УДК 517.929.7
ББК 22.161.6
Б 58

Бжеумихова О.И.
Ассистент кафедры дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета, Нальчик, e-mail: bgoksana@rambler.ru

О разрешимости задачи Дирихле для уравнения в частных производных второго порядка с отклоняющимся аргументом

(Рецензирована)

Аннотация. *Исследована разрешимость задачи Дирихле для уравнения в частных производных второго порядка с отклоняющимся аргументом в прямоугольной области. Вопрос разрешимости задачи в требуемом классе функций редуцирован к разрешимости соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, решение которого построено с помощью функции Грина.*

Ключевые слова: *уравнение в частных производных, задача Дирихле, преобразование Фурье, функция Грина, отклоняющийся аргумент.*

Bzheumikhova O.I.
Lecturer Assistant of Department of Differential Equations of the Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, e-mail: bgoksana@rambler.ru

On solvability of the Dirichlet problem for the second order partial differential equation with deviating argument

Abstract. *Solvability of the Dirichlet problem for partial differential equation of the second order with deviating argument in a rectangular area is investigated. The problem of the solvability in the required class of functions is reduced to the solvability of the corresponding ordinary differential equation with deviating argument, the solution of which is constructed with the help of the Green's function.*

Keywords: *partial differential equation, the Dirichlet problem, the Fourier transform, the Green's function, deviating argument.*

Настоящая публикация посвящена исследованию локальной краевой задачи для уравнения с частными производными второго порядка и отклонением временной переменной в младших членах. Теория краевых задач для уравнений с отклоняющимся аргументом, т.е. дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных), связывающих искомую функцию и ее производные при различных значениях аргумента, находится в стадии развития. Интерес, проявляемый к подобным уравнениям и задачам для них, вызван как теоретической важностью, так и практической значимостью получаемых результатов (см. [1-4]).

На сегодняшний день в научной литературе имеется немало работ, посвященных исследованию вопросов разрешимости уравнений с отклоняющимся аргументом и краевых задач для них (см. [5-9]). Однако большая их часть посвящена обыкновенным дифференциальным уравнениям, и поэтому теория дифференциальных уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом остается весьма далекой от завершения. Именно это делает актуальными исследования, представленные настоящей работой, основной целью которой является исследование вопроса разрешимости первой краевой задачи для модельного уравнения в частных производных с отклоняющимся аргументом.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x,t) + u_{tt}(x,t) + \alpha u(x,t) + p(t)u\big(x,h(t)\big) = 0 \tag{1}$$

в области $\Omega = \{(x,t): 0 < x < x_0, 0 < t < 1\}$, где $p(t)$ – суммируемая, а $h(t)$ – измеримая функция $0 \le h(t) \le 1$, $x_0 > 0$, $\alpha = \mathrm{const}$.

Заметим, что в работах [10-12] были рассмотрены задачи для уравнений с дискретным отклонением временной переменной, но они представляют частный случай уравнения (1).

Задача D. Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $u(x,t)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,t)=\varphi_1(t),\qquad u(x_0,t)=\varphi_2(t), \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi_3(x),\qquad u(x,1)=\varphi_4(x), \tag{3}$$

где φ_i – заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi_1(0)=\varphi_3(0)$, $\varphi_1(1)=\varphi_4(0)$, $\varphi_2(0)=\varphi_3(x_0)$, $\varphi_2(1)=\varphi_4(x_0)$.

Применяя конечное синус-преобразование Фурье [13]

$$\bar{f}_s(n)=\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \tag{4}$$

и учитывая условия (2), получим:

$$v''_n(t)-\frac{n^2\pi^2}{x_0^2}v_n(t)+\alpha v_n(t)+p(t)v_n(h(t))=-\frac{n\pi}{x_0}\left[(-1)^{n+1}\varphi_2(t)+\varphi_1(t)\right], \tag{5}$$

где

$$v_n(t)=\int_0^{x_0}u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{x_0}dx\,,n\in N.$$

В частном случае, при $\alpha=\frac{n^2\pi^2}{x_0^2}$ уравнение (5) принимает вид:

$$v''_n(t)+p(t)v_n(h(t))=-\frac{n\pi}{x_0}\left[(-1)^{n+1}\varphi_2(t)+\varphi_1(t)\right]. \tag{6}$$

Применяя преобразование (4) к условиям (3), будем иметь

$$v_n(0)=\int_0^{x_0}\varphi_3(x)\sin\frac{n\pi x}{x_0}dx,\qquad v_n(1)=\int_0^{x_0}\varphi_4(x)\sin\frac{n\pi x}{x_0}dx. \tag{7}$$

Далее, вводя замену

$$z_n(t)=v_n(t)+\int_0^{x_0}\left[\varphi_3(x)t-\varphi_4(x)t-\varphi_3(x)\right]\sin\frac{n\pi x}{x_0}dx\,, \tag{8}$$

приведем задачу (6), (7) к соответствующей задаче:

$$z''_n(t)+p(t)z_n(h(t))=f(t), \tag{9}$$

$$z_n(0)=z_n(1)=0,$$

где

$$f(t)=p(t)\int_0^{x_0}\left[\varphi_3(x)h(t)-\varphi_4(x)h(t)-\varphi_3(x)\right]\sin\frac{n\pi x}{x_0}dx-$$

$$-\frac{n\pi}{x_0}\left[(-1)^{n+1}\varphi_2(t)+\varphi_1(t)\right]. \tag{10}$$

Применяя метод построения функции Грина [14] для уравнения (9), зависящей от $h(t)$, можем записать:

$$z_n(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \tag{11}$$

где $G(t,s)$ – функция Грина уравнения (9), зависящая от $h(t)$, а $f(s)$ – можно определить из (10).

Из (8) с учетом (11) находим:

$$v_n(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds - \int_0^{x_0} [\varphi_3(x)t - \varphi_4(x)t - \varphi_3(x)] \sin\frac{n\pi x}{x_0}dx. \tag{12}$$

Применяя к последнему равенству обратное синус-преобразование Фурье [13]

$$f(x) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin\frac{n\pi x}{a},$$

получим:

$$u(x,t) = \frac{2}{x_0}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\sin\frac{n\pi x}{x_0}dx. \tag{13}$$

Следовательно, решение задачи D при $\alpha = \frac{n^2\pi^2}{x_0^2}$ $(n \in N)$ представимо в виде (13).

Так как система $\left\{\sin\frac{n\pi x}{x_0}\right\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в $L_2[0,x_0]$, то ряд (13) сходится в $L_2[0,x_0]$ при любом $t \in [0,1]$.

Предположим, что $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0$, $\varphi_3(x) = \varphi_4(x) = 0$, т.е. что задача D однородна. Тогда, на основании равенств (10), (12), (13), будем иметь $u \equiv 0$ для всех $x \in [0,x_0]$ и $t \in [0,1]$. Таким образом, убеждаемся в единственности решения задачи D.

Примечания:

1. Huang G., Takeuchi Y., Ma W. Lyapunov functionals for delay differential equations model of viral infection // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2010. Vol. 70, No. 7. P. 2693-2708.
2. Rásvan V. Functional differential equations and one-dimensional distortionless propagation // Tatra Mt. Math. Publ. 2009. Vol. 43. P. 215-228 (DOI: 10.2478/v10127-009-0039-0)
3. Tukhtasinov M., Mamatov M. On transfer problems in control systems // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 3. P. 439-444.
4. Прасолов А.В. Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии. СПб.: Лань, 2010. 289 с.
5. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
6. Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1965. 356 с.
7. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
8. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964. 128 с.
9. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Introduction to the theory of functional differ-

References:

1. Huang G., Takeuchi Y., Ma W. Lyapunov functionals for delay differential equations model of viral infection // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2010. Vol. 70, No. 7. P. 2693-2708.
2. Rásvan V. Functional differential equations and one-dimensional distortionless propagation // Tatra Mt. Math. Publ. 2009. Vol. 43. P. 215-228 (DOI: 10.2478/v10127-009-0039-0)
3. Tukhtasinov M., Mamatov M. On transfer problems in control systems // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 3. P. 439-444.
4. Prasolov A.V. Dynamic models with delay and their applications in economics and engineering. SPb.: Lan, 2010. 289 pp.
5. Myshkis A.D. Linear differential equations with retarded argument. M.: Nauka, 1972. 352 pp.
6. Norkin S.B. Differential equations of the second order with retarded argument. M.: Nauka, 1965. 356 pp.
7. Hale J. Theory of functional differential equations. M.: Mir, 1984. 421 pp.
8. Elsgolts L.E. Introduction to the theory of differential equations with deviating arguments. M.: Nauka, 1964. 128 pp.
9. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Introduction to the theory of functional differ-

ential equations: methods and applications. N.Y.: Hindawi Publishing Corporation, 2007. 318 pp.

10. Bzheumikhova O.I., Lesev V.N. Application of Fourier method to investigation of the Dirichlet problem for partial differential equations with deviating arguments // International Journal of Differential Equations and Applications. 2013. Vol. 12, No. 2. P. 103-120.
11. Bzheumikhova O.I., Lesev V.N. On the issue of the relationships of differential equations with distributed deviating arguments and equations with fractional integrals // Modern Scientific Research and their Practical Application. 2012. Vol. J31209. P. 16-19.
12. Лесев В.Н., Бжеумихова О.И. Задачи для смешанных уравнений и уравнений с отклоняющимся аргументом. Единственность и существование решений. Saarbrucken (Germany): Palmarium Academic Publishing, 2012. 147 p.
13. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Иностр. лит., 1955. 667 с.
14. Иноземцева И.Н., Комленко Ю.В., Пак С.А. Построение функции Грина для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом // Математические заметки. 1975. Т. 17, № 3. С. 443-448.

ential equations: methods and applications. N.Y.: Hindawi Publishing Corporation, 2007. 318 pp.

10. Bzheumikhova O.I., Lesev V.N. Application of Fourier method to investigation of the Dirichlet problem for partial differential equations with deviating arguments // International Journal of Differential Equations and Applications. 2013. Vol. 12, No. 2. P. 103-120.
11. Bzheumikhova O.I., Lesev V.N. On the issue of the relationships of differential equations with distributed deviating arguments and equations with fractional integrals // Modern Scientific Research and their Practical Application. 2012. Vol. J31209. P. 16-19.
12. Lesev V.N., Bzheumikhova O.I. Problems for mixed equations and equations with deviating argument. Existence and uniqueness of solutions. Saarbrucken (Germany): Palmarium Academic Publishing, 2012. 147 pp.
13. Sneddon I. Fourier transformations. M.: Foreign Literature, 1955. 667 pp.
14. Inozemtseva I.N., Komlenko Yu.V., Pak S.A. Green’s function for the differential equation with deviating argument // Mathematical Notes. 1975. Vol. 17, No. 3. P. 443-448.