УДК 517.2/.3
ББК 22.161.1
С 78

Сташ А.Х.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593905, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

Свойства полных и векторных частот решений линейных неоднородных автономных дифференциальных уравнений

(Рецензирована)

Аннотация. *Полностью изучены множества значений характеристик колеблемости решений линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами. Оказалось, что полные и векторные частоты строгих смен знаков решений неоднородного уравнения принимают лишь нулевые значения, а для любого решения его полные и векторные частоты нестрогих смен знаков, нулей, корней и гиперкратных корней совпадают между собой. Установлено, что спектры полных и векторных частот нестрогих смен знаков, нулей, корней и гиперкратных корней неоднородного уравнения состоят из набора регуляризованных частот.*

Ключевые слова: *линейное автономное дифференциальное уравнение, колеблемость решения, число смен знака функции, число нулей функции, число корней функции, полная частота, векторная частота.*

Stash A.Kh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593905, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

Properties of full and vector frequencies of solutions of linear nonhomogeneous autonomous differential equations

Abstract. *Sets of values of characteristics of solution variability of the linear nonhomogeneous equation with constant coefficients are completely studied. Full and vector frequencies of strict sign changes of solutions of the nonhomogeneous equation prove to accept only zero values, and for any solution its full and vector frequencies of mild changes of signs, zeros, roots and the hypercrate roots coincide among themselves. It is established that ranges of full and vector frequencies of mild changes of signs, zeros, roots and hypercrate roots of the nonhomogeneous equation consist of a set of the regularized frequencies.*

Keywords: *linear autonomous differential equation, solution variability, number of function sign changes, number of function zeros, number of function roots, full frequency, vector frequency.*

Введение и формулировка результатов

Рассмотрим множество Q функций, представимых в виде конечной суммы квазимногочленов:

$$\sum_{j=1}^{l} e^{\alpha_j t}(u_j(t)\cos\beta_j t + v_j(t)\sin\beta_j t), \qquad \alpha_j \in R, \quad 0 \le \beta_1 \le \beta_2 \le \ldots \le \beta_j,$$

(u_j, v_j – действительные многочлены) с попарно различными показателями $\delta_j = \alpha_j + i\beta_j$. Далее для заданного натурального n рассмотрим пространство $C^n \times Q$ линейных неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = f(t), \qquad t \in R^+ \equiv [0;+\infty),$$

отождествляемых каждое со своей парой (a, f), где $a \equiv (a_1, \ldots, a_n)$ – строка постоянных действительных коэффициентов, а $f \in Q$ – неоднородность.

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y : R^+ \to R$, если в любой окрестности этой точки функция y

принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 [1, 2]**.** Для момента $t>0$ и функции $y:R^{+}\to R$ под выражением $\nu^{\varepsilon}(y,t)$ будем понимать при $\varepsilon=-,\mp,0,+,*$ соответственно:

– число *ее строгих смен знака* на промежутке $(0,t]$*;*

– число *ее нестрогих смен знака* на промежутке $(0,t]$*;*

– число ее *нулей* на промежутке $(0,t]$*;*

– число ее *корней* на промежутке $(0,t]$*, то есть нулей с учетом их кратности;*

– число ее *гиперкратных корней* на промежутке $(0,t]$: при его подсчете каждый некратный корень берется ровно один раз, а кратный – сразу бесконечно много раз.

Далее, для множества R_{*}^{∞} всех конечных ненулевых последовательностей, каждой бесконечно дифференцируемой числовой функции y, последовательности $m\equiv(m_1,m_2,\dots,m_k)\in R_{*}^{k}\subset R_{*}^{\infty}$ (k – не фиксировано) введем обозначение $\nu^{\varepsilon}(y,m,t)\equiv\nu^{\varepsilon}(\langle\psi y,m\rangle,t)$, где $\psi y\equiv(y,\dot y,\dots,y^{(k-1)})$, а $\langle\psi y(\cdot),m\rangle$ – скалярное произведение.

Определение 3 [3]**.** Верхняя (нижняя) *полная и векторная частоты знаков, нулей, корней и гиперкратных корней бесконечно дифференцируемой* функции $y:R^{+}\to R$ зададим формулами

$$\breve{\sigma}^{\varepsilon}(y)=\inf_{m\in R_{*}^{n}}\varliminf_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^{\varepsilon}(y,m,t)\qquad\left(\hat{\sigma}^{\varepsilon}(y)=\inf_{m\in R_{*}^{n}}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^{\varepsilon}(y,m,t)\right),$$

$$\breve{\zeta}^{\varepsilon}(y)=\varliminf_{t\to\infty}\inf_{m\in R_{*}^{n}}\frac{\pi}{t}\nu^{\varepsilon}(y,m,t)\qquad\left(\hat{\zeta}^{\varepsilon}(y)=\varlimsup_{t\to\infty}\inf_{m\in R_{*}^{n}}\frac{\pi}{t}\nu^{\varepsilon}(y,m,t)\right)$$

при $\varepsilon=-,\mp,0,+,*$ соответственно.

В случае совпадения полной или векторной верхней частоты функции y с одноименной нижней будем называть ее точной и обозначать $\sigma^{\varepsilon}(y)$ или $\zeta^{\varepsilon}(y)$.

Определение 4 [3]**.** Для каждого $w=\hat{\sigma}^{\varepsilon},\hat{\zeta}^{\varepsilon},\breve{\sigma}^{\varepsilon},\breve{\zeta}^{\varepsilon}$ назовем j-ым верхним $w_{\bar{j}}(a)$ и нижним $w_{\underline{j}}(a)$ *регуляризованные по Миллионщикову значения* соответствующей частоты неоднородного уравнения $(a,f)\in C^{n}\times Q$ величины, задаваемые равенствами

$$w_{\bar{j}}(a,f)=\inf_{L\in A_j(a)}\sup_{y\in L}w(y),\qquad w_{\underline{j}}(a,f)=\sup_{L\in A_{n-j}(a)}\inf_{y\in L}w(y),\qquad j=0,1,\dots,n,$$

где $A_j(a)$ множество j-мерных подпространств аффинного пространства $S(a,f)$ всех решений этого уравнения.

Определение 5. Спектром $Sp_{\chi}(a,f)$ частоты χ неоднородного уравнения $(a,f)\in C^{n}\times Q$ назовем множество всех значений частоты $\chi(y)$ его решений $y\in S(a,f)$.

Для решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений их полные и векторные частоты нулей полностью изучены в работах [4, 5], а полные и векторные частоты строгих смен знаков и корней – в работах [6-8].

Полные частоты нулей решений линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами были изучены только в работе [3]. Оставались открытыми свойства остальных вышеперечисленных частот решений неоднородного уравнения. Этим вопросам посвящена настоящая работа.

Теорема 1. *Для любого решения* $y \in S(a, f)$ *любого неоднородного уравнения* $(a, f) \in C^n \times Q$ *справедливы цепочки равенств*

$$\zeta^-(y) = \sigma^-(y) = 0,$$

$$\zeta^{\mp}(y) = \zeta^0(y) = \zeta^+(y) = \zeta^*(y) = \sigma^{\mp}(y) = \sigma^0(y) = \sigma^+(y) = \sigma^*(y).$$

Из второй цепочки равенств, с учетом результатов работы [3], немедленно вытекает

Следствие. *Для любого неоднородного уравнения* $(a, f) \in C^n \times Q$ *при любом*

$$w = \sigma^{\pm}, \zeta^{\pm}, \sigma^0, \zeta^0, \sigma^+, \zeta^+, \sigma^*, \zeta^*$$

выполнены равенства

$$w_{\bar{j}}(a, f) = w_{\underline{j}}(a, f) = \min\left\{\left|\operatorname{Im}\lambda_j\right|, \beta_1\right\}, \qquad j = 0,1,\ldots,n,$$

где $\left|\operatorname{Im}\lambda_0\right| = +\infty$*, а* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *– корни характеристического многочлена соответствующего однородного уравнения* $(a,0)$*, упорядоченные по нестрогому возрастанию модулей их мнимых частей.*

Теорема 2. *Спектры полных и векторных частот нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкратных корней неоднородного уравнения* $(a, f) \in C^n \times Q$ *состоят из набора регуляризованных частот.*

Доказательство результатов

1. Из общего вида множества решений неоднородного уравнения $(a, f) \in C^n \times Q$ следует, что найдется такое уравнение $b \equiv (b_1, b_2, \ldots, b_{n+r_1}) \in C^{n+r_1}$, множество решений $S(b,0)$ которого содержит $S(a, f)$. Поэтому для любого решения $y \in S(a, f)$ и последовательности $m_1 \equiv (b_{n+r_1}, \ldots, b_2, b_1, 1) \in R^{n+r_1+1}$ функция $\langle \psi y(\tau), m_1 \rangle$ тождественно равна нулю. Следовательно, выполняются равенства

$$\zeta^-(y) = \sigma^-(y) = 0.$$

2. В соответствии с упорядоченным набором $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ выпишем фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения $(a,0)$: каждому действительному корню λ, встречающемуся в списке ровно s раз, поставим в соответствие набор функций

$$t^{s-1}e^{\lambda t}, \quad t^{s-2}e^{\lambda t}, \ldots, te^{\lambda t},\ e^{\lambda t},$$

а каждой паре комплексно-сопряженных корней $\mu \pm i\gamma$, встречающейся в списке корней ровно s раз, поставим в соответствие следующий набор функций:

$$t^{s-1}e^{\mu t}\cos\gamma t, \quad t^{s-1}e^{\mu t}\sin\gamma t, \ldots, te^{\mu t}\cos\gamma t, \quad te^{\mu t}\sin\gamma t, \quad e^{\mu t}\cos\gamma t, \quad e^{\mu t}\sin\gamma t.$$

В итоге получим упорядоченный список $S = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, состоящий ровно из n функций.

С помощью метода неопределенных коэффициентов найдем частное решение

$$z = \sum_{j=1}^{l} t^{h_j} e^{\alpha_j t}(P_j(t)\cos\beta_j t + M_j(t)\sin\beta_j t), \qquad h_j \in N \cup \{0\},$$

где P_j, M_j – действительные многочлены рассматриваемого уравнения (a, f). Тогда общее решение этого неоднородного уравнения запишется в виде

$$y = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t) + z(t),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные.

Возьмем произвольное решение неоднородного уравнения (a, f):

$$y = c_q f_q(t) + c_{q+1} f_{q+1}(t) + \cdots + c_p f_p(t) + z(t), \quad c_q \neq 0, \quad 1 \leq q \leq p \leq n. \tag{1}$$

3. Пусть функции

$$f_q, f_{q+1}, \ldots, f_n,\ t^{h_2} e^{\alpha_2 t} P_2(t) \cos \beta_2 t, \qquad t^{h_2} e^{\alpha_2 t} M_2(t) \sin \beta_2 t, \ldots, t^{h_l} e^{\alpha_l t} M_l(t) \sin \beta_l t$$

являются решениями уравнения $d = \left(d_1, d_2, \ldots, d_{r_2}\right) \in C^{r_2}$ наименьшего порядка и $\lambda_q = \delta_1 \in R$. Тогда выбранное решение $y \in S(a, f)$ представимо в виде

$$y = t^{h_1} e^{\delta_1 t} P_1(t) + u(t), \quad u \in S(d, 0), \quad t^{h_1} e^{\delta_1 t} P_1(t) \notin S(d, 0).$$

Поэтому при $m_2 = \left(d_{r_2}, \ldots, d_2, d_1, 1\right) \in R^{r_2+1}$ имеем:

$$\left\langle \psi y(\tau), m_2 \right\rangle = \left\langle \psi(\tau^{h_1} e^{\delta_1 \tau} P_1(\tau)), m_2 \right\rangle + \left\langle \psi u(\tau), m_2 \right\rangle = \left\langle \psi(\tau^{h_1} e^{\delta_1 \tau} P_1(\tau)), m_2 \right\rangle = e^{\delta_1 \tau} H(\tau), \tag{2}$$

где многочлен $H(\tau)$ тождественно не равен нулю. Следовательно, найдется такое число T_0, что функция (2) на промежутке $\left[T_0, +\infty\right]$ нулей вообще не имеет, а значит, справедлива цепочка равенств

$$\sigma^{\mp}(y) = \zeta^{\mp}(y) = \sigma^0(y) = \zeta^0(y) = \sigma^+(y) = \zeta^+(y) = \sigma^*(y) = \zeta^*(y) = 0\,. \tag{3}$$

4. Пусть функции

$$f_{q+1}, f_{q+2}, \ldots, f_n,\ t^{h_1} e^{\alpha_1 t} P_1(t) \cos \beta_1 t, \quad t^{h_1} e^{\alpha_1 t} M_1(t) \sin \beta_1 t, \ldots, t^{h_l} e^{\alpha_l t} M_l(t) \sin \beta_l t$$

являются решениями уравнения $\overline{d} = \left(\overline{d}_1, \overline{d}_2, \ldots, \overline{d}_{r_3}\right) \in C^{r_3}$ наименьшего порядка и $0 = \operatorname{Im} \lambda_q < \delta_1$. Тогда решение (1) разлагается в виде

$$y = c_q f_q(t) + u_1(t), \quad u_1 \in S(\overline{d}, 0), \quad f_q \notin S(\overline{d}, 0).$$

Поэтому для последовательности $m_3 = \left(\overline{d}_{r_3}, \ldots, \overline{d}_2, \overline{d}_1, 1\right) \in R^{r_3+1}$ будем иметь функцию

$$\left\langle \psi y(\tau), m_3 \right\rangle = c_q \left\langle \psi f_q(\tau), m_3 \right\rangle + \left\langle \psi u_1(\tau), m_3 \right\rangle = c_q \left\langle \psi f_q(\tau), m_3 \right\rangle = e^{\lambda_q \tau} D(\tau),$$

где многочлен $D(\tau)$ тождественно не равен нулю, откуда следует справедливость (3).

5. Случай $0 = \delta_1 < \operatorname{Im} \lambda_q$ разбирается аналогично предыдущему пункту настоящего доказательства и приводит к такому же заключению.

6. Пусть теперь $\lambda_q = \delta_1 \notin R$. Тогда для выбранного решения

$$y = u_2(t) + u(t) \in S(a, f),$$

где

$$u \in S(d, 0), \quad u_2 \notin S(d, 0), \quad u_2 = t^{h_1} e^{\alpha_1 t} \left(P_1(t) \cos \beta_1 t + M_1(t) \sin \beta_1 t\right)$$

и последовательности $m_2 = \left(d_{r_2}, \ldots, d_2, d_1, 1\right) \in R^{r_2+1}$, получим (см. [6])

$$\left\langle \psi y(\tau), m_2 \right\rangle = \left\langle \psi u_2(\tau), m_2 \right\rangle + \left\langle \psi u(\tau), m_2 \right\rangle = \left\langle \psi u_2(\tau), m_2 \right\rangle = A e^{\alpha_1 \tau} \sin(\beta_1 \tau + \tau_0)\,, \tag{4}$$

где τ_0 – вспомогательный угол и $A \neq 0$.

Заметим, что для любой последовательности $m \in R_*^k$ функция $\left\langle \psi y, m \right\rangle$ является решением уравнения $d = \left(d_1, d_2, \ldots, d_{r_2}\right) \in C^{r_2}$. Поэтому предположение о существовании вектора m_4, при котором функция $\left\langle \psi y, m_4 \right\rangle$ имеет меньшую чем β_1 скалярную частоту строгих знаков (то есть величина $\varlimsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{\pi}{t}\nu^{-}(y,m_4,t)$), приводит к противоречию с тем, что наименьшая скалярная частота строгих знаков решения вида (1) совпадает с β_1 (см. [1]). Учитывая, что функция (4) не имеет кратных нулей, приходим к равенствам

$$\zeta^{\mp}(y)=\zeta^{0}(y)=\zeta^{+}(y)=\zeta^{*}(y)=\beta_1 .$$

Из определений полных и векторных частот следует, что для рассматриваемого решения $y\in S(a,f)$ при любом $\varepsilon=\mp,0,+,*$ соблюдаются неравенства как с одной стороны

$$\hat{\sigma}^{\varepsilon}(y)\ge\check{\sigma}^{\varepsilon}(y)\ge\check{\zeta}^{\varepsilon}(y)=\beta_1 ,$$

так и с другой

$$\sigma^{\varepsilon}(y)=\inf_{m\in R_*^n}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^{\varepsilon}(y,m,t)\le\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^{\varepsilon}(y,m_2,t)=\zeta^{\varepsilon}(y)=\beta_1,$$

дающие равенства

$$\sigma^{\mp}(y)=\sigma^{0}(y)=\sigma^{+}(y)=\sigma^{*}(y)=\beta_1 .$$

7. Пусть далее $0\ne\gamma_q\equiv\left|\operatorname{Im}\lambda_q\right|<\beta_1$ и $n-q$ – четное. Тогда для решения (1) и последовательности $m_3=\left(\bar{d}_{r_2},\ldots,\bar{d}_2,\bar{d}_1,1\right)\in R^{r_2+1}$ получим (см. [6]):

$$\left\langle\psi y(\tau),m_3\right\rangle=c_q\left\langle\psi f_q(\tau),m_3\right\rangle=Be^{\mu_q\tau}\sin(\gamma_q\tau+\tau_1) ,$$

где $\lambda_q=\mu_q+i\gamma_q$, τ_1 – вспомогательный угол и $B\ne 0$.

Следовательно, (см. п. 6) получим:

$$\sigma^{\mp}(y)=\zeta^{\mp}(y)=\sigma^{0}(y)=\zeta^{0}(y)=\sigma^{+}(y)=\zeta^{+}(y)=\sigma^{*}(y)=\zeta^{*}(y)=\gamma_q .$$

Если же $n-q$ – нечетное, то вместо уравнения $\bar{d}\in C^{r_3}$ и последовательности $m_3=\left(\bar{d}_{r_3},\ldots,\bar{d}_2,\bar{d}_1,1\right)$ выбираются, соответственно, уравнение $\rho=\left(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{r_3-1}\right)\in C^{r_3-1}$ с фундаментальной системой решений

$$f_{q+2},f_{q+3},\ldots,f_n,\ t^{h_1}e^{\alpha_1 t}P_1(t)\cos\beta_1 t,\quad t^{h_1}e^{\alpha_1 t}M_1(t)\sin\beta_1 t,\ldots,t^{h_l}e^{\alpha_l t}M_l(t)\sin\beta_l t$$

и вектор $m_5=\left(\rho_{r_3-1},\ldots,\rho_2,\rho_1,1\right)\in R^{r_3}$. Далее все рассуждения повторяются.

8. Рассуждения, проводимые в п. 7 настоящего доказательства в случае $0\ne\beta_1<\left|\operatorname{Im}\lambda_q\right|$, приводят к равенствам

$$\sigma^{\mp}(y)=\zeta^{\mp}(y)=\sigma^{0}(y)=\zeta^{0}(y)=\sigma^{+}(y)=\zeta^{+}(y)=\sigma^{*}(y)=\zeta^{*}(y)=\beta_1 .$$

Теоремы 1 и 2 полностью доказаны.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

Примечания:

1. Сергеев И.Н. Определения и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249-294.
2. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 1. С. 119-138.
3. Сергеев И.Н. Полные частоты линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффи-

References:

1. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of the linear equation // Works of Seminar of I.G. Petrovsky. 2006. Iss. 25. P. 249-294.
2. Sergeev I.N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems // Sbornik: Mathematics. 2013. Vol. 204, No. 1. P. 119-138.
3. Sergeev I.N. Full frequencies of the linear inhomogeneous equation with constant coeffi-

циентами // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 11. С. 1670.

4. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1577.
5. Бурлаков Д.С., Цой С.В. Равенство полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1662-1663.
6. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот знака решений линейных автономных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1418-1422.
7. Сташ А.Х. Полные и векторные частоты нестрогих знаков решений линейных автономных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 829-830.
8. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот нестрогих знаков и корней решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2015. Вып. 3 (166). С. 18-22. URL: http://vestnik.adygnet.ru

cients // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 11. P. 1670.

4. Sergeev I.N. Determination of full frequencies of solutions of the linear equation // Differential Equations. 2008. Vol. 44, No. 11. P. 1577.
5. Burlakov D.S., Tsoy S.V. Equality of full and vector frequencies of solutions of linear autonomous system // Differential Equations. 2011. Vol. 47, No. 11. P. 1662-1663.
6. Stash A.Kh. Properties of complete and vector sign frequencies of solutions of linear autonomous differential equations // Differential Equations. 2014. Vol. 50, No. 10. P. 1418-1422.
7. Stash A.Kh. Complete and vector frequencies of lax signs of solutions of the linear autonomous differential equations // Differential Equations. 2015. Vol. 51, No. 6. P. 829-830.
8. Stash A.Kh. Properties of full and vector frequencies of lax signs and roots of solutions of linear homogenous autonomous differential equations // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2015. Iss. 3 (166). P. 18-22. URL: http://vestnik.adygnet.ru