УДК 514.742.4
ББК 22.161.6
Р 65

Ройтенберг В.Ш.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ярославского государственного технического университета, Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

О рождении периодической траектории из точки пересечения линий разрыва векторного поля

(Рецензирована)

Аннотация. *Рассматриваются кусочно-гладкие векторные поля на плоскости в окрестности особой точки на пересечении их линий разрыва. Описана бифуркация рождения периодических траекторий.*
Ключевые слова: *кусочно-гладкие векторные поля на плоскости, особая точка, бифуркации.*

Roytenberg V.Sh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Higher Mathematics Department, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

On the generation of a periodic trajectory out of a point of intersection of lines of discontinuity of a vector field

Abstract. *The paper examine piecewise smooth planar vector fields in a neighborhood of singular point on the intersection of their lines of discontinuity. We describe a bifurcation of generation of periodic orbits.*
Keywords: *piecewise smooth planar vector fields, singular point, bifurcations.*

Динамические системы, задаваемые кусочно-гладкими векторными полями, используются в качестве математических моделей в задачах автоматического управления, в механических системах с сухим трением, в некоторых биологических и экономических задачах. Бифуркации таких систем изучались в ряде работ, например, в книгах [1, 2], а также в статьях автора [3–9]. В настоящей работе рассматриваются кусочно-гладкие векторные поля на плоскости в окрестности особой точки O «на стыке» линий разрыва векторных полей. Исследованию устойчивости такой точки посвящено много работ (см. [1]). Будем рассматривать бифуркации, при которых особая точка O теряет устойчивость и из нее рождается устойчивая периодическая траектория.

Пусть $\eta_i:[0,1]\to \mathbf{R}^2$ ($i=1,2,...,n+1$, $n\ge 3$) – такие C^{r+1}-вложения ($r\ge 2$), что $\eta_i(0)=O=(0,0)$, $\eta_{n+1}=\eta_1$, а реперы $(\eta_i'(0),\eta_{i+1}'(0))$ положительно ориентированы. Пусть $M=\{(x_1,x_2)\in \mathbf{R}^2 : x_1^2+x_2^2\le \rho^2\}$, $\partial M=\{(x_1,x_2)\in \mathbf{R}^2 : x_1^2+x_2^2=\rho^2\}$. Будем считать $\rho>0$ выбранным столь малым, что $\forall i=1,2,...,n$ $\eta_i[0,1]$ пересекается с ∂M в единственной точке $A_i=\eta_i(s_i)$. Обозначим $L_i=\eta_i[0,s_i]$. Точки $A_1,A_2,...,A_n,A_{n+1}=A_1$ расположены на окружности ∂M в циклическом порядке. Пусть A_iA_{i+1} – ориентированная дуга ∂M между точками A_i и A_{i+1}, а M_i – замкнутая область, ограниченная $L_i\cup L_{i+1}\cup A_iA_{i+1}$. Обозначим $\mathrm{X}^r(M_i)$ – банахово пространство C^r-векторных полей на M_i с C^r-нормой. *Кусочно-гладким векторным полем в области M с разбиением D на области M_i* называется элемент $X=(X^1,X^2,...,X^n)$ банахова пространства $\mathrm{X}^r(M,D):=\mathrm{X}^r(M_1)\oplus \mathrm{X}^r(M_2)\oplus ...\oplus \mathrm{X}^r(M_n)$. Его можно отождествить с классом таких векторных полей $\bar{X}:M\to \mathbf{R}^2$, что $\bar{X}(z)=X^i(z)$ в точках $z\in \operatorname{int} M_i$, $i=1,2,...,n$. Векторные поля $\bar{X}$, вообще говоря, разрывны в точках линий L_i. *Траектории кусочно-гладкого векторного поля X* определим, согласно [1], как траектории дифференциального включения $\dot{z}=\hat{X}(z)$, где $\hat{X}(z)=\{X_i(z)\}$, если $z\in \operatorname{int} M_i$, $\hat{X}(z)$ – выпуклая оболочка векторов $X^i(z)$ и $X^{i+1}(z)$, если $z\in L_i\setminus O$, и $\hat{X}(O)$ – выпуклая оболочка векторов $X^1(O)$,

$X^n(O)$. Точку O будем называть *устойчивым (неустойчивым) сшитым фокусом* поля $X_0 \in \mathrm{X}^r(M,D)$, если все его траектории, начинающиеся в точках достаточно малой проколотой окрестности O, $\omega(\alpha)$-предельны к O, а связные компоненты их пересечения с M_i являются дугами с концами на L_i и L_{i+1}.

Обозначим $\mathrm{X}_+^r(M,D)$ открытое подмножество в $\mathrm{X}^r(M,D)$, состоящее из таких векторных полей $X_0=(X_0^1,...,X_0^n)$, что при любом $i=1,2,...,n$ обе пары векторов $(\eta_i'(0), X_0^i(O))$ и $(\eta_{i+1}'(0), X_0^i(O))$ положительно ориентированы. Пусть $X_0=(X_0^1,...,X_0^n)\in \mathrm{X}_+^r(M,D)$. Число $\delta_0>0$ и окрестность $U=U(X_0)$ поля X_0 в $\mathrm{X}_+^r(M,D)$ можно выбрать так, что для любого $X=(X^1,...,X^n)\in U$ определены отображения $\eta_i(s)\mapsto \eta_{i+1}(f_i(s,X))$, $s\in[0,\delta_0)$, по траекториям векторных полей X^i, $i=1,2,...,n$, при этом $f_i(s,X)$ – функции класса C^r на $[0,\delta_0)\times U$, $f_i(0,X)=0$, $(f_i)_s'(s,X)>0$. При достаточно малых δ_0 и U на $[0,\delta_0)\times U$ определена функция $f(s,X):=f_n(...f_2(f_1(s,X),X),...,X)$. Функция $f(\cdot,X)$ является функцией последования по траекториям векторного поля X. Равенства $g(X_0)=f_s'(0,X_0)-1$ и $h(X)=f_{ss}''(0,X_0)$ задают C^{r-1}-функцию $g:\mathrm{X}_+^r(M,D)\to\mathbf{R}$ и C^{r-2}-функцию $h:\mathrm{X}_+^r(M,D)\to\mathbf{R}$. Обозначим $\overline{B}_1:=\{X\in \mathrm{X}_+^r(M,D): g(X)=0\}$, $B_1:=\{X\in\overline{B}_1 : h(X)\neq 0\}$.

Теорема 1. Множество $\overline{B}_1$ является вложенным C^{r-1}-подмногообразием в $\mathrm{X}^r(M,D)$ коразмерности один. Множество B_1 открыто и всюду плотно в $\overline{B}_1$.

Доказательство. Пусть поле $X_0=(X_0^1,...,X_0^n)\in\overline{B}_1$. В окрестности V точки O выберем C^{r+1}-координаты (x,y) так, чтобы $M_1\cap V$ задавалось неравенствами $x\geq 0, y\geq 0$, а $\eta_1(s)=(s,0)$, $\eta_2(s)=(0,s)$. Пусть

$$X_0^1(x,y)=P(x,y)\partial/\partial x+Q(x,y)\partial/\partial y, \qquad H=(H^1,0,...,0)\in \mathrm{X}^r(M,D), \qquad H^1=P\partial/\partial y.$$

При малых $\mu>0$ $X_0+\mu H\in U(X_0)$. Траектории поля $X_\mu^1=X_0^1+\mu H^1$ являются интегральными кривыми дифференциального уравнения $y'=R(x,y,\mu)$, где $R=(Q/P)+\mu$. Пусть $y=Y(x,s,\mu)$ – решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $Y(s,s,\mu)=0$. Тогда $f_1(s,X_0+\mu H)=Y(0,s,\mu)$ и $(f_1)_s'(s,X_0+\mu H)=Y_s'(0,s,\mu)$.

Так как

$$Y_s'(0,s,\mu)=-R(s,0,\mu)\exp\int_s^0 R_y'(x,Y(x,s,\mu),\mu)dx,$$

то $(f_1)_s'(0,X_0+\mu H)=-R(0,0,\mu)$. Производные $(f_i)_s'(s,X_0+\mu H)=(f_i)_s'(s,X_0)$, $i=2,...,n$, не зависят от μ. Поэтому

$$g(X_0+\mu H)=-(f_n)_s'(0,X_0)\cdots(f_2)_s'(0,X_0)R(0,0,\mu)-1.$$

Но тогда $g'(X_0)H=\frac{d}{d\mu}\Big|_{\mu=0} g(X_0+\mu H)=-(f_n)_s'(0,X_0)\cdots(f_2)_s'(0,X_0)<0$, то есть $g'(X_0)\neq 0$. Отсюда следует, что $\overline{B}_1$ является C^{r-1}-подмногообразием $\mathrm{X}^r(M,D)$ коразмерности один.

Открытость B_1 следует из непрерывности h. Докажем плотность B_1 в $\overline{B}_1$. Пусть $X_0\in\overline{B}_1\setminus B_1$. Возьмем теперь $H=(H^1,0,...,0)\in \mathrm{X}^r(M,D)$, где $H^1=xP\partial/\partial y$. Тогда $R=(Q/P)+\mu x$, $(f_1)_s'(0,X_0+\mu H)=(f_1)_s'(0,X_0)=-R(0,0,0)$, и при малых $\mu>0$ $g(X_0+\mu H)=g(X_0)=0$, то есть $X_0+\mu H\in\overline{B}_1$.

Из равенства

$$(f_1)''_{ss}(0, X_0 + \mu H) = Y''_{ss}(0,0,\mu) = -R'_x(0,0,\mu) + R'_y(0,0,\mu)R(0,0,\mu) =$$
$$= -R'_x(0,0,0) + R'_y(0,0,0)R(0,0,0) - \mu = (f_1)''_{ss}(0, X_0) - \mu$$

получаем

$$h(X_0 + \mu H) = h(X_0) - (f_n)'_s(0, X_0) \cdots (f_2)'_s(0, X_0)\mu .$$

Так как $h(X_0) = 0$, то при любом достаточно малом $\mu > 0$ $h(X_0 + \mu H) < 0$, то есть для $X_0 \in \overline{B}_1 \setminus B_1$ существует сколь угодно близкое поле $X_0 + \mu H \in B_1$.

Теорема 2. Пусть векторное поле $X_0 \in B_1$ и $h(X_0) < 0$ ($h(X_0) > 0$). Тогда для любой окрестности V_0 точки O существуют такие окрестность U_0 поля X_0 и окрестность $V \subset V_0$ точки O, что положительные (отрицательные) полутраектории поля $X \in U_0$, начинающиеся в точках $V \setminus \{O\}$, не выходят из V; при $g(X) = 0$ они входят в устойчивый (неустойчивый) фокус O за бесконечное время; при $g(X) < 0$ ($g(X) > 0$) они входят в устойчивый (неустойчивый) фокус O за конечное время; при $g(X) > 0$ ($g(X) < 0$) поле $X \in U_0$ имеет в V единственную периодическую траекторию, она устойчива (неустойчива), а точка O – неустойчивый (устойчивый) фокус, в который траектории входят за конечное время.

Рисунок 1 иллюстрирует утверждения теоремы при $n = 3$, $h(X_0) < 0$.

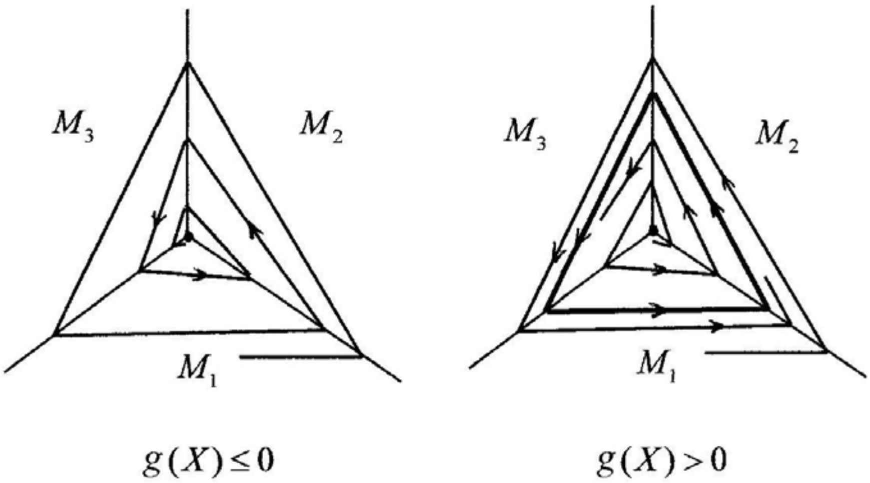

Рис. 1. Перестройки фазового портрета ($n = 3$, $h(X_0) < 0$)

Доказательство. Пусть $h(X_0) < 0$. Случай $h(X_0) > 0$ рассматривается аналогично. Так как $f'_s(0, X_0) = 1$ и $f''_{ss}(0, X_0) < 0$, то существует такое число $\delta > 0$, что $f(\delta, X) < \delta$, а $f''_{ss}(s, X_0) < 0$ для всех $s \in [0, \delta]$. Нетрудно построить окрестность V точки O, ограниченную простой замкнутой кривой Γ, пересекающей дугу $\eta_1(0, \delta]$ в единственной точке $\eta_1(\overline{s})$, $\overline{s} = f(\delta, X_0)$, и такую, что $\Gamma \cap M_i$, $i = 1, 2, ..., n$, являются гладкими дугами, в точках которых поле X_0^i трансверсально $\Gamma \cap M_i$ и направлено внутрь V. Если число δ выбрано достаточно малым, то окрестность V будет содержаться в заданной условиями теоремы окрестности V_0. Для некоторой окрестности $U_0 \subset U$ и любых $X \in U_0$, $s \in [0, \overline{s}]$ $f(\overline{s}, X) < \overline{s}$, $f''_{ss}(s, X) < 0$, а траектории поля X, начинающиеся в точках V, не выходят из V. Поскольку $f(0, X) = 0$, $g(X) = f'_s(0, X) - 1$, то имеем следующие утверждения. Если $g(X) \le 0$, то $f(s, X) < s$ для $s \in (0, \overline{s}]$, и потому все траектории, начинающиеся в точках дуги $\eta_1(0, \overline{s}]$, ω-предельны к устойчивому фокусу O. Если $g(X) > 0$, то существует такое $s_* \in (0, \overline{s})$, что $\operatorname{sgn}(f(s, X) - s) = \operatorname{sgn}(s_* - s)$ при всех $s \in (0, \overline{s}]$. Поэтому O – неустойчивый фокус, а все траектории, начинающиеся в точках дуги $\eta_1(0,\bar{s}]$, ω-предельны к устойчивой периодической траектории, проходящей через точку $\eta_1(s_*)$. Поскольку любая траектория поля X, начинающаяся в точках V, пересекает дугу $\eta_1(0,\bar{s})$, то получаем все утверждения теоремы, кроме относящихся ко времени входа в точку O.

В координатах (x,y), определенных в доказательстве теоремы 1, $X^1(x,y)=P(x,y,X)\partial/\partial x+Q(x,y,X)\partial/\partial y$, где P и Q – C^r-функции. Так как $X_0\in \mathrm{X}^r_+(M,D)$, то $P(0,0,X_0)<0$. Пусть $a:=-2P(0,0,X_0)>0$, $b:=-f''_{ss}(0,X_0)>0$. Мы можем считать что число $\bar{s}$, окрестности U_0 и V выбраны столь малыми, что $\forall X\in U_0$ $\forall(x,y)\in V$ $\forall s\in[0,\bar{s}]$ $-a\le P(x,y,X)\le -a/4<0$, $-b\le f''_{ss}(s,X)/2<0$.

Пусть $g(X)=0$. Рассмотрим последовательность (s_n), где $s_0\in(0,\bar{s})$, $s_n=f(s_{n-1},X)$ при $n\in\mathbf{N}$. Ясно, что $s_n\downarrow 0$. Обозначим τ_n время перехода по траектории поля X^1 от точки дуги L_1 с координатами $(s_n,0)$ до точки на дуге L_2 и t_n – время перехода по траектории поля X между точками L_1 с координатами $(s_n,0)$ и $(s_{n+1},0)$. Из неравенства $-a\le P(x,y,X)<0$ следует, что $\tau_n\ge a^{-1}s_n$ и, тем более, $t_n\ge a^{-1}s_n$. Так как $f'_s(0,X)=1$, $-b\le f''_{ss}(s,X)/2<0$, то из формулы Тейлора имеем при всех $k\in\mathbf{N}$ $s_{k+1}\ge s_k-bs_k^2$. Выберем $m\in\mathbf{N}$ так, чтобы $c=1-bs_m>0$. Тогда при $k\ge m$ $s_{k+1}\ge cs_k$, $s_{k+1}\ge s_k-bc^{-1}s_ks_{k+1}$, $s_k\ge cb^{-1}\left(\dfrac{s_k}{s_{k+1}}-1\right)$. Используя неравенство $x-1\ge\ln x$, получаем $s_k\ge cb^{-1}\ln(s_k/s_{k+1})$. Но тогда

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n}t_k\ge a^{-1}\sum\nolimits_{k=m}^{n}s_k\ge c(ab)^{-1}\ln(s_m/s_n)\quad\text{и}\quad \lim_{n\to\infty}\sum\nolimits_{k=0}^{n}t_k=\infty.$$

Поэтому точка траектории не может за конечное время попасть в точку O.

Пусть $g(X)<0$, то есть $0<f'_s(0,X)<1$. Мы можем считать, что для $s\in(0,\bar{s})$ $0<f'_s(s,X)\le q<1$. Пусть L – положительная полутраектория поля X, начинающаяся в точке $\eta_1(s_0)$. Тогда суммарное время движения по дугам L, лежащих в $M_1\setminus\{O\}$, конечно: $\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\tau_k\le 4a^{-1}s_0\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}q^k\le 4a^{-1}s_0/(1-q)$. Аналогично получаем, что конечно суммарное время движения по дугам L, лежащих в $M_i\setminus\{O\}$, $i=2,...,n$. Поэтому любая траектория поля X входит в O за конечное время. В случае $g(X)>0$ рассуждения аналогичны.

Примечания:

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. Piecewise smooth dynamical systems / M. di Bernardo, Ch.J. Budd, A.R. Capneys, P. Kowalczyk // Appl. Math. Sci. London: Springer, 2008. Vol. 163. 483 p.
3. Ройтенберг В.Ш. О рождении устойчивых замкнутых траекторий разрывных векторных полей // Математика и математическое образование. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2002. Вып. 3. С. 19–23.
4. Ройтенберг В.Ш. О рождении устойчивой замкнутой траектории из гомоклинической траектории седла кусочно-гладкого векторного поля // Ярославский педагогический вестник. 2013. Т. III (естественные науки), № 4. С. 44–49.
5. Ройтенберг В.Ш. Об одной бифуркации трехмерных кусочно-гладких векторных полей // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки.

References:

1. Filippov A.F. Differential equations with a discontinuous right-hand side. M.: Nauka, 1985. 224 pp.
2. Piecewise smooth dynamical systems / M. di Bernardo, Ch.J. Budd, A.R. Capneys, P. Kowalczyk // Appl. Math. Sci. London: Springer, 2008. Vol. 163. 483 pp.
3. Roytenberg V.Sh. On the generation of stable closed orbits of discontinuous vector fields // Mathematics and mathematical education. Theory and practice: inter-higher school coll. of scient. works. Iss. 3. Yaroslavl: YaSTU Publishing House, 2002. P. 19–23.
4. Roytenberg V.Sh. On the birth of a stable closed trajectory from a homoclinic trajectory of a saddle of a piecewise smooth vector field // Yaroslavl Pedagogical Bulletin. 2013. Vol. 3 (Natural Sciences), No. 4. P. 44–49.
5. Roytenberg V.Sh. On a bifurcation of theedimensional piecewise smooth vector fields // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2014. Iss.

2014. Вып. 1 (133). С. 16–23. URL: http://vestnik.adygnet.ru

6. Ройтенберг В.Ш. О рождении предельных циклов из контура, образованного сепаратрисами седла и сшитого седло-узла кусочно-гладкого векторного поля // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2014. Т. 20, № 2. С. 26–30.
7. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях сшитого тройного цикла // Математика и математическое образование. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2014. Вып. 9. С. 54–67.
8. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях контура, состоящего из особых точек на линиях разрыва векторного поля и их сепаратрис // Труды XII международных Колмогоровских чтений: сб. ст. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2014. С. 121–126.
9. Ройтенберг В.Ш. О рождении периодических траекторий из особой точки кусочно-гладкого векторного поля // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2015. № 7-1. С. 11–16.

1 (133). P. 16–23. URL: http://vestnik.adygnet.ru

6. Roytenberg V.Sh. On the generation of limit cycles out of a contour formed by separatrixes of a saddle and a sewn saddle-node of a piecewise smooth vector field // Bulletin of Kostroma State University named after N.A. Nekrasov. 2014. Vol. 20, No. 2. P. 26–30.
7. Roytenberg V.Sh. On bifurcations of a sewn triple cycle // Mathematics and mathematical education. Theory and practice: inter-higher school coll. of scient. works. Yaroslavl: YaSTU Publishing House, 2014. Iss. 9. P. 54–67.
8. Roytenberg V.Sh. On bifurcations of a contour formed by singular points on lines of discontinuity of a vector field and them separatrixes // Proceedings of 12th International Kolmogorov Readings: coll. of paper. Yaroslavl: YaSPU Publishing House, 2014. P. 121–126.
9. Roytenberg V.Sh. On the generation of a periodic trajectory out of a singular point of a piecewise smooth vector field // Actual problems of the humanities and natural sciences. 2015. No. 7-1. P. 11–16.