

УДК 517.925
ББК 22.161.6
У 95

Ушхо А.Д.

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593908, e-mail: uschho76@mail.ru

Феклистов Г.С.

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593908, e-mail: german_f@mail.ru

Об инвариантных прямых полиномиальных векторных полей на плоскости^{*} (Рецензирована)

Аннотация. Приводятся результаты исследования плоского полиномиального векторного поля n -й степени, обобщающие ранее доказанные факты об инвариантных прямых и особых точках кубической дифференциальной системы.

Ключевые слова: инвариантная прямая, сфера Пуанкаре, состояние равновесия.

Ushkho A.D.

Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Theoretical Physics Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593908, e-mail: uschho76@mail.ru

Feklistov G.S.

Candidate of Pedagogy, Associate Professor of Theoretical Physics Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593908, e-mail: german_f@mail.ru

On invariant straight lines of polynomial vector fields on the plane

Abstract. The paper gives the results of research of a flat polynomial vector field of the n degree generalizing earlier proved facts in evidence about invariant straight lines and special points of cubic differential system.

Keywords: invariant straight line, Poincare's sphere, equilibrium state.

Еще со времен Дарбу [1] известно, что наличие достаточного количества алгебраических инвариантных кривых системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^n P_i(x, y) \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^n Q_i(x, y) \equiv Q(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где

$$P_i(x, y) = \sum_{r+s=i}^n a_{rs} x^r y^s, \quad Q_i(x, y) = \sum_{r+s=i}^n b_{rs} x^r y^s, \quad a_{rs}, b_{rs} \in R, \quad \deg(P^2 + Q^2) = 2n, \quad (P, Q) = 1,$$

позволяет записать ее общий интеграл элементарными средствами, не прибегая к операции интегрирования. Кроме того, знание хотя бы одной алгебраической инвариантной кривой упрощает полное качественное исследование системы (1) и дает возможность обнаружения новых свойств этой системы. В этой связи возникает задача об оценке числа p алгебраических инвариантных кривых системы (1). Если $p = \infty$, то систему (1) принято называть алгебраически интегрируемой.

^{*} Представлена на Первой международной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее», посвященной памяти профессора К.С. Мамия. 8-10 октября 2015 г. Конференция приурочена к 75-летию Адыгейского государственного университета.

Определение 1. Действительным частным алгебраическим интегралом системы (1) или, что то же самое, дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$ фазовых траекторий системы (1) называется алгебраическая кривая $F(x, y) = 0$, удовлетворяющая равенству $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} Q(x, y) \equiv F(x, y)R(x, y)$ (2), где $R(x, y)$ – многочлен степени $n - 1$, называемый кофактором.

Понятия «алгебраический частный интеграл» и «алгебраическая интегральная кривая» являются синонимами [2].

Вместо термина «алгебраический частный интеграл» воспользуемся термином «алгебраическая инвариантная кривая», прочно закрепившимся в современной литературе по дифференциальным уравнениям.

В работе М.В. Долова [3] доказана теорема: если среди интегральных кривых дифференциального уравнения траекторий системы (1) содержится конечное число p попарно различных, неприводимых над полем комплексных чисел алгебраических кривых, то $p \leq \frac{n^2 + n + 2}{2}$ (3), причем оценка (3) точна для $n = 2$.

Важное место в вопросе об оценке числа алгебраических инвариантных кривых системы (1) занимает задача об оценке сверху числа инвариантных прямых.

Определение 2 [4]. Прямая линия $ax + by + c = 0$ называется инвариантной прямой линией системы (1), если выполняется равенство $aP(x, y) + bQ(x, y) \equiv (ax + by + c)R(x, y)$, где $R(x, y)$ – многочлен степени не выше $n - 1$.

В последнее десятилетие прошлого столетия активно занимались проблемой оценки числа алгебраических инвариантных прямых системы (1). Так, в статье [4] доказано, что число инвариантных прямых системы (1) не превосходит $3n - 1$ ($n \geq 1$). В работе [5] доказано, что система (1) при $n = 4$ имеет не более девяти инвариантных прямых, разумеется, речь идет о вещественных инвариантных прямых. Интерес исследователей к обсуждаемой проблеме не ослабевает и в наши дни. Как показали авторы [6, 7], система (1) может иметь более девяти инвариантных прямых, если учитывать инвариантные прямые с комплексными коэффициентами. Так, в статье [6] приводится система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(x^2 - 3x + 3), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(y^2 - 3y + 3), \end{cases}$$

допускающая одиннадцать инвариантных прямых:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad y = x, \\ x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad y = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad y = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}x, \quad y = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}x. \end{aligned}$$

Прежде чем формулировать основной результат работ [6, 7] приведем

Определение 3 [6]. Система (1) называется вырожденной на бесконечности, если

$$xQ_n(x, y) - yP_n(x, y) \equiv 0 \quad (4).$$

По терминологии [8] система (1) при выполнении (4) называется проективно особой. Согласно [6, 7] справедлива теорема: если система (1) при $n = 4$ является вырожденной на бесконечности, то число ее инвариантных прямых не более девяти (с учетом инвариантных прямых с комплексными коэффициентами). Автором заметки [5] доказано, что число

вещественных инвариантных прямых системы (1) при $n = 4$ не более девяти.

Из числа более поздних работ можно отметить статьи [9-11]. В [9] приводится классификация кубических дифференциальных систем, имеющих максимальное число инвариантных прямых. В статье [10] доказано, что плоское полиномиальное векторное поле n -й степени при n – четном (нечетном) и $n \geq 3$ имеет не более $2n+1$ ($2n+2$) инвариантных прямых, если оно имеет n параллельных между собой инвариантных прямых, а также особую точку, которой инцидентны $n+1$ инвариантных прямых.

Долгое время считалось, что дифференциальная система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^3 a_{ij} x^i y^j \equiv P_3(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^3 b_{ij} x^i y^j \equiv Q_3(x, y), \end{cases} \quad (5)$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, $(P_3, Q_3) = 1$, может иметь инвариантные прямые не более четырех различных направлений. Такой позиции придерживается автор статьи [12], в которой доказано, что максимальное число действительных инвариантных прямых системы (5) равно восьми. Однако в работе [13] приведен пример системы (5), имеющей инвариантные прямые шести различных направлений. Нами проведено качественное исследование системы (5), имеющей инвариантные прямые шести различных направлений. В результате установлено:

- 1) если Ω – множество, состоящее из инвариантных прямых шести различных направлений, то Ω содержит ровно шесть прямых;
- 2) все инвариантные прямые (5) принадлежат множеству Ω ;
- 3) в ограниченной части фазовой плоскости система (5) имеет семь состояний равновесия, в том числе четыре простых узла M, N, P, Q и три простых седла F, G, H ;
- 4) система (5) не имеет на экваторе сферы Пуанкаре состояний равновесия;
- 5) система интегрируется в форме Дарбу.

Особенность состояний равновесия M, N, P, Q в том, что через каждое из них проходят три инвариантные прямые. Поэтому возможны две различные конфигурации, образованные семью состояниями равновесия системы (5):

- а) состояния равновесия M, N, P, Q образуют невыпуклый четырехугольник;
- б) состояния равновесия M, N, P, Q образуют выпуклый четырехугольник.

В соответствии с этими конфигурациями возможны два фазовых портрета системы (5) (см. рис. 1 и рис. 2).

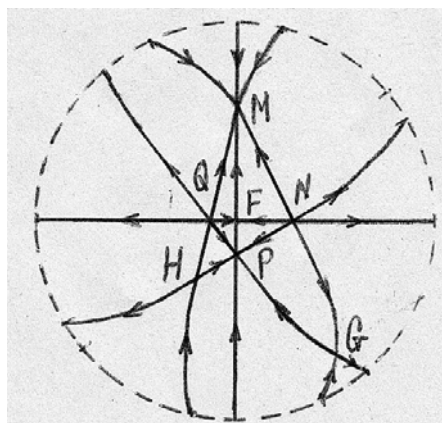


Рис. 1. Фазовый портрет системы (5), у которой состояния равновесия M, N, P, Q образуют выпуклый четырехугольник

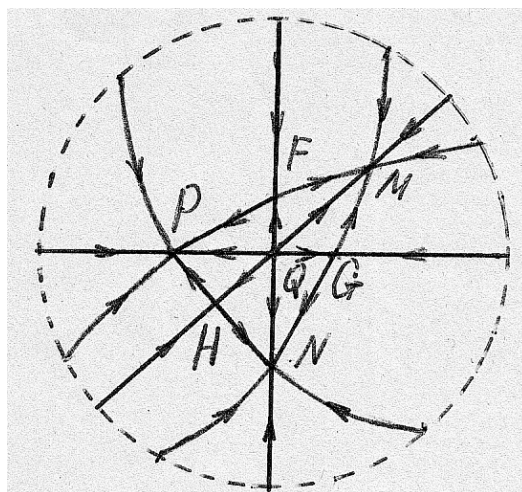


Рис. 2. Фазовый портрет системы (5), у которой состояния равновесия M, N, P, Q образуют невыпуклый четырехугольник

Замечание. Окружность круга Пуанкаре на рисунках 1 и 2 изображена пунктирной линией в знак того, что экватор сферы Пуанкаре системы (5) не состоит из траекторий системы.

В некотором смысле обобщением результатов работы [14] являются выводы, сделанные нами при исследовании системы (1), имеющей два инвариантных множества M_A^n и M_B^n , частным случаем которой является система (5).

Под символом M_R^s следует понимать множество, состоящее из s инвариантных прямых системы (1), проходящих через ее состояние равновесия R .

Нами установлены следующие факты:

1) если система (1) имеет два инвариантных множества M_A^n и M_B^n , то существует аффинное преобразование, приводящее (1) к системе

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[Q_{n-1}(x, y) + P_{n-2}(x, y) + Q_{n-3}(x, y) + \dots + Q_1(x, y) + b_{00}], \\ \frac{dy}{dt} = y[Q_{n-1}(x, y) + Q_{n-2}(x, y) + Q_{n-3}(x, y) + \dots + Q_1(x, y) + b_{00}], \end{cases} \quad (6)$$

где $Q_i(x, y)$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) – однородные многочлены степени i , причем $Q_{n-1}(x, y) \neq 0$, $P_{n-2}(x, y)$ – однородный многочлен степени $n-2$ и $P_{n-2}(x, y) \neq Q_{n-2}(x, y)$, $b \in R$, то есть система (1) является проективно особой;

2) если система (1) имеет два инвариантных множества M_A^n и M_B^n , то прямая (AB) является инвариантной;

3) если система (1) имеет инвариантные прямые более чем $n+1$ направлений, то система (1) является проективно особой;

4) если система (1) имеет два инвариантных множества M_A^n и M_B^n , то при n – четном (нечетном) эта система имеет не более $2n+1$ ($2n$) инвариантных прямых;

5) если система (1) имеет два инвариантных множества M_A^n и M_B^n , но не имеет параллельных инвариантных прямых, то эта система имеет на экваторе сферы Пуанкаре не более одного состояния равновесия, которое (если оно существует) расположено на концах прямой AB .

Так, например, система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[2y^2 - 3xy + 4x - 6y + 8], \\ \frac{dy}{dt} = y[2y^2 - 3xy + 8x - 10y + 8] \end{cases} \quad (7)$$

имеет два инвариантных множества:

$$M_N^3 = \{x - 2y + 2 = 0, 2x - y + 4 = 0, y = 0\}, \quad N \equiv (-2; 0),$$

$$M_O^3 = \{y - x = 0, x = 0, y = 0\}, \quad O \equiv (0; 0).$$

Система (7) имеет на экваторе сферы Пуанкаре единственное состояние равновесия на «концах» прямой $y = 0$, в то же время не имеет инвариантной прямой L , где $L \notin M_N^3 \cup M_O^3$.

Фазовый портрет системы (7) изображен на рисунке 3.

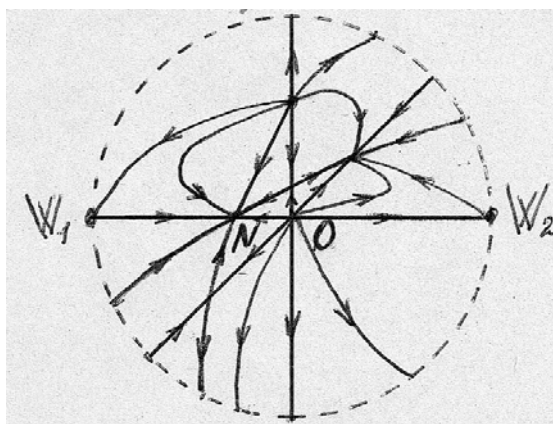


Рис. 3. Единственное состояние равновесия системы (7) на экваторе сферы Пуанкаре изображено точками W_1 и W_2 , расположенными на «концах» прямой $y = 0$

В связи с приведенными выше фактами, изложенными в пунктах 4) и 5), естественным образом возникает вопрос: есть ли у системы (1), имеющей два инвариантных множества M_A^n и M_B^n , но не имеющей параллельных инвариантных прямых в случае максимального числа инвариантных прямых, состояния равновесия на бесконечности?

Примечания:

1. Darboux M.G. Memoire sur les equations differentielles algebriques du premier ordre et du premier degre // Bulletin des Sciences Mathematiques et Astronom. Paris, 1878. P. 60-96, 123-144, 151-200.
2. Дружкова Т.А. Алгебраические дифференциальные уравнения с алгебраическими интегралами: метод. пособие. Ч. 1. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2005. 37 с.
3. Долов М.В. О числе алгебраических инвариантных кривых полиномиальных векторных полей // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 838-839.
4. Artes Joan C., Grunbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific Journal of Mathematics. 1998. Vol. 184, No. 2. P. 207-230.
5. Sokulski J. On the number of invariant straight

References:

1. Darboux M.G. Memoire sur les equations differentielles algebriques du premier ordre et du premier degre // Bulletin des Sciences Mathematiques et Astronom. Paris, 1878. P. 60-96, 123-144, 151-200.
3. Druzhkova T.A. The algebraic differential equations with algebraic integrals. A manual. Pt. 1. Nizhny Novgorod: Publishing House of the Nizhny Novgorod University, 2005. 37 pp.
3. Dolov M.V. On the number of algebraic invariant curves of the polynomial vector fields // Differential Equations. 2004. Vol. 40, No. 6. P. 838-839.
4. Artes Joan C., Grunbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific Journal of Mathematics. 1998. Vol. 184, No. 2. P. 207-230.
5. Sokulski J. On the number of invariant straight

- lines for polynomial vector fields // Nonlinearity. 1996. No. 9. P. 479-485.
6. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. I // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. № 6. С. 132-137.
 7. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. II // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 1. С. 139-148.
 8. Горбузов В.Н. Проективный атлас траекторий дифференциальных систем второго порядка // Вестник Гродненского государственного университета. Сер. 2. 2011. № 2 (111). С. 15-26.
 9. Llibre J., Vulpe N. Planar cubic polynomial differential systems with the maximum number of invariant straight lines // Rocky Mountain Journal of Mathematics. 2006. Vol. 36, No. 4. P. 1301-1373.
 10. Тлячев В.Б., Ушко А.Д., Ушко Д.С. Оценка сверху числа инвариантных прямых полиномиального векторного поля n -й степени // Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, № 2. С. 171-178.
 11. Bujac C., Vulpe N. Cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with four distinct infinite singularities. Preprint. Universitat Autònoma de Barcelona, 2013. No. 10. P. 1-51.
 12. Любимова Р.А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференциальные и интегральные уравнения: межвуз. сб. Горький: Изд-во гос. ун-та, 1977. Вып. 1. С. 19-22.
 13. Putuntica V.M. The cubic differential system with six real invariant straight lines along six directions // Материалы международной конференции, посвященной столетию Н.Н. Боголюбова и 70-летию Н.Н. Нагнибиды. Черновцы: Изд-во Черновицкого гос. ун-та, 2009. С. 245-247.
 14. Ушко А.Д. Траектории кубической дифференциальной системы на плоскости, имеющей инвариантные прямые шести различных направлений // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. 2012. № 2. С. 224-231.
 - lines for polynomial vector fields // Nonlinearity. 1996. No. 9. P. 479-485.
 6. Dolov M.V., Chistyakova S.A. On linear particular integrals of polynomial vector fields of the fourth degree with degenerate infinity. I // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2010. No. 6. P. 132-137.
 7. Dolov M.V., Chistyakova S.A. On linear particular integrals of polynomial vector fields of the fourth degree with degenerate infinity. II // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2011. No. 1. P. 139-148.
 8. Gorbuzov V.N. Projective atlas of trajectories of differential systems of the second order // Bulletin of Grodno State University. Ser. 2. 2011. No. 2 (111). P. 15-26.
 9. Llibre J., Vulpe N. Planar cubic polynomial differential systems with the maximum number of invariant straight lines // Rocky Mountain Journal of Mathematics. 2006. Vol. 36, No. 4. P. 1301-1373.
 10. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. The upper estimate of the invariant straight lines of the polynomial vector field of the n -th degree // Proceedings of Saratov University. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2015. Vol. 15, No. 2. P. 171-178.
 11. Bujac C., Vulpe N. Cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with four distinct infinite singularities. Preprint. Universitat Autònoma de Barcelona, 2013. No. 10. P. 1-51.
 12. Lyubimova R.A. On one differential equation with integral straight lines // Differential and Integral Equations: the interuniversity proc. Gorky: University Publishing House, 1977. Iss. 1. P. 19-22.
 13. Putuntica V.M. The cubic differential system with six real invariant straight lines along six directions // Proceedings of the international conference dedicated to the centenary of N.N. Bogolyubov and the 70th anniversary of N.N. Naghibida. Chernovtsy: Publishing House of the Chernivtsi National University, 2009. P. 245-24
 14. Ushkho A.D. Trajectories of cubic differential systems on the plane having invariant straight lines of six different directions // Bulletin of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics. 2012. No. 2. P. 224-231.