МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.2/.3
ББК 22.161.1
С 78

Сташ А.Х.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-05, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

О некоторых свойствах полных и векторных частот знаков и корней решений линейных однородных двумерных дифференциальных систем

(Рецензирована)

Аннотация. *Исследуются спектры полных и векторных частот знаков и корней линейных двумерных дифференциальных систем, а также изучается непрерывность крайних частот на множестве двумерных систем. Показано, что для любого наперед заданного натурального числа p приводится линейная двумерная дифференциальная система с периодическими коэффициентами, множества различных значений полных (векторных) частот знаков и корней нетривиальных решений которой состоят не менее чем из p различных существенных чисел. Доказано существование двумерной дифференциальной системы с ограниченными коэффициентами с одним и тем же счетным спектром полных (векторных) частот знаков и корней. Кроме того, в пространстве линейных двумерных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными коэффициентами приводится точка, в которой каждая из крайних частот знаков и корней терпит скачки как вверх, так и вниз при возмущениях коэффициентов, исчезающих на бесконечности.*

Ключевые слова: *линейная дифференциальная система, колеблемость решений, число нулей функции, полная частота, векторная частота.*

Stash A.Kh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-05, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

On some properties of full and vector frequencies of signs and roots of solutions to linear homogeneous two-dimensional differential systems

Abstract. *The paper explores the ranges of full and vector frequencies of signs and roots of linear two-dimensional differential systems and the continuity of extreme frequencies using a set of two-dimensional systems. The paper shows that for any pre-set natural number p the linear two-dimensional differential system with periodic coefficients is provided. Sets of various values of full (vector) frequencies of signs and roots of uncommon solutions to this system consist of not less than p of various essential numbers. Existence of two-dimensional differential system with limited coefficients with the same calculating range of full (vector) frequencies of signs and roots is proved. In addition, the point is given in space of linear two-dimensional differential systems with continuous limited coefficients, in which each of extreme frequencies of signs and roots suffers jumps both up and down at disturbances of the coefficients disappearing on infinity.*

Keywords: *linear differential equation, fluctuation of solutions, number of zeros of function, full frequency, vector frequency.*

Введение

Настоящая работа логически продолжает и развивает результаты, анонсированные в докладах [1, 2] и доказанные в работах [3-6], в которых были исследованы полные и векторные частоты нулей решений линейных однородных двумерных дифференциальных систем.

Для заданного натурального n обозначим через M^n множество линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \in R^+ \equiv [0, \infty),$$

с непрерывными ограниченными оператор-функциями A (которые будем отождествлять с соответствующими системами). Множество всех ненулевых решений системы $A \in M^n$ обозначим через $S_*(A)$.

Определение 1 [7]**.** Для момента $t > 0$ и функции $y : R^+ \to R$ под выражением $\nu^\alpha(y,t)$ будем понимать при $\alpha = -,0,+$ соответственно:

– число *точек ее смены знака* на промежутке $(0,t]$*;*

– число ее *нулей* на промежутке $(0,t]$*;*

– число ее *корней* на промежутке $(0,t]$*, т.е. нулей с учетом их кратности*.

Далее, для ненулевого вектора $m \in R^n_*$ и вектор-функций $x \in R^n$ введем обозначение $\nu^\alpha(x,m,t) \equiv \nu^\alpha(\langle x,m\rangle,t)$, где $\langle x(\cdot),m\rangle$ – скалярное произведение.

Определение 2 [8]**.** Для каждого решения $x \in S_*(A)$ уравнения $A \in M^n$ зададим *скалярную, полную и векторную частоты*

$$\sigma^\alpha(x) = \inf_{m \in R^n_*} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t), \qquad \zeta^\alpha(x) = \varliminf_{t\to\infty} \inf_{m \in R^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)$$

знаков, нулей или корней при $\alpha = -,0,+$ соответственно.

Замечание 1. Из определений 1 и 2 следует, что для любого ненулевого решения $x \in S_*(A)$ справедливы цепочки соотношений

$$\zeta^-(x) \le \sigma^-(x), \quad \zeta^0(x) \le \sigma^0(x), \quad \zeta^+(x) \le \sigma^+(x),$$
$$\zeta^-(x) \le \zeta^0(x) \le \zeta^+(x), \quad \sigma^-(x) \le \sigma^0(x) \le \sigma^+(x),$$

а для тривиального решения $x = 0$ выполнены равенства

$$\sigma^-(0) = \zeta^-(0) = 0, \quad \sigma^0(0) = \zeta^0(0) = \sigma^+(0) = \zeta^+(0) = +\infty.$$

Далее, по каждой из перечисленных частот $\omega = \zeta^-, \zeta^0, \zeta^+, \sigma^-, \sigma^0, \sigma^+$ образуем крайние частоты системы $A \in M^n$, а именно, младшую и старшую частоты

$$\omega_1(A) \equiv \inf_{x \in S_*(A)} \omega(x), \qquad \omega_n(A) \equiv \sup_{x \in S_*(A)} \omega(x).$$

В дальнейшем все крайние частоты будем рассматривать как функционалы на линейном топологическом пространстве M^n с естественными для функции линейными операциями и равномерной на R^+ топологией, определяемой нормой

$$\|A\| \equiv \sup_{t \in R^+} |A(t)|.$$

Определение 3 [9]**.** Для системы $A \in M^n$ введем обозначение

$$\Omega(A) = \left\{B \in M^n \middle| \lim_{t\to+\infty} |A(t) - B(t)| = 0\right\},$$

при котором возмущение $B - A$ назовем бесконечно малым. Скажем, что функционал, определенный на M^n, инвариантен в точке $A \in M^n$ относительно бесконечно малых возмущений, если его сужение на множество $\Omega(A)$ есть константа.

Определение 4 [10, 11]**.** Множество всех значений показателя $\lambda : S_*(A) \to R$ назовем спектром этого показателя уравнения $A \in M^n$. Значение показателя, принадлежащее спектру уравнения $A \in M^n$, назовем:

а) метрически существенным, если оно принимается на решениях $x \in S_*(A)$, множество наборов $x(0) \in R^n$ начальных значений которых содержит множество положительной меры Лебега в R^n;

б) топологически существенным, если оно принимается на решениях $x \in S_*(A)$, множество наборов $x(0) \in R^n$ начальных значений которых, пересеченное с некоторым открытым подмножеством $U \subset R^n$, служит дополнением в U к множеству первой категории Бэра.

В работах [2-4] были установлены следующие результаты:

– для любого наперед заданного натурального числа p существует линейная однородная двумерная дифференциальная система с периодическими коэффициентами, спектры полных и векторных частот нулей которой содержат один и тот же набор, состоящий из p различных существенных (и метрически, и топологически) значений;

– существует линейная однородная двумерная дифференциальная система, спектры полных и векторных частот нулей которой содержат одно и то же счетное множество существенных (и метрически, и топологически) значений;

– существует точка на множестве линейных однородных двумерных дифференциальных систем, в которой ни одна из крайних частот нулей не является ни непрерывной, ни полунепрерывной сверху, ни полунепрерывной снизу, ни даже инвариантной относительно бесконечно малых возмущений.

Полные и векторные частоты знаков и корней нестационарных дифференциальных систем были мало исследованы. В связи с этим возникает вопрос: *как меняются сформулированные утверждения для полных и векторных частот знаков и корней*? Этому вопросу посвящена настоящая работа.

Основные результаты

Имеют место следующие

Теорема 1. Для любого наперед заданного натурального p найдется система $A \in M^2$, имеющая такие p решений $x^1, x^2 \ldots, x^p \in S_*(A)$, удовлетворяющие условиям

$$\sigma^-(x^i) = \zeta^-(x^i) = \sigma^0(x^i) = \zeta^0(x^i) = \sigma^+(x^i) = \zeta^+(x^i) = \frac{i}{p}, \quad i = 1,2,\ldots, p, \qquad (1)$$

причем все эти значения полных и векторных частот являются метрически и топологически существенными.

Теорема 2. Существует система $A \in M^2$, имеющая такую последовательность решений $x^1, x^2, \ldots, \in S_*(A)$, удовлетворяющая условиям

$$\sigma^-(x^i) = \zeta^-(x^i) = \sigma^0(x^i) = \zeta^0(x^i) = \sigma^+(x^i) = \zeta^+(x^i) = 1 - 2^{-i}, \quad i \in N,$$

причем все эти значения полной и векторной частот являются метрически и топологически существенными.

Теорема 3. В пространстве M^2 существует точка, в которой ни одна из крайних частот знаков и корней не является ни непрерывной, ни полунепрерывной сверху, ни полунепрерывной снизу, ни даже инвариантной относительно бесконечно малых возмущений.

Сформулированные теоремы обобщают результаты работ [1-4] на большее число разновидностей частот.

Доказательство теоремы 1. Для заданного натурального p возьмем двумерную систему $A \in M^2$, построенную при доказательстве теоремы из работы [4]. Заключение

указанной теоремы состоит в том, что существует набор решений $x^1, x^2, \ldots, x^p \in S_*(A)$ системы $A \in M^2$, для которого имеет место равенство

$$\sigma^0(x^i) = \zeta^0(x^i) = \frac{i}{p}, \quad i = 1,2,\ldots,p.$$

Поэтому для доказательства настоящей теоремы остается показать, что нули всех функций $\left\langle x^i(t), m^i \right\rangle$, $i = 1,2,\ldots,p$, являются точками смены знака. Для этого введем в рассмотрение функцию φ, которая каждому ненулевому двумерному вектору ставит в соответствие угол между этим вектором и положительным направлением оси Ox_1, отсчитываемый против часовой стрелки. Далее, выбираем векторы

$$m^i = (\cos\gamma_i, \sin\gamma_i), \; i = 1,2,\ldots,p,$$

где

$$\gamma_i = \frac{\pi}{2} + \phi_i, \quad 0 < \phi_i < \varphi(x^i), \; i = 1,2,\ldots,p.$$

Тогда на всех участках, где решение x^i делает повороты менее чем 180^0, выполняется неравенство $\left\langle x^i(t), m^i \right\rangle < 0$, а после первого нуля t_1 функции $\left\langle x^i(t), m^i \right\rangle$ решение x^i продолжает дальше двигаться против часовой стрелки еще на угол $\varphi(x^i) - \phi_i$ и за это время выполняется неравенство $\left\langle x^i(t), m^i \right\rangle > 0$, а значит t_1 является точкой смены знака функции $\left\langle x^i(t), m^i \right\rangle$. Из вида системы $A \in M^2$ следует, что все остальные нули функции $\left\langle x^i(t), m^i \right\rangle$ подавно будут точками смены знака.

Следовательно, справедливость теорема 1 установлена.

Для **доказательства теоремы 2** достаточно повторить все рассуждения, проводимые при доказательстве теоремы из работы [5], и убедиться в том, что для выбранной последовательности решений $x^1, x^2, \ldots, \in S_*(A)$ (в этом доказательстве) все нули функции $\left\langle x^i(t), m^i \right\rangle$ являются точками смены знака.

Для **доказательства теоремы 3** достаточно повторить полное доказательство теоремы из работы [3], т.к. в этом доказательстве скалярное произведение каждого решения как исходной, так и возмущенных систем и ненулевого двумерного (постоянного) вектора, на котором реализуется минимум в определениях крайних полных и векторных частот нулей, имеет нули, являющиеся точками смены знаков.

Замечание 2. Доказанные теоремы остаются в силе и после замены нижнего предела в определении частот на верхний.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

Примечания:

1. Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот двумерных линейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 6. С. 807-808.
2. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот решений двумерных линейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1497-1498.

References:

1. Stash A.Kh. Spectra of full and vector frequencies of two-dimensional linear differential systems // Differential Equations. 2013. Vol. 49, No. 6. P. 807-808.
2. Stash A.Kh. Properties of full and vector frequencies of solutions of two-dimensional linear differential systems // Differential Equations. 2013. Vol. 49, No. 11. P. 1497-1498.

3. Сташ А.Х. О разрывности крайних частот на множестве линейных двумерных дифференциальных систем // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2013. Вып. 4 (125). С. 25-31. URL: http://vestnik.adygnet.ru

4. Сташ А.Х. О конечных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной периодической системы // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2014. Вып. 1 (133). С. 30-36. URL: http://vestnik.adygnet.ru

5. Сташ А.Х. О счетных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной системы // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2014. Вып. 2 (137). С. 23-32. URL: http://vestnik.adygnet.ru

6. Сташ А.Х. Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 1. С. 143-144.

7. Сергеев И.Н. Определения и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249-294.

8. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 6. С. 908.

9. Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111-166.

10. Сергеев И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1661-1662.

11. Сергеев И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1567-1568.

3. Stash A.Kh. On discontinuity of extreme frequencies on a set of the linear two-dimensional differential systems // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2013. Iss. 4 (125). P. 25-31. URL: http://vestnik.adygnet.ru

4. Stash A.Kh. On finite spectra of full and vector frequencies of linear two-dimensional differential periodic system // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2014. Iss. 1 (133). P. 30-36. URL: http://vestnik.adygnet.ru

5. Stash A.Kh. About calculating ranges of full and vector frequencies of the linear two-dimensional differential system // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2014. Iss. 2 (137). P. 23-32. URL: http://vestnik.adygnet.ru

6. Stash A.Kh. Existence of the linear two-dimensional system with continuous spectra of full and vector frequencies // Differential Equations. 2015. Vol. 51, No. 1. P. 143-144.

7. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of the linear equation // Works of Seminar of I.G. Petrovsky. 2006. Iss. 25. P. 249-294.

8. Sergeev I.N. Determination of full frequencies of solutions of a linear system // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 6. P. 908.

9. Sergeev I.N. On the theory of Lyapunov indices of linear systems of differential equations // Works of the Seminar of I.G. Petrovsky. 1983. Iss. 9. P. 111-166.

10. Sergeev I.N. Metricaally typical and essential values of indices of linear systems // Differential Equations. 2011. Vol. 47, No. 11. P. 1661-1662.

11. Sergeev I.N. Topologically typical and essential values of indices of linear systems // Differential Equations. 2012. Vol. 48, No. 11. P. 1567-1568.