминологией, что и для внутренних особых точек. Точка s^0 – гиперболическая особая точка поля $X_{U_1^\pm}$ ($X_{U_2^\pm}$), если диагональные элементы (собственные значения) матрицы $A_1^\pm$ ($A_2^\pm$) ненулевые. Если они одного знака, то s^0 – узел, если противоположных знаков, то s^0 – седло.

В точках $U_1^\pm \cap U_2^\pm$ векторное поле $X_{U_2^\pm}$ получается из векторного поля $X_{U_1^\pm}$ умножением на положительную функцию. Поэтому корректно следующее определение. Точка $s^0 \in \partial\mathbf{K} \cap U_k^\pm$ $(k = 1, 2)$ – *гиперболическая особая точка (седло* или *узел) для векторного поля* X, если она гиперболическая особая точка (седло или узел) для векторного поля $X_{U_k^\pm}$.

Пусть экватор является замкнутой траекторией. Рассмотрим вложение $\eta:[0,1) \to \mathbf{K}$, $\eta(0) \in \partial\mathbf{K}$, трансверсальное $\partial\mathbf{K}$, и функцию последования по траекториям векторного поля X в $\mathbf{K}$: $\eta(\tau) \to \eta(f(\tau))$, $f(0) = 0$. Производная $f'(0)$ не зависит от выбора трансверсали. Экватор – *гиперболическая замкнутая траектория,* если $f'(0) \neq 1$.

Обозначим $\Sigma\mathrm{P}_n$ множество векторных полей из P_n со следующими свойствами:

1). Все особые точки и замкнутые траектории, включая и бесконечно удаленные, являются гиперболическими;

2). Не существует сепаратрис, идущих из седла в седло, и не принадлежащих экватору.

Теорема. Множество $\Sigma\mathrm{P}_n$ состоит из векторных полей, грубых и в $\mathbf{K}$, и в $\mathbf{RP}^2$. Оно открыто и всюду плотно в P_n.

Доказательство. Доказательства грубости векторных полей из $\Sigma\mathrm{P}_n$ и открытости $\Sigma\mathrm{P}_n$ аналогичны соответствующим доказательствам в [1].

Докажем плотность $\Sigma\mathrm{P}_n$ в P_n. Везде далее мы будем рассматривать ориентированные траектории векторных полей из P_n в $\mathbf{K}$.

Пусть $X^0 \in \mathrm{P}_n \setminus \Sigma\mathrm{P}_n$. Зададим число $\varepsilon > 0$. Выберем векторное поле $X = (a_{0,0}, b_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \ldots, b_{n,0}, \ldots, b_{0,n}) \in \mathrm{P}_n$ так, чтобы $a_{0,n} \neq 0$ и $\|X - X^0\| < \varepsilon/8$. Тогда точка

$(0,0)$ не является особой для векторных полей $X_{U_2^\pm}$.

Пусть сначала X имеет на экваторе особые точки. Рассмотрим векторное поле $\tilde{X} = X + \mu x^n \partial/\partial x + \nu x^n \partial/\partial y \in \mathrm{P}_n$. При достаточно малых $|\mu|$ и $|\nu|$ все его особые точки, лежащие на экваторе, принадлежат U_1. Ограничение поля $\tilde{X}_{U_1^\pm}$ на дугу $z = 0$ имеет вид $\sigma_1 \tilde{R}_1(u))\partial/\partial u$, где $\tilde{R}_1(u)) = \nu - \mu u + R_1(u)$. Мы можем выбрать сколь угодно близкие к нулю, но не равные ему, числа μ и ν так, чтобы многочлен $\tilde{R}_1(u)$ имел нули и они были простыми. Пусть $s^0 = (u_0, 0)$ – особая точка поля $\tilde{X}_{U_1}$, т.е. u_0 – нуль $\tilde{R}_1(u)$. При достаточно малом $|\mu|$ матрица линейной части поля $\tilde{X}_{U_1}$ в точке s^0 имеет ненулевые собственные значения $\sigma_1 \tilde{R}_1'(u_0)$ и $\sigma_1(-P_n(1,u_0) - \mu)$, следовательно, s^0 – гиперболическая особая точка. Таким образом, ν и μ можно выбрать так, чтобы все особые точки поля $\tilde{X}$, лежащие на экваторе, являлись гиперболическими, т.е. $\tilde{X} \in \Sigma^0 \mathrm{P}_n$. При этом можно считать $\|\tilde{X} - X\| < \varepsilon/4$.

Так как полиномиальное векторное поле $\tilde{X}$ имеет в $\mathbf{R}^2$ только конечное число особых точек, то они все находятся внутри некоторого открытого круга $D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$. Так как особые точки $\tilde{X}$, принадлежащие экватору, являются гиперболическими, то найдется такое число $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon/4)$, что для любого векторного поля $\tilde{\tilde{X}} \in \mathrm{P}_n$, $\|\tilde{\tilde{X}} - \tilde{X}\| < \varepsilon_1$, все особые точки в $\mathbf{K} \setminus D$ принадлежат пересечению экватора с $U_1^+ \cup U_1^-$ и являются гиперболическими. Согласно [1, с. 179] векторное поле $\tilde{\tilde{X}}$ при этом можно выбрать так, что все его особые точки, принадлежащие D, также являются гиперболическими.

Чтобы не усложнять обозначений, мы далее будем считать, что уже векторное поле $X = (a_{0,0}, b_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, ..., b_{n,0}, ..., b_{0,n})$ имеет только гиперболические особые точки, $a_{0,n} \neq 0$, $\|X - X^0\| < \varepsilon/2$. Рассмотрим векторное поле $X_\mu \in \mathrm{P}_n$, полученное поворотом векторного поля X на угол $\operatorname{arctg}\mu$: $X_\mu = (P - \mu Q)\partial/\partial x + (Q + \mu P)\partial/\partial y$. Его особые точки, принадлежащие $\mathbf{R}^2$, совпадают с особыми точками векторного поля X. Бесконечно удаленные особые точки зависят от μ. Мы можем выбрать столь малое $\delta > 0$, что при $|\mu| < \delta$ $\|X_\mu - X^0\| < \varepsilon$ и X_μ имеет в $\mathbf{K}$ только гиперболические особые точки, причем бесконечно удаленные особые точки принадлежат $U_1^+ \cup U_1^-$.

Лемма. Пусть $s^0 = (u_0, 0)$ – седло векторного поля $X_{U_1^\pm}$. Тогда при достаточно малом δ векторное поле $X_{\mu U_1^\pm}$, $|\mu| < \delta$, имеет седло $\hat{s}(\mu) = (\hat{u}(\mu), 0)$, $\hat{u}(\cdot) \in C^\omega$, $\hat{u}(0) = u_0$, $\hat{u}(\cdot) \in C^\omega$, причем $\hat{u}'(\mu) < 0$.

Доказательство. Так как s^0 – седло, то $R_1'(u_0) P_n(1, u_0) > 0$. Особые точки $(u, 0)$ поля $X_{\mu U_1^\pm}$, лежащие на экваторе, находим из уравнения $R_1(u) + \mu(u Q_n(1,u) + P_n(1,u)) = 0$.

По теореме о неявной функции получаем, что при достаточно малом $\delta > 0$ это уравнение имеет решение $u = \hat{u}(\mu)$, $|\mu| < \delta$, где $\hat{u}(\cdot) \in C^\omega$, $\hat{u}(0) = u_0$,

$\hat{u}'(0) = -\dfrac{u_0 Q_n(1,u_0) + P_n(1,u_0)}{R'(u_0)}$. Используя равенство $R_1(u_0) = -u_0 P_n(1,u_0) + Q_n(1,u_0) = 0$, получаем $\hat{u}'(0) = -(u_0^2+1)P_n(1,u_0)/R'(u_0) < 0$. Если δ достаточно мало, то при $|\mu| < \delta$ $\hat{s}(\mu) = (\hat{u}(\mu),0)$ – седло, а $\hat{u}'(\mu) < 0$. Лемма доказана.

Далее будем считать δ выбранным так, что утверждение леммы выполняется для любого седла на экваторе. Мы можем пронумеровать все седла $s_i(\mu)$, $i \in \{1,..,N\}$, векторного поля X_μ, $|\mu| < \delta$, так, чтобы $s_i(\mu)$ не зависело от μ, если $s_i(\mu) \in \mathbf{R}^2$, и непрерывно зависело от μ, если $s_i(\mu)$ лежит на экваторе. Мы можем также считать, что для любой сепаратрисы L_0 седла $s_i(0)$ поля X, не лежащей на экваторе, существует такая дуга $\eta \subset \mathbf{R}^2$, что для любого μ, $|\mu| < \delta$, существует сепаратриса $L(\mu)$ седла $s_i(\mu)$ поля X_μ, совпадающая при $\mu = 0$ с L_0 и трансверсально пересекающая дугу η в единственной точке $c(\mu)$, непрерывно зависящей от μ. Ясно, что $L(\mu)$ не зависит от выбора трансверсали η. Будем называть $L(\mu)$ – *продолжением по параметру* μ сепаратрисы L_0 и любой сепаратрисы $L(\mu_0)$, $|\mu_0| < \delta$.

Покажем, что если векторное поле X имеет экватор замкнутой траекторией, то при достаточно малом δ экватор является гиперболической замкнутой траекторией векторного поля X_μ, $\mu \in (0,\delta)$. Перейдем к координатам r, φ: $x = \dfrac{\cos\varphi}{r}$, $y = \dfrac{\sin\varphi}{r}$. Тогда:

$$X_\mu = R(r,\varphi,\mu)\frac{\partial}{\partial r} + \Phi(r,\varphi,\mu)\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\begin{aligned} R(r,\varphi,\mu) = -r^2[&P(x,y)\cos\varphi + Q(x,y)\sin\varphi + \\ &+ \mu(P(x,y)\sin\varphi - Q(x,y)\cos\varphi)]_{x=\cos\varphi/r,\, y=\sin\varphi/r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(r,\varphi,\mu) = r[&Q(x,y)\cos\varphi - P(x,y)\sin\varphi + \\ &+ \mu(P(x,y)\cos\varphi + Q(x,y)\sin\varphi)]_{x=\cos\varphi/r,\, y=\sin\varphi/r}. \end{aligned}$$

Обозначим

$A(\varphi) = P_n(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi + Q_n(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi$,

$B(\varphi) = -P_n(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi + Q_n(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi$,

$R^*(r,\varphi,\mu) = r^{n-1}R(r,\varphi,\mu) = -r(A(\varphi) - \mu B(\varphi)) + r^2\hat{R}(r,\cos\varphi,\sin\varphi,\mu)$,

$\Phi^*(r,\varphi,\mu) = r^{n-1}\Phi(r,\varphi,\mu) = B(\varphi) + \mu A(\varphi) + r\hat{\Phi}(r,\cos\varphi,\sin\varphi,\mu)$,

где $\hat{R}(r,\xi,\eta,\mu)$ и $\hat{\Phi}(r,\xi,\eta,\mu)$ – многочлены от r,ξ,η,μ.

Так как экватор – замкнутая траектория, то для любого $u \in \mathbf{R}$ $R_1(u) \neq 0$. Отсюда, учитывая, что $a_{0,n} \neq 0$, получаем $B(\varphi) \neq 0$. Тогда числа $\delta > 0$ и $r_* > 0$ можно считать выбранными так, что $\Phi^*(r,\varphi,\mu) \neq 0$, если $0 \le r \le r_*$, $|\mu| < \delta$. Пусть $r = \hat{r}(\varphi,\rho,\mu)$ – решение уравнения $\dfrac{dr}{d\varphi} = \dfrac{R^*(r,\varphi,\mu)}{\Phi^*(r,\varphi,\mu)}$, удовлетворяющее условию $\hat{r}(0,\rho,\mu) = \rho$. Ясно, что $\hat{r}(\varphi,0,\mu) \equiv 0$. Функция $f_\mu(\cdot) = -\hat{r}(\pi,\cdot,\mu)$ является функцией последования на трансверсали к экватору по траекториям векторного поля X_μ ($-X_\mu$) при $B(\varphi) > 0$ ($B(\varphi) < 0$).

Производная $\hat{r}'_\rho(\varphi,0,\mu)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{d\varphi}\hat{r}'_\rho = \frac{(R^*)'_r(0,\varphi,\mu)}{\Phi^*(0,\varphi,\mu)}\hat{r}'_\rho$$

и начальному условию $\hat{r}'_\rho(0,0,\mu)=1$. Поэтому $(f_\mu)'(0) = -\exp h(\mu)$, где

$$h(\mu) = -\int_0^\pi (A(\varphi)-\mu B(\varphi))/(B(\varphi)+\mu A(\varphi))d\varphi .$$

Так как $h'(0)=\int_0^\pi (A^2(\varphi)+B^2(\varphi))/B^2(\varphi)d\varphi > 0$, то при достаточно малом δ для любого $\mu \in (0,\delta)$ $h(\mu)\neq 0$, т.е. экватор – гиперболическая траектория поля X_μ.

Пусть векторное поле X_{μ_*}, $\mu_* \in (0,\delta)$, имеет сепаратрису L_1, идущую из седла $s_\alpha(\mu_*)$ в седло $s_\omega(\mu_*)$ и не лежащую на экваторе. Выходящую сепаратрису седла $s_\alpha(\mu)$, являющуюся продолжением по параметру сепаратрисы L_1, будем обозначать $L_1^-(\mu)$. Согласно [3] существует единственная последовательность сепаратрис $L_0, L_1, L_2, ..., L_k$, такая, что при $i \in \{0,1,...,k-1\}$ L_{i+1} является ω-продолжением L_i с положительной стороны, при $i\in\{1,...,k-1\}$ L_i идет из седла в седло и либо (А) все сепаратрисы в этой последовательности различны, а L_k не является входящей сепаратрисой седла, либо (Б) L_i, $i\in\{0,1,...,k-1\}$, различны, $L_k = L_0$ и $L=\overline{L}_1\cup...\cup\overline{L}_k$ является или (Б$_1$) предельным множеством для траекторий поля X_{μ_*}, или (Б$_2$) топологическим пределом последовательности замкнутых траекторий поля X_{μ_*}.

Рассмотрим случай (А). Пусть сначала L_k ω-предельна к узлу или фокусу (рис. 1 и рис. 2).

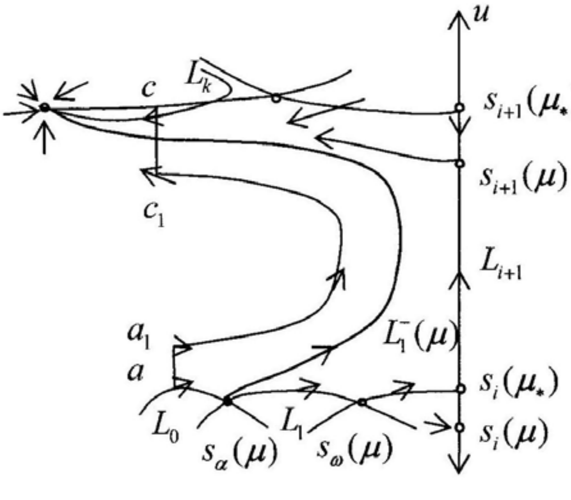

Рис. 1

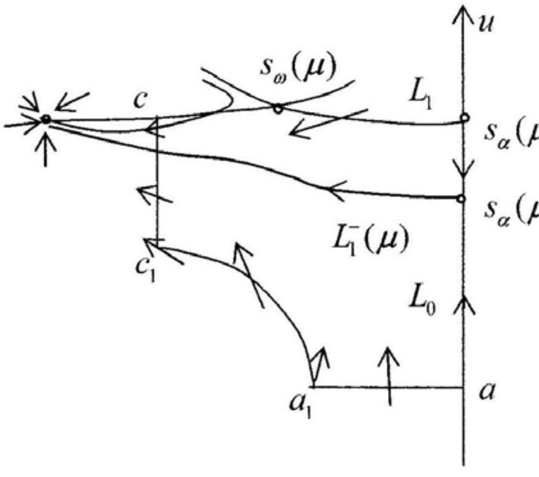

Рис. 2

Выберем точки $a\in L_0$, $c\in L_k$ и гладкие дуги $\overset{\frown}{ab}$ и $\overset{\frown}{cd}$, трансверсальные траекториям поля X_{μ_*} и расположенные с положительной стороны соответственно, от L_0 и L_k. При этом мы можем считать, что положительные полутраектории поля X_{μ_*}, начинающиеся в точках $\overset{\frown}{ab}\setminus\{a\}$, пересекают дугу $\overset{\frown}{cd}$. Согласно [1, с. 85] существует гладкое вложение $g:[0,1]\times[0,1]\to\mathbf{R}^2$, такое, что $g([0,1]\times\{0\})\subset \overset{\frown}{ab}\setminus\{a\}$, $g(0,0)=a$,

$g([0,1]\times\{1\})\subset \overset{\frown}{cd}$, а $\forall\tau\in[0,1]$ $g(\{\tau\}\times[0,1])$ – дуга траектории поля X_{μ_*}. Обозначим $\overset{\frown}{aa_1}$ aa_1 – часть дуги $\overset{\frown}{ab}$ между точками a и $a_1:=g(1,0)$, $\overset{\frown}{cc_1}$ – часть дуги $\overset{\frown}{cd}$ между точками c и $c_1:=g(0,1)$ и $\overset{\frown}{a_1c_1}:=\{g(1-\tau,\tau):\tau\in[0,1]\}$. Пусть L_0^+ (L_k^-) – положительная (отрицательная) полутраектория поля X_{μ_*}, начинающаяся в точке a (c). Обозначим $L_*=L_0^+\cup\overline{L}_1\cup...\cup\overline{L}_{k-1}\cup L_k^-$. Континуум $\partial G:=\overset{\frown}{aa_1}\cup\overset{\frown}{a_1c_1}\cup\overset{\frown}{cc_1}\cup L_*$ является границей области G, состоящей из (открытых) дуг траекторий поля X_{μ_*}, один из концов которых принадлежит $\overset{\frown}{aa_1}\cup\overset{\frown}{a_1c_1}\setminus\{a,c_1\}$, а другой – $\overset{\frown}{cc_1}\setminus\{c,c_1\}$. В точках $\overset{\frown}{aa_1}\cup\overset{\frown}{a_1c_1}$ векторное поле X_{μ_*} направлено внутрь G, в точках $\overset{\frown}{cc_1}$ – направлено вовне G. Мы можем выбрать такой интервал $(\mu_*,\mu_*+\nu)\subset(0,\delta)$, что при $\mu\in(\mu_*,\mu_*+\nu)$ векторное поле X_μ направлено внутрь G в точках $\overset{\frown}{aa_1}\cup\overset{\frown}{a_1c_1}$, L_0^+, $L_k^-\setminus\{c\}$, в точках сепаратрис L_i, не лежащих на экваторе, и направлено вовне G в точках $\overset{\frown}{cc_1}$.

Покажем, что не существует положительных полутраекторий поля X_μ, $\mu\in(\mu_*,\mu_*+\nu)$, принадлежащих G. Пусть такая полутраектория $\tilde{L}^+(\mu)$ существует. Тогда она является продолжением по параметру входящей сепаратрисы L_*^+ седла $\hat{s}_i:=s_{j_i}(\mu_*)=\omega(L_i)$, $i\in\{0,1,...,k-1\}$, поля X_{μ_*}. Логически возможны следующие случаи: 1) $\hat{s}_i\in\mathbf{R}^2$, $L_*^+=L_i$; 2) $\hat{s}_i\in\mathbf{R}^2$, L_*^+ не совпадает ни с одной из сепаратрис из последовательности $\{L_i\}$; 3) $\hat{s}_i\in\partial\mathbf{K}$.

Рассмотрим сначала случай 1). Выберем гладкое вложение $\eta:[-1;1]\to\mathbf{R}^2$, трансверсальное полю X_{μ_*} так, чтобы $\eta(0)\in L_i$, $\eta:(0;1]\subset G$. Обозначим L_i^+ – положительную полутраекторию траектории L_i, начинающуюся в точке $\eta(0)$. Если ν достаточно мало, то η трансверсально и полю X_μ, $\mu\in(\mu_*,\mu_*+\nu)$. Пусть $L^+(\mu)$ содержит положительную полутраекторию $L^{++}(\mu)$, принадлежащую G. Тогда при достаточно малом ν $L^+(\mu)$ пересекается с $\eta(0;1]$ в точке $\eta(\tau_\mu)$. Положительная полутраектория поля X_μ, начинающаяся в любой точке L_i^+, не выходит из области, ограниченной простой замкнутой кривой $L_i^+\cup L^{++}(\mu)\cup\eta[0,\tau_\mu]\cup\{\hat{s}_i\}$, и потому должна быть ω-предельна к $\hat{s}_i$. Но это невозможно. Поэтому случай 1) не реализуется.

Рассмотрим случай 2). В этом случае, согласно [1, с. 91], существует треугольник Δ с вершиной в точке $\hat{s}_i$, для которого $\Delta\cap G=\{\hat{s}_i\}$, и при достаточно малом ν сепаратриса $\tilde{L}^+(\mu)$, $\mu\in(\mu_*,\mu_*+\nu)$, содержит положительную полутраекторию, целиком принадлежащую Δ. Но это противоречит выбору $\tilde{L}^+(\mu)$. Следовательно, случай 2) невозможен.

Рассмотрим случай 3). Если сепаратриса L_i принадлежит экватору, то обе входящие сепаратрисы седла $s_{j_i}(\mu)$, $\mu\in(\mu_*,\mu_*+\nu)$, также принадлежат экватору и потому не совпадают с $\tilde{L}^+(\mu)$. Пусть сепаратриса L_i не принадлежит экватору. Тогда экватору принадлежит сепаратриса L_{i+1}. Если точка $\hat{s}_i$ принадлежит U_1^+ (U_1^-), то точки с положительной стороны от $U_1^+ \cap L_{i+1}$ $(U_1^- \cap L_{i+1})$ имеют координату $z > 0$ $(z > 0)$. Так как якобиан отображения $\xi_1^+ \xi_0^{-1}$ $(\xi_1^- \xi_0^{-1})$ перехода от карты (U_0, ξ_0) к карте (U_1^+, ξ_1^+) $((U_1^-, \xi_1^-))$ положителен (отрицателен), то ориентация на L_{i+1} определятся направлением возрастания координаты u. Тем самым, если точка $\hat{s}_i$ имеет координату $u = u_i$, то все точки $U_1^+ \cap L_{i+1}$ $(U_1^- \cap L_{i+1})$ имеют координаты $u > u_i$. Вследствие леммы при достаточно малом v точка $s_{j_i}(\mu)$ имеет координату u меньше u_i и не принадлежит L_{i+1}. Потому ее единственная входящая сепаратриса содержит положительную полутраекторию, не имеющую общих точек с G. Таким образом, случай 3) также невозможен. Следовательно, положительных полутраекторий поля X_μ, $\mu \in (\mu_*, \mu_* + v)$, принадлежащих G, не существует.

Пусть седло $s_\alpha(\mu_*)$ не принадлежит экватору (рис. 1). Из [1, с. 106-108] следует, что при $\mu \in (\mu_*, \mu_* + v)$ некоторая отрицательная полутраектория сепаратрисы $L_1^-(\mu)$ принадлежит G. Рассмотрим теперь случай, когда седло $s_\alpha(\mu_*)$ принадлежит экватору (рис. 2). В силу леммы 2 можно считать, что при $\mu \in (\mu_*, \mu_* + v)$ точка $s_\alpha(\mu)$ лежит внутри L_0^+. Поэтому некоторая отрицательная полутраектория ее выходящей сепаратрисы $L_1^-(\mu)$ принадлежит G.

Поскольку сепаратриса $L_1^-(\mu)$ целиком G принадлежать не может, то она выходит из G в точках дуги $\overset{\frown}{cc_1}$. При достаточно малом v все траектории поля X_μ, $\mu \in (\mu_*, \mu_* + v)$, проходящие через точки дуги $\overset{\frown}{cc_1}$, и, в частности $L_1^-(\mu)$, также как и L_k, ω-предельны к узлу или фокусу.

Пусть ω-предельное множество $\omega(L_k)$ – цикл или сепаратрисный контур. Тогда через точку, принадлежащую L_k и достаточно близкую к $\omega(L_k)$, можно провести замкнутую трансверсаль Γ векторного поля X_{μ_*}, не пересекающуюся с L_*. По теореме Жордана $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ состоит из двух связных компонент. Точка $s_\omega(\mu_*)$ и множество $\omega(L_k)$ принадлежат разным компонентам. При достаточно малом $v > 0$ Γ – трансверсаль и для векторного поля X_μ, $\mu \in (\mu_*, \mu_* + v)$, и, как и выше, доказывается, что сепаратриса $L_1^-(\mu)$ также пересекает Γ. Но тогда $s_\omega(\mu)$ и множество $\omega(L_1(\mu))$ также принадлежат разным компонентам и потому не совпадают.

В случае (Б$_1$) существует замкнутая трансверсаль Γ векторного поля X_{μ_*}, а в случае (Б$_2$) – замкнутая траектория Γ, такие, что Γ и L ограничивают область G, гомеоморфную цилиндру и не содержащую особых точек. При достаточно малом $v > 0$ кривая Γ является трансверсалью для поля X_μ, $\mu \in (\mu_*, \mu_* + v)$. По теореме Жордана $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ состоит из двух связных компонент C_1 и C_2. Континуум L и область G принадлежат одной из них, для определенности – C_1. Как и выше доказывается, что сепаратриса $L_1^-(\mu)$ содержит отрицательную полутраекторию, принадлежащую G, и выйти $L_1^-(\mu)$ из G может только через точку Γ; если $L_1^-(\mu)$ не выходит из G, то она не может быть ω-предельной к $s_\omega(\mu)$; если $L_1^-(\mu)$ пересекает Γ, то ее ω-предельное множество принадлежит компоненте C_2 и также не совпадает с $s_\omega(\mu)$.

Пусть по-прежнему L_1 – сепаратриса, идущая из седла $s_\alpha(\mu_*)$ в седло $s_\omega(\mu_*)$, а $L_0, L_1, ..., L_k$ теперь такая последовательность сепаратрис, что L_{i+1} является ω-продолжением L_i с отрицательной стороны. Аналогично предыдущему доказывается, что при достаточно малом $\nu > 0$ сепаратриса $L_1^-(\mu)$, $\mu \in (\mu_* - \nu, \mu_*)$, не совпадает с входящей сепаратрисой седла $s_\omega(\mu)$.

Таким образом, если имеются значения параметра $\mu \in (0, \delta)$, при которых существует траектория поля X_μ, идущая из седла $s_\alpha(\mu)$ в седло $s_\omega(\mu)$, не лежащая на экваторе, то они изолированы. Поскольку число пар седел конечно, то существует такой интервал $(\underline{\mu}, \overline{\mu}) \subset (0, \delta)$, что для любого μ из него векторное поле X_μ не имеет сепаратрис, идущих из седла в седло.

Возьмем число $\mu^* \in (\underline{\mu}, \overline{\mu})$. Из того, что векторное поле X_{μ^*} аналитическое, не имеет сепаратрис, идущих из седла в седло, а экватор, если является для него замкнутой траекторией, то гиперболической, следует, что X_{μ^*} имеет конечное число замкнутых траекторий $\Gamma_i, i \in \{1, ..., m\}$. Далее будем действовать аналогично [1, с. 181-182]. Выберем непересекающиеся между собой (замкнутые) канонические окрестности U_i циклов Γ_i с границами ∂U_i, состоящими из двух замкнутых трансверсалей, если $\Gamma_i \subset \mathbf{R}^2$, и из одной замкнутой трансверсали, если Γ_i совпадает с экватором. Векторное поле X_{μ^*} в $\mathbf{K} \setminus \bigcup_{i=1}^m U_i$ не имеет замкнутых траекторий и потому является грубым. Следовательно, существует такое $\rho > 0$, что $(\mu^*, \mu^* + \rho) \subset (\underline{\mu}, \overline{\mu})$, векторное поле X_μ, $\mu \in (\mu^*, \mu^* + \rho)$, трансверсально $\bigcup_{i=1}^m \partial U_i$ и не имеет в $\mathbf{K} \setminus \bigcup_{i=1}^m U_i$ замкнутых траекторий. Из [1, с. 406-407] следует, что при достаточно малом ρ все замкнутые траектории поля X_μ, $\mu \in (\mu^*, \mu^* + \rho)$, принадлежащие $\bigcup_{i=1}^m U_i$, являются гиперболическими. Так как замкнутые траектории не пересекаются с замкнутыми трансверсалями, то других замкнутых траекторий у X_μ нет. Следовательно, $X_\mu \in \Sigma\mathrm{P}_n$. Поскольку $\left\| X_\mu - X^0 \right\| < \varepsilon$, то мы доказали плотность $\Sigma\mathrm{P}_n$ в P_n.

Отметим, что при доказательстве были использованы некоторые идеи из работы автора [4].

Примечания:

1. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука, 1967. 488 с.
2. Хирш М. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979. 280 с.
3. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука, 1966. 568 с.
4. Ройтенберг В.Ш. О типичных уравнениях Льенара // Ярославский педагогический вестник. 2013. Т. III (Естественные науки), № 1. С. 74-78.

References:

1. The theory of bifurcations of dynamical systems on a plane / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier. M.: Nauka, 1967. 488 pp.
2. Hirsch M. Differential topology. M.: Mir, 1979. 280 pp.
3. The qualitative theory of second-order dynamical systems / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier. M.: Nauka, 1966. 568 pp.
4. Roytenberg V.Sh. On generic Lienard equations // Yaroslavl Pedagogical Bulletin. 2013. Vol. III (Natural Sciences), No. 1. P. 74-78.