УДК 517.2/.3
ББК 22.161.61
Т 49

Тлячев В.Б.
Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-08, e-mail: stvb2006@rambler.ru
Ушхо А.Д.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-08, e-mail: uschho76@mail.ru
Ушхо Д.С.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-05, e-mail: damirubych@mail.ru

Об инвариантных множествах полиномиального векторного поля n-ой степени*

(Рецензирована)

Аннотация. *Определена количественная связь между инвариантными множествами, состоящими из параллельных между собой инвариантных прямых с некоторым угловым коэффициентом, и инвариантными прямыми полиномиального векторного поля n-ой степени. Приведены примеры возможных расположений инвариантных прямых. Доказано, что во множестве полиномиальных систем при $n=4$, имеющих определенные инвариантные множества, существуют системы с девятью инвариантными прямыми.*

Ключевые слова: *инвариантное множество, векторное поле, инвариантная прямая, изоклина бесконечности (нуля), система с вырожденной бесконечностью, проективно особая система.*

Tlyachev V.B.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Physics Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-08, e-mail: tlyachev@adygnet.ru
Ushkho A.D.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Theoretical Physics Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-08, e-mail: uschho76@mail.ru
Ushkho D.S.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics, Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-05, e-mail: damirubych@mail.ru

Invariant sets of the n-th order polynomial vector field

Abstract. *A quantitative relationship is determined between the invariant sets consisting of mutually parallel invariant lines with some slope and invariant lines of the polynomial vector field of the n-th order. Examples are given of possible configurations of invariant lines. It is proved that systems are available with nine invariant lines in the set of polynomial systems with $n = 4$, having certain invariant sets.*

Keywords: *invariant set, vector field, invariant line, infinity (zero) isocline, the system with degenerate infinity, the projective special system.*

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} P_i(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i(x,y) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

* *Работа частично выполнена в рамках Госзадания Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 451*

где $P_i(x,y)=\sum\limits_{r+s=i} a_{rs}x^r y^s$, $Q_i(x,y)=\sum\limits_{r+s=i} b_{rs}x^r y^s$, $(P,Q)=1$, $\deg(P^2(x,y)+Q^2(x,y))=2n$, $n\in N\setminus\{1,2\}$.

Исследованию векторного поля, заданного системой (1), на предмет изучения его инвариантных прямых и связанных с ними смежных вопросов посвящены работы [1-6]. Так, в работе [1] дается оценка сверху количества инвариантных прямых системы (1). Авторами статей [2-5] доказано, что полиномиальное векторное поле (1) при $n=4$ имеет не более девяти инвариантных прямых. В статье [6] доказано, что число инвариантных прямых системы (1) с вырожденной бесконечностью при наличии у нее инвариантных множеств $M_n^k(k)$ и M_A^n не превосходит $2n+1\ (2n+2)$, если n – четно (нечетно).

Напомним, что система (1) называется *системой с вырожденной бесконечностью* (проективно особой) по терминологии [3-5] ([7]), если выполняется условие $xQ_n(x,y)-yP_n(x,y)\equiv 0$.

Как и в работе [6], под символом $M_S^k(k)$ $\left(M_A^r\right)$ будем понимать инвариантное множество, состоящее из S параллельных между собой инвариантных прямых с угловым коэффициентом k (из r инвариантных прямых, инцидентных состоянию равновесия A этой системы).

В данной работе изучается система (1), имеющая инвариантное множество $M_n^{k_0}(k_0)$ и максимальное число инвариантных множеств $M_2^k(k)$, где $k_0\neq k$.

Теорема 1. Пусть система (1) имеет инвариантное множество $M_n^{k_0}(k_0)$ и хотя бы одно инвариантное множество $M_2^k(k)$, где $k_0,k\in R$, $k_0\neq k$. Тогда посредством аффинного преобразования переменных x и y можно привести систему (1) к системе

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{x}}{dt}=\tilde{x}(\tilde{x}-1)\tilde{P}_{n-2}(\tilde{x},\tilde{y}),\\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt}=\tilde{y}(\tilde{y}-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(\tilde{y}-\alpha_{n-1}),\end{cases}\tag{2}$$

где $0<\alpha_1<\ldots<\alpha_{n-1}$, $\tilde{P}_{n-2}(\tilde{x},\tilde{y})$ – многочлен степени, не выше $n-2$, $n\in R\setminus\{1,2\}$.

Доказательство. Под углом между множествами $M_n^{k_0}(k_0)$ и $M_2^{k_i}(k_i)$ условимся понимать угол между положительным направлением прямой $L\in M_n^{k_0}(k_0)$ и прямой $l\in M_2^{k_i}(k_i)$, отсчитываемый от положительного направления прямой L до прямой l в направлении против хода часовой стрелки. Обозначим углы между множеством $M_n^{k_0}(k_0)$ и множествами $M_2^{k_1}(k_1)$, $M_2^{k_2}(k_2)$, …, $M_2^{k_m}(k_m)$ через $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m$ соответственно.

Пусть $\varphi=\min(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_m)$, причем $0<\varphi_i<\pi$, $i=\overline{1,m}$, $k=tg(\varphi+\varphi_0)$, где $k_0=tg\varphi_0$. Здесь φ_0 – угол между прямой L и положительным направлением оси абсцисс, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс в направлении против хода часовой стрелки.

Совершим в системе (1) преобразование

$$\begin{cases}x=\bar{x}+\bar{y},\\ y=k_0\bar{x}+k\bar{y}.\end{cases}\tag{3}$$

Согласно работе [8], преобразование (3) переводит инвариантные прямые множества $M_2^k(k)$ ($M_n^{k_0}(k_0)$) в изоклину бесконечности (нуля) системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = (\overline{x} - a_1)(\overline{x} - a_2)P_{n-2}(\overline{x}, \overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = (\overline{y} - \beta_1)(\overline{y} - \beta_2)\cdot\ldots\cdot(\overline{y} - \beta_n), \end{cases} \tag{4}$$

где $P_{n-2}(\overline{x}, \overline{y})$ – многочлен степени, не выше $n-2$, $a_1 \neq a_2$, $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n$.

В результате параллельного переноса $\begin{cases} \mu = \overline{x} - a_1, \\ \eta = \overline{y} - \beta_1 \end{cases}$ система (4) преобразуется в систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu}{dt} = \mu(\mu - \omega)\overline{P}_{n-2}(\mu, \eta), \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \eta(\eta - \alpha_1)\cdot\ldots\cdot(\eta - \alpha_{n-1}), \end{cases} \tag{5}$$

где $\overline{P}_{n-1}(\mu, \eta)$ – многочлен степени, не выше $n-2$, $\omega \neq 0$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-1}$.

Наконец, применив к системе (5) преобразование $\begin{cases} \mu = \omega\tilde{x}, \\ \eta = \tilde{y}, \end{cases}$ получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{x}(\tilde{x} - 1)\tilde{P}_{n-2}(\tilde{x}, \tilde{y}), \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{y}(\tilde{y} - \alpha_1)\cdot\ldots\cdot(\tilde{y} - \alpha_{n-1}), \end{cases} \tag{6}$$

где $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1}$, $\tilde{P}_{n-2}(\tilde{x}, \tilde{y})$ – многочлен степени, не выше $n-2$. Теорема доказана.

Далее рассмотрим систему (6) в старых обозначениях фазовых переменных, а именно систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)P_{n-2}(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y - \alpha_1)\cdot\ldots\cdot(y - \alpha_{n-1}). \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) имеет инвариантные множества

$$M_n^0(0) = \{y = 0, y - \alpha_1 = 0, \ldots, y - \alpha_{n-1} = 0\}, \qquad M_2^\infty(\infty) = \{x = 0, x - 1 = 0\}.$$

Сформулируем в виде утверждений свойства системы (7), вытекающие из процедуры доказательства теоремы 1.

Утверждение 1. Если существует инвариантная прямая L_0 системы (7), проходящая через точку (0,0) и отличная от осей координат, то $L_0 \in H_1 \cup H_3 \cup \{(0,0)\}$, где H_1 (H_3) – первая (третья) координатная четверть.

Утверждение 2. Если $M_2^k(k)$ инвариантное множество системы (7), где $k \in R \setminus \{0\}$, то $k < 0$.

Теорема 2. Пусть $M_2^{k_1}(k_1)$, $M_2^{k_2}(k_2)$, …, $M_2^{k_m}(k_m)$ – инвариантные множества системы (7), причем $k_i \in R \setminus \{0\}$, $i = \overline{1, m}$. Тогда $m \leq \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$.

Доказательство. Условимся считать, что прямые $y - k_i x - b_i^f = 0$, $i = \overline{1, m}$, $f = 1;2$, принадлежат инвариантному множеству $M_2^{k_i}(k_i)$. Поскольку прямые $y - k_i x - b_i^f = 0$

являются инвариантными для системы (7), то имеет место система

$$\begin{cases} \psi(y) \equiv k_1 x(x-1)P_{n-2}(x,y) + (y-k_1x-b_1^1)(y-k_1x-b_1^2)R_1(x,y), \\ \psi(y) \equiv k_2 x(x-1)P_{n-2}(x,y) + (y-k_2x-b_2^1)(y-k_2x-b_2^2)R_2(x,y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi(y) \equiv k_m x(x-1)P_{n-2}(x,y) + (y-k_mx-b_m^1)(y-k_mx-b_m^2)R_m(x,y), \end{cases} \tag{8}$$

где $\psi(y) = y(y-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(y-\alpha_{n-1})$, $R_i(x,y),\ i=\overline{1,m}$, – многочлен степени, не выше $n-2$.

Полагая в системе (8) $x=0$, получим

$$\begin{cases} \psi(y) \equiv (y-b_1^1)(y-b_1^2)R_1(0,y), \\ \psi(y) \equiv (y-b_2^1)(y-b_2^2)R_2(0,y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi(y) \equiv (y-b_m^1)(y-b_m^2)R_m(0,y). \end{cases} \tag{9}$$

Из (9) следует, что $y-b_i^f$, $i=\overline{1,m},\ f=1;2$, является делителем многочлена $\psi(y)$. Поэтому, учитывая условия $b_i^f \neq 0,\ i=\overline{1,m},\ f=1,2$, получим оценку $m \le \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$. Теорема доказана.

Из теоремы (2) с учетом того, что система (7) имеет инвариантные множества $M_n^0\ (0)$, $M_2^\infty(\infty)$, получаем

Следствие 1. Если система (1) имеет инвариантное множество $M_n^{k_0}(k_0)$, то максимальное число N инвариантных множеств $M_2^k(k)$ этой системы удовлетворяет неравенству $N \le \left[\dfrac{n-1}{2}\right]+1,\ n\in N,\ n\ge 3$.

Теорема 3. Пусть система (1) при $n=3$ имеет инвариантные множества $M_3^{k_0}(k_0)$, $M_2^{k_1}(k_1)$, $M_2^{k_2}(k_2)$, где $k_0,k_1,k_2 \in R$, $(k_0-k_1)(k_0-k_2)(k_1-k_2)\neq 0$.

Тогда эта система имеет восемь инвариантных прямых.

Доказательство. Не уменьшая общности, рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(Ax+By+C), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-\alpha_1)(y-\alpha_2),\ 0<\alpha_1<\alpha_2, \end{cases} \tag{10}$$

имеющую, кроме инвариантных множеств $M_3^0(0)=\{y=0, y-\alpha_1=0, y-\alpha_2=0\}$ и $M_2^\infty(\infty)=\{x=0; x-1=0\}$, инвариантное множество $M_2^k(k)$, где $k<0$. Покажем, что $k=-\alpha_1,\ \alpha_2=2\alpha_1$. Для этого обратимся к рисунку 1.

Пусть инвариантное множество $M_2^k(k)$ состоит из прямых $l_1: y-kx-b_1=0$, $l_2: y-kx-b_2=0$, причем $0<b_1<b_2$. В силу утверждения 1 прямая l_1 не проходит через начало координат и $k<0$ по утверждению 2. Следовательно, l_1 проходит через точку $(0,\alpha_1)$. Через точку $(0,\alpha_2)$ l_1 не может проходить, т.к. в противном случае l_2 пересечет ось ординат в точке, расположенной выше точки $(0,\alpha_2)$. Это недопустимо в силу того, что на прямой l_2 система (10) имеет не более трех состояний равновесия. Тем самым приходим к выводу, что l_1 проходит через точки $(0,\alpha_1)$ и $(1;0)$, а l_2 – через точки $(0,\alpha_2)$ и $(1,\alpha_1)$.

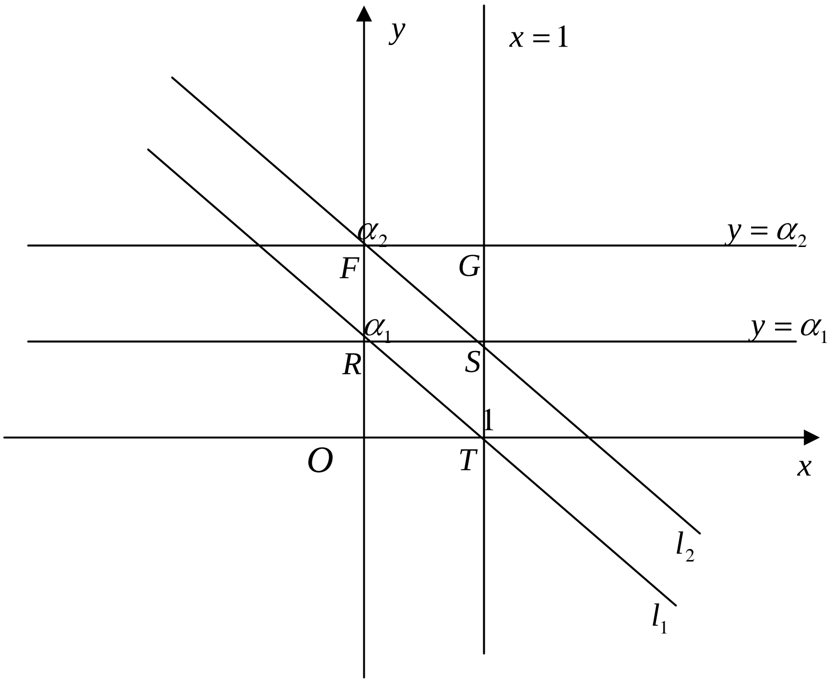

Рис. 1. В силу параллельности прямых l_1 и l_2 равны прямоугольники $ORST$ и $RFGS$

В силу параллельности прямых l_1 и l_2 равны прямоугольники $ORST$ и $RFGS$. Следовательно, $\alpha_2 = 2\alpha_1$, $k = -\alpha_1$.

Таким образом, система (10) имеет инвариантные прямые $l_1 : y + \alpha_1 x - \alpha_1 = 0$ и $l_2 : y + \alpha_1 x - 2\alpha_1 = 0$.

Учитывая этот факт, путем несложных вычислений убедимся в том, что $A = -2\alpha_1^{\ 2}$, $B = -3\alpha_1$, $C = 4\alpha_1^2$, а значит система (10) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(-2\alpha_1^2 x - 3\alpha_1 y + 4\alpha_1^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(y-2\alpha_1). \end{cases} \qquad (11)$$

Но для системы (11) прямая $y + 2\alpha_1 x - 2\alpha_1 = 0$ является инвариантной. Ссылка на работы [1, 9], согласно которым система (11) имеет не более восьми инвариантных прямых, завершает доказательства теоремы.

Пример 1. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = x(x-1)(-2x-3y+4), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(y-2) \end{cases} \qquad (12)$$

имеет, кроме очевидных инвариантных множеств

$$M_2^{\infty}(\infty) = \{x = 0, x - 1 = 0\} \quad \text{и} \quad M_3^0(0) = \{y = 0; y - 1 = 0; y - 2 = 0\},$$

инвариантное множество $M_2^{-1}(-1) = \{y + x - 1 = 0; y + x - 2 = 0\}$ и инвариантную прямую

$y+2x-2=0$.

Впрочем, система (12) – частный случай системы (11) при $\alpha_1=1$.

В случае $n=4$ система (1), имеющая инвариантные множества $M_4^{k_0}(k_0)$, $M_2^{k_1}(k_1)$, $M_2^{k_2}(k_2)$, не всегда имеет инвариантную прямую $L\notin M_4^{k_0}(k_0)\cup M_2^{k_1}(k_1)\cup M_2^{k_2}(k_2)$, где $(k_0-k_1)(k_0-k_2)(k_1-k_2)\neq 0$.

Пример 2. Множество всех инвариантных прямых системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x(x-1)(8x^2+4xy-y^2-18x+3y-5),\\ \dfrac{dy}{dt}=y(y-2)(y-3)(y-5)\end{cases}$$

представляет собой объединение множеств

$$M_4^0(0)=\{y=0; y-2=0; y-3=0; y-5=0\},$$

$$M_2^{\infty}(\infty)=\{x=0; x-1=0\},\qquad M_2^{-2}(-2)=\{y+2x-2=0; y+2x-5=0\}.$$

Пример 3. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(x-1)(2x^2+2xy-y^2-5x+2y-3),\\ \dfrac{dy}{dt}=y(y-1)(y-2)(y-3)\end{cases}$$

не имеет инвариантной прямой $\overline{L}\notin M_4^{k_0}(k_0)\cup M_2^{\infty}(\infty)\cup M_2^{-1}(-1)$, где

$$M_4^0(0)=\{y=0; y-1=0; y-2=0; y-3=0\},$$

$$M_2^{\infty}(\infty)=\{x=0; x-1=0\},\qquad M_2^{-1}(-1)=\{y+x-1=0; y+x-3=0\}.$$

Пример 4. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(x-1)(20x^2+12xy-y^2-38xy-3y+12),\\ \dfrac{dy}{dt}=y(y-1)(y-2)(y-3)\end{cases}$$

имеет инвариантные множества

$$M_4^0(0)=\{y=0; y-1=0; y-2=0; y-3=0\},$$

$$M_2^{\infty}(\infty)=\{x=0; x-1=0\},\qquad M_2^{-2}(-2)=\{y+2x-2=0; y+2x-3=0\},$$

но не имеет инвариантной прямой $\overline{L}\notin M_4^0(0)\cup M_2^{\infty}(\infty)\cup M_2^{-2}(-2)$.

Однако существуют полиномиальные векторные поля четвертой степени, имеющие инвариантные множества $M_4^{k_0}(k_0)$, $M_2^{k_1}(k_1)$, $M_2^{k_2}(k_2)$ и инвариантную прямую $\overline{L}\notin M_4^{k_0}(k_0)\cup M_2^{k_1}(k_1)\cup M_2^{k_2}(k_2)$.

Покажем это, для чего по теореме 1 рассмотрим дифференциальную систему

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(x-1)(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\lambda y+\omega),\\ \dfrac{dy}{dt}=y(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)(y-\alpha_3),\end{cases}\qquad(13)$$

где $0<\alpha_1<\ldots<\alpha_3$, имеющую инвариантные множества

$$M_4^0 = \{y = 0, y - \alpha_1 = 0, y - \alpha_2 = 0, y - \alpha_3 = 0\}, \quad M_2^{\infty}\{x = 0, x - 1 = 0\}.$$

Возможные расположения инвариантных прямых множества $M_2^k(k)$, где $k < 0$ исчерпываются конфигурациями, изображенными на рисунках 2-5.

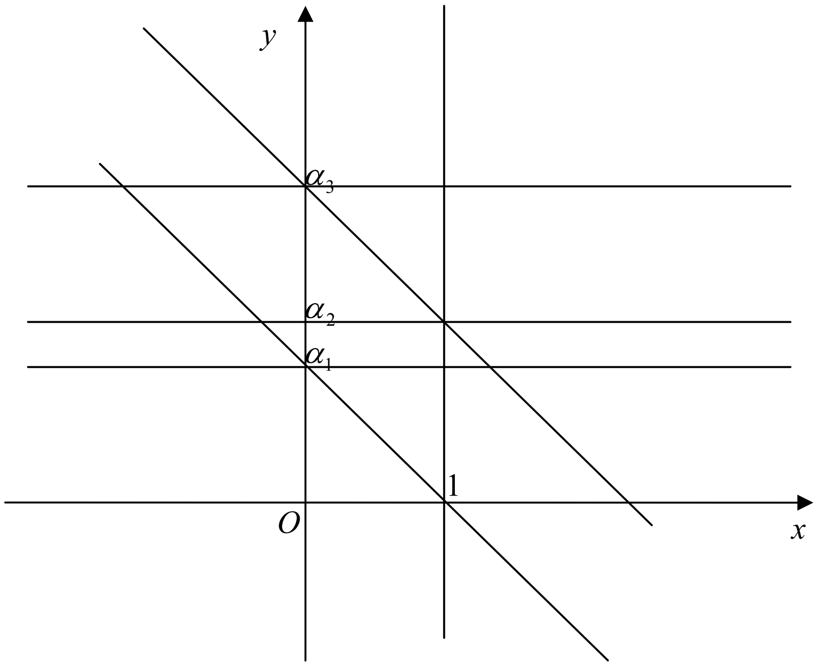

Рис. 2. Девятая инвариантная прямая $\overline{L}$, если она существует, непременно проходит через точки $(0,\alpha_3)$ и $(1,0)$

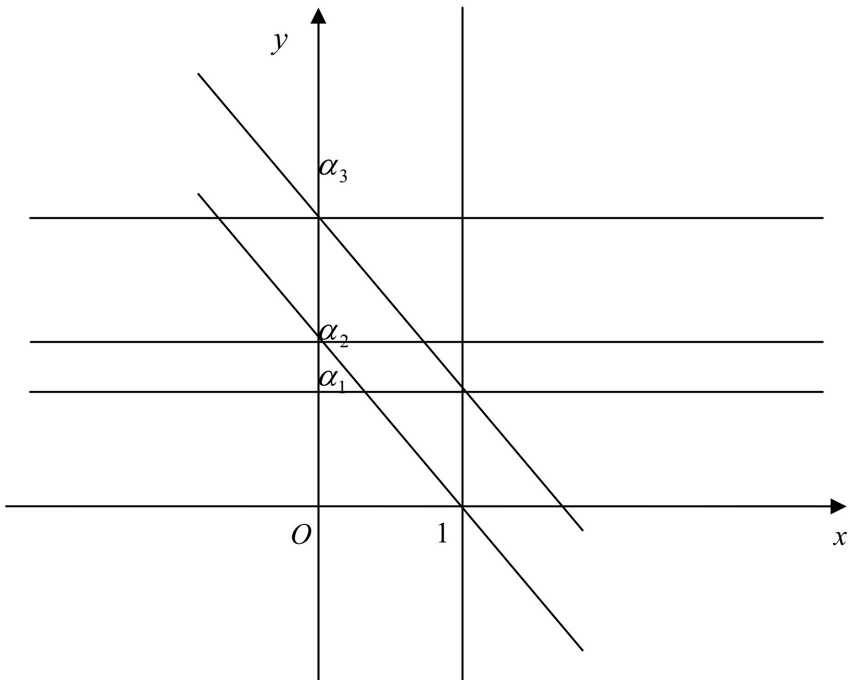

Рис. 3. Девятая инвариантная прямая $\overline{L}$ проходит либо через точки $(0,\alpha_2)$ и $(1,\alpha_1)$, либо через точки $(0,\alpha_3)$ и $(1,0)$

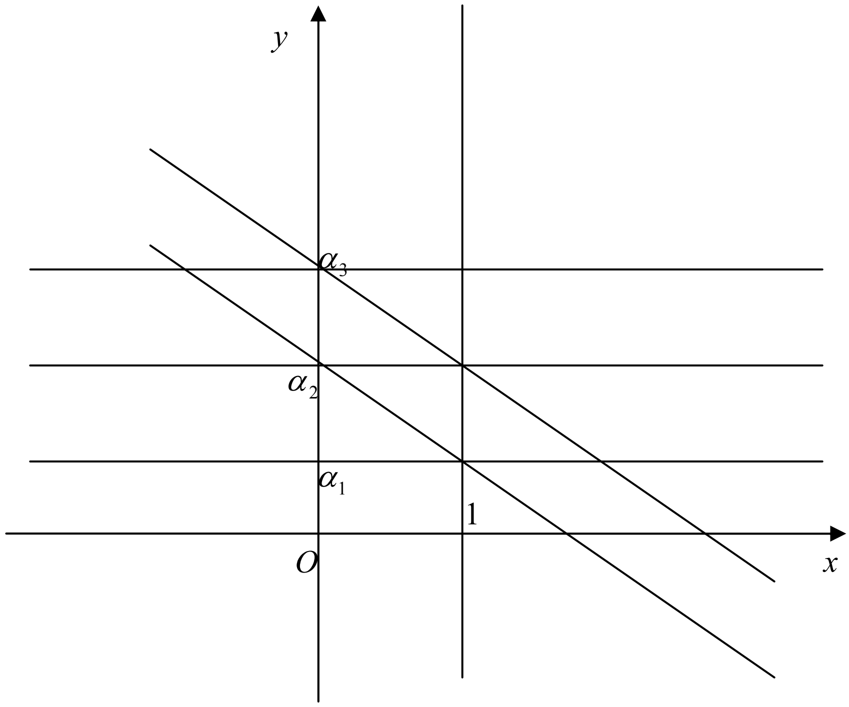

Рис. 4. $\overline{L}$ пересекает не менее пяти инвариантных прямых

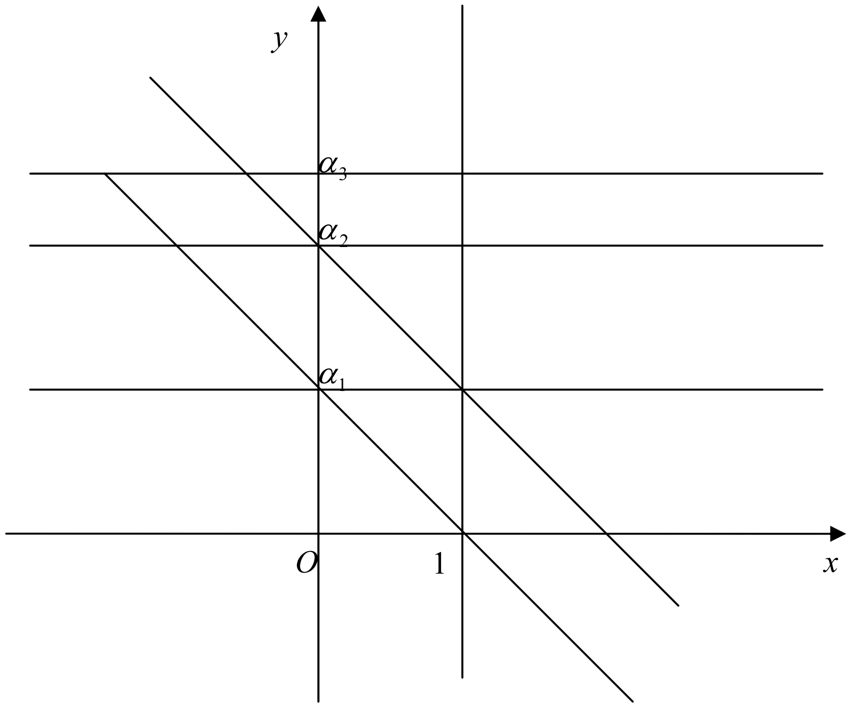

Рис. 5. $\overline{L}$ пересекает не менее пяти инвариантных прямых

В случаях конфигураций, изображенных на рисунках 4 и 5, система (13) имеет восемь инвариантных прямых. В самом деле, предполагая существование инвариантной прямой $\overline{L}$ системы (13), которая не принадлежит множеству $M_4^0(0)\cup M^{\infty}(\infty)\cup M_2^k(k)$, мы тем самым допускаем, что $\overline{L}$ пересекает не менее пяти инвариантных прямых, что недопустимо для полиномиального векторного поля четвертой степени.

Обратимся к конфигурации, изображенной на рисунке 2. Девятая инвариантная прямая $\overline{L}$ системы (13), если она существует, непременно проходит через точки $(0,\alpha_3)$ и $(1,0)$. В силу параллельности инвариантных прямых из множества $M_2^{-\alpha_1}(-\alpha_1)$ выполняется условие $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$.

Найдем условия того, что система (13) имеет инвариантные прямые $l_1 : y + \alpha_1 x - \alpha_1 = 0$ и $l_2 : y + \alpha_1 x - \alpha_1 - \alpha_2 = 0$.

Несложные вычисления показывают, что коэффициенты системы (13) удовлетворяют условиям:

$$\begin{gathered}\alpha = 3\alpha_1^3 + \gamma\alpha_1^2; \qquad \beta = 4\alpha_1^2 + 2\gamma\alpha_1; \\ \delta = -5\alpha_1^3 - 2\alpha_1^2\alpha_2 - \gamma\alpha_1\alpha_2 - 2\gamma\alpha_1^2; \\ \lambda = -2\alpha_1^2 - \gamma\alpha_2 - 2\gamma\alpha_1; \qquad \omega = \gamma\alpha_1^2 + \gamma\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2^2 + 2\alpha_1^3.\end{gathered} \tag{14}$$

С учетом (14) перепишем систему (13):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)[\left(3\alpha_1^3 + \gamma\alpha_1^2\right)x^2 + \left(4\alpha_1^2 + 2\gamma\alpha_1\right)xy + \gamma y^2 - \left(5\alpha_1^3 + 2\alpha_1^2\alpha_2 + \gamma\alpha_1\alpha_2 + 2\gamma\alpha_1^2\right)x - \\ \qquad - \left(2\alpha_1^2 + \gamma\alpha_2 + 2\gamma\alpha_1\right)y + \gamma\alpha_1^2 + \gamma\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2^2 + 2\alpha_1^3], \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)(y-\alpha_1-\alpha_2), \end{cases} \tag{15}$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2$.

Система (15) при заданных α_1 и α_2 представляет собой однопараметрическое семейство дифференциальных систем, имеющих три инвариантных множества:

$$M_4^0(0) = \{y = 0; y - \alpha_1 = 0; y - \alpha_2 = 0; y - \alpha_1 - \alpha_2 = 0\},$$

$$M_2^\infty(\infty) = \{x = 0; x - 1 = 0\}, \qquad M_2^{-\alpha_1}(-\alpha_1) = \{y + \alpha_1 x - \alpha_1 = 0; y + \alpha_1 x - \alpha_1 - \alpha_2 = 0\}.$$

В семействе (15) (при фиксированных α_1 и α_2) содержится одна и только одна система, обладающая девятью инвариантными прямыми, а именно, система, соответствующая значению параметра

$$\gamma = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2} - 3\alpha_1 - \alpha_2. \tag{16}$$

При выполнении условия (16) прямая $y + (\alpha_1 + \alpha_2)x - \alpha_1 - \alpha_2 = 0$ является инвариантной для системы (15).

Пример 5. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(-12x^2 - 20xy - 9y^2 + 72x + 64y - 108), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-2)(y-4)(y-6) \end{cases} \tag{17}$$

имеет три инвариантных множества:

$$M_4^0(0) = \{y = 0; y - 2 = 0; y - 4 = 0; y - 6 = 0\},$$

$$M_2^\infty(\infty) = \{x = 0; x - 1 = 0\}, \qquad M_2^{-2}(-2) = \{y + 2x - 2 = 0; y + 2x - 6 = 0\},$$

а также инвариантную прямую $y + 6x - 6 = 0$.

Система (17) получена из системы (15) при $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 4,\ \gamma = -9$.

Если система (13) имеет инвариантные прямые, образующие конфигурацию, изображенную на рисунке 3, то девятая инвариантная прямая $\overline{L}$ проходит либо через точки $(0,\alpha_2)$ и $(1,0)$, либо через точки $(0,\alpha_3)$ и $(1,\alpha_1)$.

Прямые $y+\alpha_2 x-\alpha_2=0$, $y+\alpha_2 x-\alpha_1-\alpha_2=0$ являются инвариантными для системы (13), если и только если выполняются условия:

$$\alpha=3\alpha_2{}^3+\gamma\alpha_2^2,\quad \beta=4\alpha_2{}^2+2\gamma\alpha_2,$$
$$\delta=-5\alpha_2^3-2\alpha_1\alpha_2^2-2\gamma\alpha_2^2-\gamma\alpha_1\alpha_2, \tag{18}$$
$$\lambda=-2\alpha_2^2-2\gamma\alpha_2-\gamma\alpha_1,\quad \omega=\alpha_1\alpha_2{}^2-\alpha_1^2\alpha_2+2\alpha_2^3+\gamma\alpha_2^2+\gamma\alpha_1\alpha_2.$$

Систему (13) с учетом (18) перепишем в виде

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(x-1)[\left(3\alpha_2^3+\gamma\alpha_2^2\right)x^2+\left(4\alpha_2^2+2\gamma\alpha_2\right)xy+\gamma y^2-\left(5\alpha_2^3+2\alpha_1\alpha_2{}^2+\gamma\alpha_1\alpha_2+2\gamma\alpha_2^2\right)x-\\ \quad -\left(2\alpha_2^2+\gamma\alpha_1+2\gamma\alpha_2\right)y+\alpha_1\alpha_2{}^2-\alpha_1^2\alpha_2+2\alpha_2^3+\gamma\alpha_2^2+\gamma\alpha_1\alpha_2],\\ \dfrac{dy}{dt}=y(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)(y-\alpha_1-\alpha_2).\end{cases} \tag{19}$$

При заданных α_1 и α_2 система (19) представляет собой однопараметрическое семейство дифференциальных систем, имеющих инвариантные множества

$$M_4^0(0)=\{y=0;y-\alpha_1=0;y-\alpha_2=0;y-\alpha_1-\alpha_2=0\},$$
$$M_2^\infty(\infty)=\{x=0;x-1=0\},\quad M_2^{-\alpha_2}(-\alpha_2)=\{y+\alpha_2x-\alpha_2=0;y+\alpha_2x-\alpha_1-\alpha_2=0\}.$$

Как показывают вычисления, в семействе (19) при заданных α_1 и α_2 содержатся только две системы, имеющие девятую инвариантную прямую: одна при

$$\gamma=\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}-\alpha_1-3\alpha_2, \tag{20}$$

а другая – при

$$\gamma=\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}-3\alpha_2. \tag{21}$$

При выполнении (20) система (19) запишется в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(x-1)[\left(\dfrac{\alpha_2^4}{\alpha_1}-\alpha_1\alpha_2^2\right)x^2+\left(\dfrac{2\alpha_2^3}{\alpha_1}-2\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_2\right)xy+\left(\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1}-\alpha_1-3\alpha_2\right)y^2+\\ +\left(3\alpha_1\alpha_2^2-\dfrac{2\alpha_2^4}{\alpha_1}+\alpha_1^2\alpha_2\right)x+\left(3\alpha_2^2-\dfrac{2\alpha_2^3}{\alpha_1}+5\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^2\right)y+\dfrac{\alpha_2^4}{\alpha_1}-3\alpha_1\alpha_2{}^2-2\alpha_1^2\alpha_2],\\ \dfrac{dy}{dt}=y(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)(y-\alpha_1-\alpha_2).\end{cases} \tag{22}$$

Система (22) имеет инвариантную прямую $y+(\alpha_1+\alpha_2)x-\alpha_1-\alpha_2=0$.

Значению параметра γ, определяемому по формуле (21), соответствует дифференциальная система

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(x-1)[\left(\alpha_1\alpha_2^2-\dfrac{\alpha_2^4}{\alpha_1}\right)x^2+\left(2\alpha_1\alpha_2-2\alpha_2^2-\dfrac{2\alpha_2^3}{\alpha_1}\right)xy+\left(\alpha_1-\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1}-3\alpha_2\right)y^2+\\ +\left(2\alpha_2^3-\alpha_1\alpha_2^2+\dfrac{2\alpha_2^4}{\alpha_1}-\alpha_1^2\alpha_2\right)x+\left(5\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2+\dfrac{2\alpha_2^3}{\alpha_1}-\alpha_1^2\right)y-\alpha_1\alpha_2{}^2-2\alpha_2^3-\dfrac{\alpha_2^4}{\alpha_1}],\\ \dfrac{dy}{dt}=y(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)(y-\alpha_1-\alpha_2).\end{cases} \tag{23}$$

Система (22) имеет инвариантную прямую $y+(\alpha_2-\alpha_1)x-\alpha_2=0$.

Таким образом, доказана

Теорема 4. Во множестве систем (1) при $n=4$, имеющих инвариантные множества $M_4^{k_0}(k_0),\, M_2^{k_1}(k_1),\, M_2^{k_2}(k_2)$, где $k_0,k_1,k_2\in R$, $(k_0-k_1)(k_0-k_2)(k_1-k_2)\neq 0$, существуют системы с девятью инвариантными прямыми.

Пример 6. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(x-1)x(12x^2+4xy-3y^2-18x+7y), \\ \dfrac{dy}{dt}=y(y-1)(y-2)(y-3), \end{cases}$$

полученная из системы (22) при $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$ имеет инвариантные множества

$$M_4^0(0)=\{y=0; y-1=0; y-2=0; y-3=0\},$$

$$M_2^{\infty}(\infty)=\{x=0; x-1=0\}, \quad M_2^{-2}(-2)=\{y+2x-2=0; y+2x-3=0\},$$

а также инвариантную прямую $y+3x-3=0$.

Пример 7. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(x-1)x(-12x^2-20xy-9y^2+42x+37y-36), \\ \dfrac{dy}{dt}=y(y-1)(y-2)(y-3), \end{cases}$$

полученная из системы (23) при $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$, имеет инвариантные множества

$$M_4^0(0)=\{y=0; y-1=0; y-2=0; y-3=0\},$$

$$M_2^{\infty}(\infty)=\{x=0; x-1=0\}, \quad M_2^{-2}(-2)=\{y+2x-2=0; y+2x-3=0\},$$

а также инвариантную прямую $y+x-2=0$.

Примечания:

1. Artes J., Grünbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific Journal of Mathematics. 1998. Vol. 184, No. 2. P. 207-230.
2. Sokulski J. On the number of invariant straight lines for polynomial vector fields // Nonlinearity. 1996. No. 9. P. 479-485.
3. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. I // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. № 6. С. 132-137.
4. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. II // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 1. С. 139-148.
5. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. III // Вестник Нижегородского

References:

1. Artes J., Grünbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific Journal of Mathematics. 1998. Vol. 184, No. 2. P. 207-230.
2. Sokulski J. On the number of invariant straight lines for polynomial vector fields // Nonlinearity. 1996. No. 9. P. 479-485.
3. Dolov M.V., Chistyakova S.A. On linear particular integrals of polynomial vector fields of the fourth degree with degenerate infinity. I // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2010. No. 6. P. 132-137.
4. Dolov M.V., Chistyakova S.A. On linear particular integrals of polynomial vector fields of the fourth degree with degenerate infinity. II // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2011. No. 1. P. 139-148.
5. Dolov M.V., Chistyakova S.A. On linear particular integrals of polynomial vector fields of the fourth degree with degenerate infinity. III // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky.

университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 2. С. 123-129.

6. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. О прямых изоклинах векторных полей на плоскости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 2. С. 148-156.
7. Горбузов В.Н. Проективный атлас траекторий дифференциальных систем второго порядка // Вестник Гродненского государственного университета. Сер. 2. 2011. № 2 (111). С. 15-26.
8. Ушхо Д.С. О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы // Труды ФОРА. 2003. № 8. С. 7-21. URL: http://fora.adygnet.ru
9. Любимова Р.А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький: Изд-во ун-та, 1977. Вып. 1. С. 19-22.

2011. No. 2. P. 123-129.

6. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. On straight isoclines of vector fields on the plane // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2014. No. 2. P. 148-156.
7. Gorbuzov V.N. Projective atlas of trajectories of differential systems of the second order // Bulletin of Grodno State University. Ser. 2. 2011. No. 2 (111). P. 15-26.
8. Ushkho D.S. On straight isoclines of a cubic differential system // FORA Works. 2003. No. 8. P. 7-21. URL: http://fora.adygnet.ru
9. Lyubimova R.A. On one differential equation with integral straight lines // Differential and Integral Equations. Gorky: University Publishing House, 1977. Iss. 1. P. 19-22.