УДК 511.3
ББК 22.13
А 66

Андрухаев Х.М.
Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, (8772) 59-39-01, e-mail: andrukhaev1934@mail.ru

Вероятностный подход к изучению законов распределения простых чисел и простых чисел-близнецов в натуральном ряде до $x = 1040000000$

(Рецензирована)

Аннотация. *Получены все простые числа и простые числа-близнецы в начальном отрезке натурального ряда до 1040000000 (программа pbotdo.bas).В таблицах близнецы выделены черточками между ними. В каждом файле подсчитаны количество простых чисел и близнецов, а также соответствующие относительные частоты. Используя полученные табличные данные и теоретико-вероятностные методы, выведена приближенная формула для средней плотности простых чисел-близнецов в промежутке от 1 до 1040000000.*

Ключевые слова: *простое число, простые числа-близнецы, двойное решето Эратосфена, асимптотический закон распределения.*

Andrukhaev Kh.M.
Candidate of Physics and Mathematics, Professor of Algebra and Geometry Department of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-01, e-mail: andrukhaev1934@mail.ru

Probabilistic approach to studying the laws of distribution of prime numbers and simple twin numbers in a natural row up to $x = 1040000000$

Abstract. *The paper presents all prime numbers and simple twin numbers obtained in an initial piece of a natural row up to 1040000000 (pbotdo.bas program). In tables, twins are allocated with hyphens between them. In each file, the quantity of prime numbers and twins, as well as the corresponding relative frequencies are counted. Using the obtained tabular data and probability-theoretic methods, the approximate formula is derived for the average density of simple twin numbers in an interval from 1 to 1040000000.*

Keywords: *prime number, simple twin numbers, the double sieve of Eratosthenes, asymptotic law of distribution, average density.*

Обозначения:

p – простое число;

$\pi(x)$ – число простых чисел, $\le x$ $(x \ge 2)$;

$\pi_2(x)$ – число простых чисел-близнецов, $\le x$ $(x \ge 5)$;

B_n – событие «случайно взятое натуральное число n окажется простым»;

E_n – индикатор события B_n;

~ – знак ассимтотического равенства;

$\varphi(x) = O(f(x))$, где $f(x) > 0$ означает, что существует константа $C > 0$, что $|\varphi(x)| \le Cf(x)$;

$p_{\max}$ – максимальное простое число в заданном промежутке;

$b_{\max}$ – максимальная пара близнецов в заданном промежутке;

$M(X)$ – математическое ожидание случайной величины X.

1. Введение. Статья является продолжением статьи, опубликованной в [1], и содержит результаты статистических наблюдений над распределением простых чисел и простых чисел-близнецов на начальном промежутке натурального ряда чисел до 10^9. Вычислены все простые числа и простые числа-близнецы этого промежутка и размещены по 64 файлам, соответствующим промежуткам $\left(a\cdot 10^k, (a+1)\cdot 10^k\right)$, $1\le a\le 9$, $1\le k\le 8$ с растущим шагом $h=10,100,1000,10000,100000,1000000,10000000,100000000$. Отдельно составлена таблица простых и простых чисел-близнецов промежутка $\left(10^9;1{,}04\cdot 10^9\right)$, фрагмент которой от $1{,}02\cdot 10^9$ до $1{,}04\cdot 10^9$ приводится в таблице 1. В таблице 2 содержатся количественные данные, полученные в процессе вычисления простых и простых чисел-близнецов. Указаны также максимальные простые и максимальные пары близнецов в промежутках. В таблице 3 указаны распределения простых чисел и простых чисел-близнецов в 1000000-х промежутках от 1031000000 до 1040000000. В следующих пунктах излагается теоретико-вероятностный подход к выводу асимптотического закона распределения простых чисел в натуральном ряде чисел. Аналогичные результаты получены для чисел-близнецов.

Таблица 1

Таблица простых чисел и простых чисел-близнецов от 1039994300 до 1040000000

1039994309 1039994321 1039994359 1039994407 1039994411 1039994419 1039994437 1039994441
1039994467 1039994471 1039994477 1039994489 1039994539 1039994597 1039994623 1039994629
1039994633 1039994647 1039994701 1039994707 1039994729 1039994759 1039994783 1039994843
1039994911 1039994929 1039994957-1039994959 1039994981 1039995023 1039995029 1039995059
1039995067 1039995079 1039995083 1039995091 1039995109 1039995127 1039995133 1039995139
1039995169 1039995193 1039995197-1039995199 1039995211 1039995251 1039995277 1039995287
1039995311 1039995337 1039995353 1039995379 1039995389-1039995391 1039995401-1039995403
1039995431 1039995443 1039995469 1039995479 1039995499 1039995503 1039995563 1039995569
1039995601 1039995611 1039995629-1039995631 1039995653 1039995661 1039995679 1039995683
1039995703 1039995731 1039995787 1039995797 1039995811 1039995821-1039995823 1039995857
1039995863 1039995871 1039995877 1039995881 1039995911 1039995949 1039995953 1039995973
1039996019-1039996021 1039996039 1039996079-1039996081 1039996093 1039996099 1039996117
1039996121 1039996169-1039996171 1039996207 1039996229 1039996249 1039996303 1039996327
1039996351 1039996357 1039996411 1039996421 1039996439 1039996469 1039996493 1039996499-
1039996501 1039996537 1039996547-1039996549 1039996553 1039996567 1039996591 1039996609
1039996627 1039996631 1039996679 1039996759 1039996781 1039996801 1039996807 1039996813
1039996829 1039996861 1039996873 1039996883 1039996907 1039996921 1039996931-1039996933
1039996949 1039996973 1039996987 1039997047 1039997069 1039997087 1039997143 1039997149
1039997171 1039997177 1039997197 1039997227 1039997239 1039997261 1039997293 1039997311
1039997353 1039997363 1039997377 1039997381 1039997407 1039997419 1039997437 1039997447
1039997461 1039997467 1039997473 1039997557 1039997561 1039997611 1039997617 1039997659
1039997669-1039997671 1039997701 1039997711 1039997731 1039997773 1039997789 1039997843
1039997867 1039997891 1039997921 1039997939 1039997963 1039997993 1039998007 1039998031
1039998073 1039998083 1039998101 1039998119 1039998149 1039998161 1039998173 1039998287
1039998293 1039998299 1039998329 1039998367 1039998403 1039998433 1039998451 1039998461
1039998503 1039998523 1039998569 1039998587 1039998607 1039998653 1039998697 1039998709
1039998719-1039998721 1039998733 1039998737 1039998767-1039998769 1039998779-1039998781
1039998787 1039998811 1039998829 1039998847 1039998853 1039998859 1039998863 1039998887
1039998893 1039998901 1039998937 1039998941 1039998961 1039998979 1039999039 1039999043
1039999057 1039999097 1039999133 1039999141 1039999159 1039999171 1039999199 1039999223
1039999277 1039999283 1039999291 1039999307 1039999339 1039999357 1039999381 1039999427
1039999451 1039999459 1039999483 1039999511 1039999577 1039999601-1039999603 1039999619
1039999643 1039999673 1039999679 1039999703 1039999729 1039999739 1039999747 1039999757
1039999777 1039999781 1039999817 1039999823 1039999841-1039999843 1039999889 1039999913
1039999921 1039999931 1039999963 1039999981 1039999991

Примечание: В таблице содержатся все простые числа и простые числа-близнецы промежутка $(1039994300;1040000000)$;

$p_{\max}=1039999991$; $b_{\max}=(1039999841-1039999843)$;

до 1040000000: простых чисел 52776212; пар близнецов 3547167; частота простых чисел 0,051; частота пар близнецов 0,003; частота пар близнецов среди простых 0,067

Таблица 2

Количество простых чисел и близнецов до $x = 10^9$

x	$\pi(x)$	$\pi_2(x)$	p_{max}	b_{max}
100	25	8	97	71-73
200	46	15	199	197-199
300	62	19	293	281-283
400	78	21	397	347-349
500	95	24	499	461-463
600	109	26	599	461-463
700	125	30	691	659-661
800	139	30	797	659-661
900	154	35	887	881-883
1000	168	35	997	881-883
2000	303	61	1999	1997-1999
3000	430	81	2999	2969-2971
4000	550	103	3989	3929-3931
5000	669	126	4999	4967-4969
6000	783	143	5987	5879-5881
7000	900	162	6997	6959-6961
8000	1007	175	7993	7949-7951
9000	1117	189	8999	8969-8971
10000	1229	205	9973	9929-9931
20000	2262	342	19997	19991-19993
30000	3245	467	29989	29879-29881
40000	4203	591	39989	39839-39841
50000	5133	705	49999	49991-49993
60000	6057	811	59999	59669-59671
70000	6935	905	69997	69929-59931
80000	7837	1007	79999	79997-79999
90000	8713	1116	89989	89897-89899
100000	9592	1224	99991	99989-99991
200000	17984	2160	199999	199931-199933
300000	25997	2994	299993	299699-299701
400000	33860	3804	399989	399911-399913
500000	41538	4565	499979	499691-499693
600000	49098	5331	599999	599939-599941
700000	56543	6061	699967	699539-699541
800000	63951	6766	799999	799991-799993
900000	71274	7472	899981	899891-899893
1000000	78498	8169	999983	999959-999961
2000000	148933	14871	1999993	1999889-1999891
3000000	216816	20932	2999999	2999831-2999833
4000000	283146	26860	3999971	3999659-3999661
5000000	348513	32463	4999999	4999961-4999963
6000000	412849	37916	5999993	5999921-5999923
7000000	476648	43259	6999997	6999821-6999823
8000000	539777	48618	7999993	7999919-7999921
9000000	602489	53867	8999993	8999897-8999899
10000000	664579	58980	9999991	9999971-9999973
20000000	1270607	107407	19999999	19999897-19999899
30000000	1857859	152891	29999999	29999549-29999551
40000000	2433654	196753	39999983	39999899-39999901
50000000	3001134	239101	49999991	49999757-49999759
60000000	3562115	280558	59999999	59999981-59999983

Продолжение таблицы 2

x	$\pi(x)$	$\pi_2(x)$	$p_{\max}$	$b_{\max}$
70000000	4118064	321466	69999989	69999911-69999913
80000000	4669382	361450	79999987	79999571-79999573
90000000	5216954	401090	89999999	89999981-89999983
100000000	5761455	440312	99999989	99999587-99999589
200000000	11078937	813371	199999991	199999901-199999903
300000000	16252325	1166480	299999977	299999639-299999641
400000000	21336326	1507733	399999959	399999947-399999949
500000000	26355867	1840170	499999993	499999319-499999321
600000000	31324703	2166301	599999971	599999429-599999431
700000000	36252931	2486868	699999953	699999401-699999403
800000000	41146179	2802751	799999999	799999799-799999801
900000000	46009215	3115262	899999963	899999741-899999743
1000000000	50847534	3424506	999999937	999999191-999999193

Примечание: $\pi(x)$ – количество простых чисел до x; $\pi_2(x)$ – количество близнецов до x; $p_{\max}$ – наибольшее простое число до x; $b_{\max}$ – наибольшая пара близнецов до x. В таблице содержатся количества простых и простых чисел-близнецов от 1 до $a \cdot 10^k$, $1 \le a \le 10$, $2 \le k \le 8$. В 4-й колонке максимальное простое число данного промежутка, в 5-й – максимальная пара простых чисел-близнецов

Таблица 3

Число простых чисел и простых чисел-близнецов от $x = 1031000000$ до $x = 1050000000$ с шагом 1000000

x	$\pi(x)$	$\pi_2(x)$	$p_{\max}$	$b_{\max}$
1031000000	52342581	3519572	1030999993	1030999859-1030999861
1032000000	52390783	3522590	1031999999	1031999201-1031999203
1033000000	52438841	3525638	1032999997	1032999479-1032999481
1034000000	52486822	3528669	1033999999	1033999961-1033999963
1035000000	52535054	3531675	1034999989	1034998499-1034998501
1036000000	52583238	3534747	1035999997	1035999749-1035999751
1037000000	52631520	3537806	1036999973	1036999349-1036999351
1038000000	52679613	3540950	1037999999	1037999861-1037999863
1039000000	52727899	3544060	1038999991	1038999989-1038999991
1040000000	52776212	3547167	1039999991	1039999841-1039999843
1041000000	52824367	3550239	1040999983	1040999819-1040999821
1042000000	52872612	3553319	1041999983	1041999599-1041999601
1043000000	52920799	3556322	1042999981	1042999931-1042999933
1044000000	52968968	3559486	1043999987	1043999951-1043999953
1045000000	53016988	3562534	1044999983	1044999971-1044999973
1046000000	53065074	3565583	1045999973	1045999961-1045999963
1047000000	53113216	3568608	1046999999	1046999801-1046999803
1048000000	53161242	3571636	1047999989	1047999611-1047999613
1049000000	53209278	3574720	1048999993	1048999361-1048999363
1050000000	53257350	3577758	1049999963	1049999957-1049999959

Примечание: В таблице представлены: значения x от 1031000000 до 1050000000 с шагом 1000000, число простых чисел, число простых чисел-близнецов, максимальное простое число и максимальная пара простых чисел-близнецов до x

2. Вероятностный подход к изучению поведения функции $\pi(x)$

При $x \ge 2$ через $\pi(x)$ обозначается число простых чисел p, не превосходящих x:

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1, \quad p \text{ – простое.}$$

В [2] Я.Б.Зельдович и А.Д. Мышкис в 1965 году привели пример применения теории вероятностей к исследованию теоретико-числовой задачи нахождения асимптотического закона распределения простых чисел в отрезках $[1:x]$ натурального ряда чисел при растущих x Напомним этот закон:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}=1,\ \text{т.е.}\ \pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}.$$

Впервые сложным аналитическим методом (без применения теории вероятностей) его доказали русский математик П.Л. Чебышев и французский математик Ж.С. Адамар в конце XIX века. Позже этот закон доказан элементарным методом норвежским математиком А. Сельбергом. Метод, использованный А. Сельбергом, хоть и называется элементарным, но очень сложный и основан он на так называемом решете Сельберга.

Идея использования вероятностного метода очень проста. Приведем ее здесь схематично (см. [2]).

Пусть $x>2$ достаточно большое действительное число и n – натуральное число $\le x$.

Из множества натуральных чисел от 2 до n наудачу возьмем натуральное число $m\le n$. Пусть $p\ne q$ – простые числа $\le n$. Тогда может случиться, что m – кратно p, а может и нет. Обозначим через $A_{p,m}$ событие «p делит m» (p/m). Противоположное событие – $\overline{A}_{p,m}$ $(p\nmid m)$. По классическому определению вероятности имеем:

$$P(A_{p,m})=\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{n}$$

(отношение числа натуральных чисел m, кратных p, к общему числу натуральных чисел до n). Так как $\left[\frac{n}{p}\right]\approx\frac{n}{p}$, то $P(A_{p,m})\approx\frac{n}{np}=\frac{1}{p}$. Аналогично $P(A_{q,m})\approx\frac{1}{q}$. Следовательно, $P(\overline{A}_{p,m})\approx1-\frac{1}{p}$ и $P(\overline{A}_{q,m})\approx1-\frac{1}{q}$. Основное допущение при применении вероятностного метода к данной проблеме состоит в том, что события $\overline{A}_{p,m}$ и $\overline{A}_{q,m}$ считаются независимыми, т.е.

$$P(\overline{A}_{p,m}\cdot\overline{A}_{q,m})=P(\overline{A}_{p,m})\cdot P(\overline{A}_{q,m})=\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{q}\right).$$

Отсюда следует, что вероятность того, что случайно выбранное натуральное число m, не делится ни на p, ни на q. Подчеркнем, что здесь существенно, что $p\ne q$ – простые и, следовательно, $(p,q)=1$.

Из метода решета Эратосфена следует, что число n является простым тогда и только тогда, когда оно не делится ни на какое простое число $p\le\sqrt{n}$. На этом факте собственно и основан метод решета. Обозначим через B_n событие «n – простое число». Так как $P(\overline{A}_{p,m})=1-\frac{1}{p}$ и для различных простых чисел $p\le\sqrt{n}$ события $\overline{A}_{p,n}$ независимы, то вероятность $P(B_n)$ равна:

$$P(B_n)=\prod_{p\le\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

В [2] авторы вместо $\prod_{p\le\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ используют $\prod_{p\le n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ в силу того, что при больших n можно считать

$$\prod_{\sqrt{n}<p\le n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\approx 1,$$

и при достаточно больших n это не влияет на окончательный результат. Далее авторы делают заключение, что средняя плотность распределения простых чисел в промежутке $[n, n+\Delta]$ $f(n)\approx\prod_{p\le n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ и получают, что $f(n)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (подробности см. в [2]):

$$\frac{df(t)}{f^2(t)}=-\frac{dt}{t}, \tag{1}$$

причем

$$\ln f(n)=\int_2^n\frac{f(t)}{t}dt.$$

Из (1) получается, что $\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{f(2)}-\ln 2+\ln n$, и обозначив $C_1=\frac{1}{f(2)}-\ln 2$, находят, что

$$f(n)=\frac{1}{C_1+\ln n}.$$

При достаточно больших x

$$\pi(x)\sim\int_2^x\frac{dt}{\ln t}\sim\frac{dx}{\ln x}-\frac{2}{\ln 2}+\int_2^x\frac{dt}{\ln^2 t}\sim\frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{2}{\ln^2 2}\right).$$

3. Применение вероятностных рассуждений для исследования поведения функции $\pi_2(x)$ в пределах от 5 до x при больших x из промежутка $(5,10^9)$ несколько отличается от приведенного выше тем, что к настоящему времени даже неизвестно бесконечно ли множество близнецов в натуральном ряде. Предполагают, что бесконечно, но это лишь предположение, которое не доказано и не опровергнуто. Отметим также, что в отличие от расходящегося ряда, члены которого обратны простым числам, аналогичный ряд чисел, обратных числам-близнецам, сходится, но это не говорит о конечности множества близнецов.

В 1918 году В. Брун доказал, что существует константа $C>0$, что

$$\pi_2(x)\le\frac{Cx}{\ln^2 x},$$

но до решения проблемы о поведении $\pi_2(x)$ пока далеко. Как уже отмечено выше, даже неизвестно, что

$$\lim_{x\to\infty}\pi_2(x)=\infty,$$

хотя в этом специалисты не сомневаются.

Будем предполагать, что события B_n и B_{n+2} независимы. Относительно правомерности такого предположения см. [3].

Обозначим E_n – случайную величину, заданную следующим образом $(n\ge 2)$:

$$E_n = \begin{cases} 1, \text{ если } n - \text{простое}, \\ 0, \text{ если } n - \text{составное}. \end{cases}$$

Раннее мы обозначили через B_n событие «n – простое число», а значит E_n – индикатор события B_n. Так как $P(B_n) = \prod\limits_{p \le \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ и $P(\overline{B}_n) = 1 - \prod\limits_{p \le \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, то закон распределения E_n запишется так:

E_n	0	1
Вероятность	$1 - \prod\limits_{p \le \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$	$\prod\limits_{p \le \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

Если E_n – индикатор события B_n, то E_{n+2} – индикатор события B_{n+2}. Очевидно, что произведение $E_n \cdot E_{n+2}$ – индикатор произведения $B_n \cdot B_{n+2}$, означающего, что $(n, n+2)$ – пара простых близнецов.

Мы предположили, что события B_n и B_{n+2} независимы. В силу этого предположения E_n и E_{n+2} так же независимы. Тогда $X = \sum\limits_{n+2 \le x} E_n \cdot E_{n+2}$ является случайной величиной, математическое ожидание которой равно $\pi_2(x)$, т.е.

$$\pi_2(x) = M(X) = M\left(\sum_{n+2 \le x} E_n \cdot E_{n+2}\right). \tag{2}$$

Так как E_n и E_{n+2} независимы, то математическое ожидание произведения случайных величин E_n и E_{n+2} равно произведению их математических ожиданий:

$$M(E_n \cdot E_{n+2}) = M(E_n) \cdot M(E_{n+2}) = \prod_{p \le \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{p \le \sqrt{n+2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{p \le \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{q}\right), \tag{3}$$

где, возможно, существует простое число q такое, что $\sqrt{n} < q \le \sqrt{n+2}$.

Будем пренебрегать множителем $\left(1 - \frac{1}{q}\right) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \approx 1$ при больших n. Тогда

$$M(E) \cdot M(E_{n+2}) \approx \prod_{p \le \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2.$$

Если такое q существует, то

$$n < q^2 \le n + 2$$

и, следовательно, имеет место одна из возможностей:

а) $q^2 = n + 1$; б) $q^2 = n + 2$.

В случае а) $n = q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$ и n будет простым числом только тогда, когда $q - 1 = 1$, т.е. $q = 2$, и $q + 1 = 3$. Отсюда имеем, что $n = 1 \cdot 3 = 3$, $n + 2 = 5$. Ясно, что в случае а) имеем дело с парой близнецов $(3,5)$, и только эта пара удовлетворяет а).

В случае б) $n + 2 = q^2$ и $n + 2$ не является простым числом, а значит говорить о паре $(n, n+2)$ близнецов не приходится. Таким образом, при $n > 5$ множитель $1 - \frac{1}{q}$ в (3) можно опустить, т.е. им можно пренебречь, не используя даже приближенного равенства

$$1-\frac{1}{\sqrt{n}}\approx 1.$$

Теперь, исходя из (2), можно записать, что

$$\pi_2(x)=\sum_{n+2\le x}\prod_{p\le\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2 .$$

Дальше можно действовать так же, как и при исследовании функции $\pi(x)$, но мы воспользуемся известным неравенством, доказанным Мертенсом [4]:

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-C}}{\ln x}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right),$$

где $C=0{,}5772...$ – постоянная Эйлера.

Имеем:

$$\pi_2(x)=\sum_{n+2\le x}\prod_{p\le\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\approx\sum_{n\le x}\prod_{p\le\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2=\sum_{n\le x}\left[\frac{e^{-C}}{\ln\sqrt{n}}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln\sqrt{n}}\right)\right)\right]^2=$$

$$=\sum_{n\le x}\frac{4}{e^{2C}}\cdot\frac{1}{\ln^2 n}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)=\frac{4}{e^{2C}}\sum_{n\le x}\frac{1}{\ln^2 n}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln}\right)\right)\sim\frac{4}{e^{2C}}\sum_{n\le x}\frac{1}{\ln^2 n}.$$

Заменив сумму приближенно интегралом, получим:

$$\pi(x)\sim\frac{4}{e^{2C}}\int_5^x\frac{dt}{\ln^2 t}=\frac{4}{e^{2C}}\left(\frac{x}{\ln^2 x}-\frac{5}{\ln^2 5}+2\int_5^x\frac{dt}{\ln^3 t}\right)=$$

$$=\frac{4}{e^{2C}}\left(\frac{x}{\ln^2 x}-\frac{5}{\ln^2 5}+\frac{2x}{\ln^3 x}-\frac{10}{\ln^3 10}+6\int_5^x\frac{dt}{\ln^4 t}\right)=\frac{4}{e^{2C}}\cdot\frac{x}{\ln^2 x}\left(1+\frac{2}{\ln x}+\frac{6}{\ln^2 x}+O\left(\frac{1}{\ln^3 x}\right)\right).$$

Таким образом, получается приближенная формула

$$\pi_2(x)\approx\frac{4}{e^{2C}}\cdot\frac{x}{\ln^2 x}\left(1+\frac{2}{\ln x}+\frac{6}{\ln^2 x}\right). \qquad (4)$$

При $x=10^9$ точное значение $\pi_2(10^9)=3424506$. Формула (4) при этом дает приближенное значение $\pi_2(10^9)\approx 3259955$.

Примечания:

1. Андрухаев Х.М. О распределении простых чисел и простых чисел-близнецов в натуральном ряде до *x*=400000000 // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2013. Вып. 4 (125). С. 17-24. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1965. 615 с.
3. Кац М. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 156 с.
4. Бухштаб А.А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966. 378 с.

References:

1. Andrukhaev Kh.M. On distribution of prime numbers and twin primes in natural number series to *x*=400000000 // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2013. Iss. 4 (125). P. 17-24. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Zeldovich Ya.B., Myshkis A.D. Elements of applied mathematics. M.: Nauka, 1965. 615 pp.
3. Kats M. Statistical independence in the theory of probability, analysis and theory of numbers. M.: Publishing House of Foreign Literature, 1963. 156 pp.
4. Bukhshtab A.A. Theory of numbers. M.: Prosveshchenie, 1966. 378 pp.