УДК 517.926
ББК 22.161.61
С 78

Сташ А.Х.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593905, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

Свойства главных полных и векторных частот строгих знаков линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка

(Рецензирована)

Аннотация. *Изучается непрерывность в смысле равномерной топологии главных полных (векторных) частот строгих смен знаков на множестве линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка с ограниченными коэффициентами. Установлено существование точек, в которых каждый из этих функционалов не является инвариантным относительно бесконечно малых возмущений.*

Ключевые слова: *линейное дифференциальное уравнение, колеблемость решения, число нулей функции, полная частота, векторная частота.*

Stash A.Kh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593905, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

Properties of the main complete and vector frequencies of rigorous signs of the linear homogeneous third order differential equations

Abstract. *The paper examines the continuity in terms of the uniform topology of the main complete (vector) frequencies of rigorous changes of signs on a set of the simple homogeneous differential equations of the third order with restricted coefficients. Existence of points in which each of these functionals is not invariant respectively infinitesimal indignations is established.*

Keywords: *the simple differential equation, decision variability, number of zero function, complete frequency, vector frequency.*

Введение и формулировка результата

Для заданного натурального n обозначим через E^n множество линейных однородных уравнений n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \qquad t \in R^+ \equiv [0;\infty),$$

с ограниченными непрерывными коэффициентами $a_1,\ldots,a_n : R^+ \to R$, образующими строку $a \equiv (a_1,\ldots,a_n)$ (каждую такую строку будем отождествлять с соответствующим уравнением). Через C^n обозначим подмножество множества E^n, состоящее из уравнений с постоянными коэффициентами. Пространство всех решений $y : R^+ \to R$ уравнения $a \in E^n$ обозначим через $S(a)$, а подмножество всех его ненулевых решений – через $S_*(a)$. В дальнейшем вообще звездочкой в качестве нижнего индекса у линейного пространства будем обозначать факт выкалывания в нем нуля.

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит строгая смена знака функции $y : R^+ \to R$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Для заданных векторов $\psi y \equiv \left(y, \dot{y},\ldots, y^{(n-1)}\right)$, $m \in R^n_*$ и момента времени $t > 0$ под величиной $\nu^-(y,m,t)$ будем понимать число строгих смен знака при $\tau \in (0,t]$ скалярного произведения $\langle \psi y(\tau), m \rangle$.

Определение 2 [2, 3]**.** Каждому решению $y\in S_*(a)$ уравнения $a\in E^n$ поставим в соответствие его нижнюю (верхнюю) полную и векторную частоты строгих знаков

$$\breve{\sigma}^-(y)=\inf_{m\in R_*^n}\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^-(y,m,t)\qquad\left(\widehat{\sigma}^-(y)=\inf_{m\in R_*^n}\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^-(y,m,t)\right),$$

$$\breve{\zeta}^-(y)=\underline{\lim}_{t\to\infty}\inf_{m\in R_*^n}\frac{\pi}{t}\nu^-(y,m,t)\qquad\left(\widehat{\zeta}^-(y)=\overline{\lim}_{t\to\infty}\inf_{m\in R_*^n}\frac{\pi}{t}\nu^-(y,m,t)\right).$$

В случае совпадения какой-либо нижней частоты решения $y\in S_*(a)$ с верхней одноименной будем называть ее точной и обозначать соответственно $\zeta^-(y),\ \sigma^-(y)$.

К определениям 1 и 2 добавим обозначение $\nu^-(y,m,t,s)\equiv\nu^-(y,m,t)-\nu^-(y,m,s)$.

Определение 3 [2, 3]**.** При любом $\omega=\widehat{\zeta}^-,\widehat{\sigma}^-,\breve{\zeta}^-,\breve{\sigma}^-$ определим главные (характеристические) частоты строгих знаков линейного уравнения $a\in E^n$ формулами

$$\omega_{\bar{i}}(a)=\inf_{L\in G_*^i(a)}\sup_{y\in L}\omega(y),\qquad \omega_{\underline{i}}(a)=\sup_{L\in G_*^{n-i+1}(a)}\inf_{y\in L}\omega(y),$$

где $i=1,\ldots,n,$ а через $G_*^i(a)$ обозначено множество i-мерных подпространств пространства $S(a)$, в которых выколота нулевая точка (нулевое решение).

В доказательстве теоремы VI [1] нигде не используются никакие свойства функционала v, кроме равенства

$$v(cy)=v(y),\qquad c\neq 0. \tag{1}$$

Поэтому в этой теореме могли бы фигурировать любые другие функционалы, обладающие свойством (1), в частности, для всех функционалов $\widehat{\zeta}^-,\widehat{\sigma}^-,\breve{\zeta}^-,\breve{\sigma}^-$ выполнены равенства (1). Следовательно, для любого уравнения $a\in E^n$ при любом $\omega=\widehat{\zeta}^-,\widehat{\sigma}^-,\breve{\zeta}^-,\breve{\sigma}^-$ справедливы соотношения:

$$0\le\omega_{\underline{1}}(a)\le\cdots\le\omega_{\underline{n}}(a),\qquad 0\le\omega_{\bar{1}}(a)\le\cdots\le\omega_{\bar{n}}(a), \tag{2}$$

$$\omega_{\underline{i}}(a)\le\omega_{\bar{i}}(a),\qquad i=1,\ldots,n, \tag{3}$$

$$\omega_{\underline{1}}(a)=\omega_{\bar{1}}(a)=\inf_{y\in S_*(a)}\omega(y),\qquad \omega_{\underline{n}}(a)=\omega_{\bar{n}}(a)=\sup_{y\in S_*(a)}\omega(y). \tag{4}$$

Величины (4) будем соответственно обозначать $\omega_1(a),\ \omega_n(a).$

При $n=2$ любое из неравенств (2), (3) обращается в равенство (4), но уже для уравнения третьего порядка каждое из этих неравенств может оказаться строгим, причем практически независимо друг от друга.

Теорема 1. Существуют уравнения $d_1,d_2,d_3,d_4\in E^3$, удовлетворяющие при каждом $\omega=\widehat{\zeta}^-,\widehat{\sigma}^-,\breve{\zeta}^-,\breve{\sigma}^-$ соотношениям

$$\omega_1(d_1)=\omega_{\underline{2}}(d_1)<\omega_{\bar{2}}(d_1)=\omega_3(d_1),\qquad \omega_1(d_2)<\omega_{\underline{2}}(d_2)=\omega_{\bar{2}}(d_2)<\omega_3(d_2),$$

$$\omega_1(d_3)=\omega_{\underline{2}}(d_3)<\omega_{\bar{2}}(d_3)<\omega_3(d_3),\qquad \omega_1(d_4)<\omega_{\underline{2}}(d_4)<\omega_{\bar{2}}(d_4)=\omega_3(d_4).$$

Каждую из главных частот линейного уравнения $a\in E^n$ рассмотрим как функционал на линейном топологическом пространстве E^n с естественными для функций линейными операциями и равномерной на R^+ топологией.

Определение 4 [5]**.** Для уравнения $a\in E^n$ обозначим через $\mathrm{B}(a)$ множество уравнений $b\in E^n$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{t\to\infty}\left|b(t)-a(t)\right|=0,$ при котором возмущение $b-a$ назовем бесконечно малым. Будем говорить, что функция $\omega:E^n\to R$ не инвариантна в точке $a\in E^n$

относительно бесконечно малых возмущений, если существует уравнение $b \in \mathrm{B}(a)$, удовлетворяющее условию $\omega(a) \neq \omega(b)$.

Главные частоты строгих знаков в пространстве E^2 непрерывны [4] и, будучи остаточными [5], инвариантны относительно бесконечно малых возмущений в каждой точке $a \in E^2$. Однако указанные их свойства не распространяются на пространство E^3.

Теорема 2. При любом $\omega = \hat{\zeta}^-, \hat{\sigma}^-, \breve{\zeta}^-, \breve{\sigma}^-$ каждый из функционалов $\omega_1, \omega_{\underline{2}}, \omega_{\overline{2}}, \omega_3 : E^3 \to R$ хотя бы в одной точке пространства E^3 не является ни непрерывной, ни полунепрерывной сверху, ни полунепрерывной снизу, ни даже инвариантной относительно бесконечно малых возмущений.

Вспомогательные утверждения

Лемма 1. Пусть последовательность положительных чисел $t_1 < t_2 < \ldots$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{p\to\infty} t_p = \infty, \qquad \lim_{p\to\infty} \frac{t_{p+1}}{t_p} = 1.$$

Тогда для любого решения $y \in S_*(a)$ любого уравнения $a \in E^n$ выполнены равенства

$$\breve{\sigma}^-(y) = \inf_{m\in R^n_*} \varliminf_{p\to\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^-(y,m,t_p), \qquad \hat{\sigma}^-(y) = \inf_{m\in R^n_*} \varlimsup_{p\to\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^-(y,m,t_p), \tag{5}$$

$$\breve{\zeta}^-(y) = \varliminf_{p\to\infty} \inf_{m\in R^n_*} \frac{\pi}{t_p} \nu^-(y,m,t_p), \qquad \hat{\zeta}^-(y) = \varlimsup_{p\to\infty} \inf_{m\in R^n_*} \frac{\pi}{t_p} \nu^-(y,m,t_p), \tag{6}$$

а при дополнительном условии $\lim\limits_{p\to\infty}\left(t_{p+1} - t_p\right) = \infty$ верно еще и следующее: если для некоторого числа $p \geq 0$ в пределах (5), (6) каждое из чисел t_p уменьшить на $T_p \leq pT$, а каждое из чисел $\nu^-(y,m,t_p)$ – на $\nu_p \leq pT$, то значение предела от этого не изменится.

Доказательство этой леммы сводится к повторению рассуждений, проведенных при доказательстве леммы 7 [1].

Определение 5 [5]**.** Для заданных множеств M и $F = \left\{f : R^+ \to M\right\}$ назовем функционал $\lambda : F \to R$ остаточным, если для любых функций $f, g \in F$, удовлетворяющих хотя бы при одном $t_0 \in R^+$ условию $f(t) = g(t), \quad t \geq t_0$, имеет место равенство $\lambda(f) = \lambda(g)$.

Лемма 2 [5]**.** Если остаточный функционал, определенный на E^n, полунепрерывен во всех точках в одном и том же смысле, то в любой точке $a \in E^n$ он инвариантен относительно бесконечно малых возмущений.

Лемма 3 [6]**.** Для любого уравнения $a \in E^n$ функционалы

$$\hat{\zeta}^-, \hat{\sigma}^-, \breve{\zeta}^-, \breve{\sigma}^- : S_*(a) \to R$$

являются остаточными.

Лемма 4. При любом $\mu_0 > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что для множества $M \equiv \left[\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon\right]$ некоторого числа $T_0 > 0$ и любой последовательности $k_1, k_2, \ldots \in N$ существует семейство уравнений $a_{\overline{\mu}} \in E^3$, зависящее от последовательности параметров $\overline{\mu} \equiv \left(\mu_1, \mu_2, \ldots\right) \in M^\infty$ и обладающее свойствами:

1) для каждой последовательности $\overline{\mu} \in M^\infty$ уравнение $a_{\overline{\mu}} \in E^3$ имеет набор решений y_1, y_2, y_3, удовлетворяющий при каждом $p \in N$ требованиям

$$(y_1,y_2,y_3)(t)=\begin{cases}\left(\mu_p e^{-t},\ e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t\right), & t_{p-1}+T_0\le t\le r_p,\\ \left(e^{-t}\sin t,\ \mu_p e^{-t},\ e^{-t}\cos t\right), & r_p+T_0\le t\le s_p,\\ \left(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t,\ \mu_p e^{-t}\right), & s_p+T_0\le t\le \tau_p,\\ \left(\cos 3t,\quad \sin 3t,\quad e^{-t}\right), & \tau_p+T_0\le t\le t_p,\end{cases}$$

где $t_0\equiv 0$, и при каждом $p=1,2,\ldots$ последовательно обозначено

$$r_p\equiv t_{p-1}+T_0+2\pi k_p,\quad s_p\equiv r_p+T_0+2\pi k_p,\qquad \tau_p\equiv s_p+T_0+2\pi k_p,\qquad t_p\equiv \tau_p+T_0+6\pi k_p;$$

2) для некоторой константы d при любом $\overline{\mu}\in M^\infty$ выполнена оценка $\|a_{\overline{\mu}}\|\le d$;

3) функции $a_{\overline{\mu}}$ дифференцируемы по t и непрерывны по каждому из параметров $\mu_p\in M$ равномерно по $(p,t)\in R^+\times N$.

Доказательство леммы 4 сводится к повторению рассуждений, проведенных при доказательстве леммы 4 [7].

Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1.

1. При каждом

$$\mu_0\in\left\{\sqrt{0{,}85},\ \frac{1}{10}\sqrt{\frac{85(1+\sqrt{5})}{2}},\ \sqrt{1{,}7}\right\}$$

для последовательности $k_1=1,\ k_2=2,\ldots$ построим семейство уравнений $a_{\overline{\mu}}\in E^3$, существование которого утверждается в лемме 4. Внесем в это уравнение следующие изменения. При любых фиксированных значениях $p\in N$, $\overline{\mu}\in M^\infty$ для фундаментальной системы решений уравнения $a_{\overline{\mu}}$ на каждом из промежутков

$$\left[t_{p-1},t_{p-1}+T_0\right],\quad \left[r_p,r_p+T_0\right],\quad \left[s_p,s_p+T_0\right],\quad \left[\tau_p,\tau_p+T_0\right] \tag{7}$$

построим интерполяционные многочлены Эрмита [8, с. 36–41]. Для этого на концах отрезков (7) задаем значения этих первоначальных решений вместе с их производными до третьего порядка включительно.

За счет корректного выбора дополнительных узлов интерполяции [8, с. 36–41] внутри каждого отрезка и дальнейшего неограниченного увеличения их числа последовательности интерполяционных многочленов Эрмита будут равномерно сходиться на заданном отрезке к соответствующим функциям (первоначальным решениям).

Выбираем число узлов настолько большим, чтобы внутри отрезков (7) соответствующие определители Вронского систем многочленов Эрмита были положительны. Тогда в уравнении $a_{\overline{\mu}}$ на каждом из рассматриваемых промежутков фундаментальную систему решений можно заменить соответствующей построенной системой многочленов Эрмита. При этом новое уравнение $b_{\overline{\mu}}\in E^3$ будет обладать всеми условиями 1)–3) леммы 4.

2. Зафиксируем произвольное $p\in N$ и для заданного решения $y\in S_*(b_{\overline{\mu}})$ вектора $m\in R^3_*$ обозначим

$$\nu^-(y,m,I_p)\equiv \nu^-(y,m,r_p,t_{p-1}+T_0)+\nu^-(y,m,s_p,r_p+T_0)+$$
$$+\nu^-(y,m,\tau_p,s_p+T_0)+\nu^-(y,m,t_p,\tau_p+T_0).$$

Пусть задано отображение $\varphi: R^3_*\to S_*(b_{\overline{\mu}})$, переводящее каждую ненулевую точку $c\equiv(c_1,c_2,c_3)\in R^3_*$ в решение

$$\varphi(c) = y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \in S_*(b_{\overline{\mu}}), \tag{8}$$

для которого обозначено

$$\kappa^-(c,m) \equiv \frac{\nu^0(y,m,I_p)}{12p}, \qquad \kappa^-(c) \equiv \inf_{m \in R_*^3} \kappa^-(c,m).$$

Заметим, что величина $\kappa^-(c,m)$ вообще не зависит от p, а зависит от векторов m и c (это видно из вида фундаментальной системы решений уравнения $b_{\overline{\mu}}$).

Покажем, что любое решение (8) удовлетворяет равенствам

$$\hat{\zeta}^-(y) = \hat{\sigma}^-(y) = \breve{\zeta}^-(y) = \breve{\sigma}^-(y) = \kappa^-(c). \tag{9}$$

3. Последовательность

$$t_0 \equiv 0, \quad t_p = t_{p-1} + 6T_0 + 12\pi p, \; p \in N,$$

удовлетворяет условиям $\lim\limits_{p\to\infty} t_p = \infty, \; \lim\limits_{p\to\infty}(t_p - t_{p-1}) = \infty$, а значит, обладает свойством

$$\lim_{p\to\infty} \frac{t_p}{t_{p-1}} = 1 + \lim_{p\to\infty} \frac{6T_0 + 12\pi}{t_{p-1}} + 12\pi \cdot \lim_{p\to\infty} \frac{p-1}{t_{p-1}} = 1.$$

4. Известно, что число корней алгебраического многочлена не превосходит его степени. Поэтому найдется такое число T, что для любого решения $y \in S_*(b_{\overline{\mu}})$ функция $\langle \psi y, m \rangle$ (при любом $m \in R_*^3$) имеет на любом промежутке вида (7) не более чем T строгих смен знака. Следовательно, при использовании формул для частот (см. лемму 1) можно не брать в расчет как полуинтервал $(0;T_0]$, так и при любом $p \in N$ полуинтервалы

$$(t_{p-1}, t_{p-1} + T_0], \quad (r_p, r_p + T_0], \quad (s_p, s_p + T_0], \quad (\tau_p, \tau_p + T_0],$$

на каждом из которых оно имеет не более чем T строгих смен знака.

Таким образом, для ненулевых решений построенного уравнения имеют место следующие соотношения:

$$\breve{\zeta}^-(y) = \varliminf_{p\to\infty} \inf_{m \in R_*^3} \frac{\pi}{t_p} \nu^-(y,m,t_p) = \varliminf_{p\to\infty} \inf_{m \in R_*^3} \frac{\pi \sum\limits_{i=1}^{p} \nu^-(y,m,I_i)}{\sum\limits_{i=1}^{p} 12\pi i} =$$

$$= \varliminf_{p\to\infty} \inf_{m \in R_*^3} \frac{12\pi(1\cdot\kappa^-(c,m) + 2\cdot\kappa^-(c,m) + \ldots + p\cdot\kappa^-(c,m))}{12\pi(1+2+\ldots+p)} = \inf_{m \in R_*^3} \kappa^-(c,m) = \kappa^-(c),$$

$$\breve{\sigma}^-(y) = \inf_{m \in R_*^3} \varliminf_{p\to\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^-(y,m,t_p) \le \varliminf_{p\to\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^-(y,m_c,t_p) = \kappa^-(c).$$

Аналогичные равенства и неравенства справедливы соответственно для верхних частот, поэтому выполняются равенства (9), на основании которых с учетом изоморфизма $\varphi : R_*^3 \to S_*(b_{\overline{\mu}})$ главные частоты строгих знаков семейства уравнений $b_{\overline{\mu}} \in E^3$ можно вычислять по формулам

$$\omega_1(b_{\overline{\mu}}) = \inf_{c \in R_*^3} \kappa^-(c), \qquad \omega_3(b_{\overline{\mu}}) = \sup_{c \in R_*^3} \kappa^-(c), \qquad \omega = \zeta^-, \sigma^-, \tag{10}$$

$$\omega_{\overline{2}}(b_{\overline{\mu}}) = \inf_{L \in G_*^3} \sup_{c \in L} \kappa^-(c), \qquad \omega_{\underline{2}}(b_{\overline{\mu}}) = \sup_{L \in G_*^3} \inf_{c \in L} \kappa^-(c), \qquad \omega = \zeta^-, \sigma^-, \tag{11}$$

где G_*^2 – множество двумерных подпространств пространства R^3, в которых выколот нулевой вектор.

5. Найдем возможные значения величины $\kappa^-(c)$ при каком-либо фиксированном значении p, для других значений p эти величины не будут меняться. Для этого в зависимости

от вектора $c \in R_*^3$ укажем такой вектор $m \in R_*^3$, при котором функция $\langle \psi y, m \rangle$ имеет наименьшее общее число строгих смен знака на промежутках

$$(t_{p-1} + T_0, r_p], \quad (r_p + T_0, s_p], \quad (s_p + T_0, \tau_p], \quad (\tau_p + T_0, t_p].$$

Минимум в определении величины $\kappa^-(c)$ реализуется на векторе $m_1 = (9,0,1)$. В самом деле, на промежутке $(\tau_p + T_0, t_p]$ функция $\langle \psi y, m \rangle$ при $m = m_1$ тождественно равна нулю или отделена от нуля, так как выполняются

$$\langle \psi(\cos 3t), m_1 \rangle = \langle \psi(\sin 3t), m_1 \rangle = 0, \quad \langle \psi(e^{-t}), m_1 \rangle = 10e^{-t} > 0, \quad t \in R,$$

а значит, $v(y, m, t_p, \tau_p + T_0) = 0.$

Теперь для вычисления $\kappa^-(c)$ остается посчитать число строгих смен знака функции $\langle \psi y, m_1 \rangle$ на каждом из промежутков

$$(t_{p-1} + T_0, r_p], \quad (r_p + T_0, s_p], \quad (s_p + T_0, \tau_p]. \tag{12}$$

На том из трех промежутков (12), на котором $y_i(t) = \mu_p e^{-t}$, функция $\langle \psi y, m_1 \rangle$ представима в виде

$$\langle \psi y, m_1 \rangle = e^{-t} \sqrt{85\left(c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2\right)} \sin(t + \theta) + 10 c_i \mu_p e^{-t},$$

где $\theta \in R$ – вспомогательный угол. Умножив эту функцию на $\dfrac{e^t}{\sqrt{85}}$, будем иметь

$$\frac{e^t \langle \psi y, m_1 \rangle}{\sqrt{85}} = \sqrt{c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2} \sin(t + \theta) + c_i \frac{10\mu_p}{\sqrt{85}}.$$

Обозначив $\rho_p = \dfrac{10\mu_p}{\sqrt{85}}$, из неравенства $\sqrt{0{,}425} < \mu_p \le \sqrt{1{,}7}$ получим $\sqrt{2}/2 < \rho_p \le \sqrt{2}$.

Пусть для вектора $c \in R_*^3$ и номера $i \in \{1, 2, 3\}$ выполнено условие

$$c_i^2 \rho_p^2 > c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2 \tag{13}$$

(здесь и всюду ниже индекс 0 отождествлен с индексом 3, а индекс 4 – с индексом 1). Тогда имеет место оценка $\sqrt{c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2} < |c_i \rho_p|$, гарантирующая отсутствие строгих смен знака у функции $\langle \psi y, m_1 \rangle$ на рассматриваемом промежутке.

Аналогично, при условии $c_i^2 \rho_p^2 < c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2$ на упомянутом промежутке функция $\langle \psi y, m_1 \rangle$ имеет $2p$ строгих смен знака, а при условии $c_i^2 \rho_p^2 = c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2$ – ни одной.

Следуя И.Н. Сергееву, обозначим через V_i подмножество пространства R_*^3, состоящее из точек, удовлетворяющих неравенству (13) и представляющее собой в пространстве R_*^3 круглый конус (точнее, его внутренность, каковую и будем подразумевать в дальнейшем под словом конус), ось которого совпадает с i-й осью координат.

Через $U_{i,j} \subset R_*^3$ обозначим множество точек, принадлежащих ровно i из трех конусов V_1, V_2, V_3 и при этом лежащих на границе ровно j из оставшихся. Тогда для величины κ^- справедливы равенства

$$\kappa^-(c) = \begin{cases} 0, & c \in U_{3,0} \cup U_{2,1} \cup U_{1,2} \cup U_{0,3}, \\ 1/6, & c \in U_{1,1} \cup U_{2,0} \cup U_{0,2}, \\ 1/3, & c \in U_{0,1} \cup U_{1,0}, \\ 1/2, & c \in U_{0,0}, \end{cases} \tag{14}$$

причем здесь перечислены все возможные значения этой величины.

6. Проследим за изменением множества значений κ^- при изменении последовательности $\overline{\mu} \in M^\infty$.

6.1) Если $\sqrt{2}/2 < \rho_p < 1$ при любом $p \in N$, то никакие два из конусов V_1, V_2 и V_3 не имеют общих точек, даже граничных (см. п. 4.А доказательства леммы 16 [1]). Поэтому непустыми являются только множества $U_{0,0}$, $U_{0,1}$, $U_{1,0}$, а значит, учитывая равенства (14), искомое множество значений оказывается следующим: $E(\kappa^-) = \{1/3,\ 1/2\}$.

6.2) Если $\rho_p = 1$ при любом $p \in N$, то конусы V_1, V_2 и V_3 только касаются друг друга, причем только попарно, и все точки касания лежат на шести конкретных прямых (см. п. 4.Б доказательства леммы 16 [1]). Следовательно, к предыдущему списку непустых множеств добавляется лишь одно множество $U_{0,2}$, а значит имеем $E(\kappa^-) = \{1/6, 1/3, 1/2\}$.

6.3) Если $1 < \rho_p < \sqrt{2}$ при любом $p \in N$, то конусы уже попарно пересекаются, но не имеют общих для них всех точек, даже граничных (см. п. 4.В доказательства леммы 16 [1]). При этом также и граница любого конуса пересекается с любым другим конусом, как и с его границей.

В этом случае к предыдущему списку непустых множеств добавляются еще два множества $U_{2,0}$ и $U_{1,1}$, поэтому $E(\kappa^-) = \{1/6, 1/3, 1/2\}$.

6.4) Если $\rho_p = \sqrt{2}$ при любом $p \in N$, то пересечение всех трех конусов пусто, но имеются общие граничные точки всех трех конусов (см. п. 4.Г доказательства леммы 16 [1]). Аналогично, дополнение к объединению все трех конусов состоит лишь из точек, удовлетворяющих условию

$$|c_1| = |c_2| = |c_3|. \tag{15}$$

Более того, любая граничная точка любого конуса, отличная от точек, удовлетворяющих условию (15), обязательно принадлежит другому конусу, но не принадлежит даже замыканию третьего.

Таким образом, к предыдущему списку непустых множеств добавляются еще множество $U_{3,0}$, но из списка выпадают множества $U_{0,0}$, $U_{0,1}$ и $U_{0,2}$, поэтому $E(\kappa^-) = \{0,\ 1/6, 1/3\}$.

7. Проследим за наименьшим значением $\overline{\kappa}(C) = \sup_{c \in C} \kappa^-(c)$, где $C \in G_*^2$, при изменении последовательности $\overline{\mu} \in M^\infty$.

Понятно, что при любом $\rho_p \in \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}\right]$ любая плоскость из множества G_*^2 выходит за пределы любого из конусов V_1, V_2 и V_3, даже его замыкания.

7.1) Поэтому если $\rho_p < 1$ при любом $p \in N$, то любая плоскость $C \in G_*^2$ содержит точки c множества $U_{0,0}$, в которых $\kappa(c) = 1/2$, следовательно, $\overline{\kappa}(C) = 1/2$ – это и есть наименьшее значение (см. п. 4.Д доказательства леммы 16 [1]).

7.2) Если $\rho_p = 1$ при любом $p \in N$, то сохраняется тот же вывод для всех плоскостей, кроме трех конкретных, которые проходят через пары осей координат и на которых реализуется искомый минимум обеих исследуемых величин. Такие плоскости – назовем их координатными – состоят из точек двух множеств $U_{1,0}$ и $U_{0,2}$, поэтому для любой такой плоскости, скажем C_1, справедливы равенства $\overline{\kappa}(C_1) = 1/3$ (см. п. 4.Е доказательства леммы 16 [1]).

7.3) Те же равенства сохраняются и при $1 < \rho_p \le \sqrt{2}$, $p \in N$, когда все точки плоскости C_1 состоят из точек трех множеств $U_{1,0}$, $U_{0,2}$ и $U_{1,1}$. Сохраняются и прежние наименьшие значения обеих величин, так как для любой плоскости $C \in G_*^2$, как и для трех координатных, имеем $\overline{\kappa}(C_1) \geq 1/3$, поскольку при $\sqrt{2}/2 < \rho_p \leq \sqrt{2}$, $p \in N$, она обязательно проходит через точки множества $U_{1,0}$ (см. п. 4.Е доказательства леммы 16 [1]).

8. Проследим за наибольшими значениями $\underline{\kappa}(C) = \inf\limits_{c \in C} \kappa^-(c)$, где $C \in G_*^2$, при изменении последовательности $\overline{\mu} \in M^\infty$.

8.1) Если $\sqrt{2}/2 < \rho_p < \mu^* \equiv \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ при любом $p \in N$, то для конкретной плоскости C_2, проходящей через точки $(1{,}0{,}0)$, $(1{,}1{,}1)$ и состоящей из точек множеств $U_{0,0}$, $U_{0,1}$ и $U_{1,0}$, выполняется $\underline{\kappa}(C_2) = 1/3$ (см. п. 4.З доказательства леммы 16 [1]).

Любая из остальных плоскостей C, как было доказано в п. 7.2) настоящего доказательства, обязательно проходит и через точки множества $U_{1,0}$, поэтому $\underline{\kappa}(C) \leq 1/3$ и значение $1/3$ – наибольшее.

8.2) Если $\rho_p = \mu^*$ при любом $p \in N$, то плоскость C_2 будет касаться конуса V_3 и проходить через граничную точку обоих конусов V_1 и V_2 сразу. Эта плоскость состоит из точек множеств $U_{1,0}$, $U_{1,1}$ и $U_{0,2}$, поэтому $\underline{\kappa}(C_2) = 1/6$. Последнее значение является наибольшим, так как любая другая плоскость $C \in G_*^2$ удовлетворяет неравенствам $\underline{\kappa}(C) \leq 1/6$, поскольку проходит, в частности, через точки множества $U_{2,0}$ (см. п. 4.И доказательства леммы 16 [1]).

8.3) Описанным только что свойством при $\mu^* < \rho_p \leq \sqrt{2}$ обладает уже любая плоскость $C \in G_*^2$ вообще, поэтому наибольшее значение равно $1/6$ и реализуется оно, например, на плоскости C_2, содержащей точки множества $U_{2,0}$ и не содержащей точек множеств $U_{2,1}$ и $U_{3,0}$ (см. п. 4.К доказательства леммы 16 [1]).

9. Собирая полученные в пп. 6–8 настоящего доказательства и воспользовавшись формулами (10), (11), при каждом $\omega = \zeta^-, \sigma^-$ получим:

$$\frac{1}{3} = \omega_1(d_1) = \omega_{\underline{2}}(d_1) < \omega_{\overline{2}}(d_1) = \omega_3(d_1) = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{6} = \omega_1(d_2) < \frac{1}{3} = \omega_{\underline{2}}(d_2) = \omega_{\overline{2}}(d_2) < \omega_3(d_2) = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{6} = \omega_1(d_3) = \omega_{\underline{2}}(d_3) < \frac{1}{3} = \omega_{\overline{2}}(d_3) < \omega_3(d_3) = \frac{1}{2},$$

$$0 = \omega_1(d_4) < \frac{1}{6} = \omega_{\underline{2}}(d_4) < \omega_{\overline{2}}(d_4) = \omega_3(d_4) = \frac{1}{3},$$

где в качестве уравнения d_1 берется уравнение из семейства $b_{\overline{\mu}} \in E^3$ при

$$\sqrt{0{,}425} < \mu_p < \sqrt{0{,}85} \quad \forall p \in N;$$

в качестве уравнения d_2 – уравнение из семейства $b_{\overline{\mu}} \in E^3$ при $\mu_p = \sqrt{0{,}85} \quad \forall p \in N;$

в качестве уравнения d_3 – уравнение из семейства $b_{\overline{\mu}} \in E^3$ при $\mu_p = \dfrac{1}{10}\sqrt{\dfrac{85(1+\sqrt{5})}{2}} \quad \forall p \in N;$

в качестве уравнения d_4 – уравнение из семейства $b_{\overline{\mu}} \in E^3$ при $\mu_p = \sqrt{1{,}7} \quad \forall p \in N.$

Теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2.

Теперь укажем точки разрыва младших частот на множестве E^3. Примером точки разрыва для функции ω_1 и ω_3 служит уравнение d_4 из построенного в теореме 1 семейства, взятое при постоянной последовательности $\mu_1 = \mu_2 = ... = \sqrt{1,7}$, в котором $\omega_1\left(d_4\right) = 0,\ \ \omega_3\left(d_4\right) = 1/3$.

В самом деле, в любой окрестности этого уравнения (в силу непрерывности семейства уравнений по $\overline{\mu}$) найдется возмущенное уравнение $b_{\overline{\mu}}$ из того же семейства, но попадающее под пункт 6.3) доказательства теоремы 1, а значит, удовлетворяющее равенству $\omega_1(b_{\overline{\mu}}) = 1/6, \quad \omega_3(b_{\overline{\mu}}) = 1/2$.

Кроме того, если возмущенное уравнение $b_{\overline{\mu}}$ подчинить дополнительному условию $\mu_p \to \sqrt{1,7}$ при $p \to \infty$, то для него помимо указанных равенств будет выполнено условие $b_{\overline{\mu}} \in \mathrm{B}(d_4)$, из которого следует, что функционалы ω_1, ω_3 не инвариантны в точке d_4 относительно бесконечно малых возмущений, а значит, в силу лемм 2 и 3 они не являются полунепрерывными функциями ни сверху, ни снизу.

Аналогично примером точки разрыва и неинвариантности относительно бесконечно малых возмущений для функции $\omega_{\overline{2}}$ служит уравнение d_2 (из доказательства теоремы 1), а для функции $\omega_{\underline{2}}$ – уравнение d_3 (из доказательства теоремы 1).

Теорема 2 полностью доказана.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

Примечания:

1. Сергеев И.Н. Определения и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
2. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1577.
3. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 1. С. 119–138.
4. Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика и механика. 2011. № 6. С. 21–26.
5. Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.
6. Сташ А.Х. О существовании линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами полной и векторной частот // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2013. Вып. 3 (122). С. 9–17. URL: http://vestnik.adygnet.ru
7. Сташ А.Х. О разрывности младших частот нулей и корней на множестве линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2016. Вып. 1 (176). С. 17–24. URL: http://vestnik.adygnet.ru
8. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

References:

1. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of the linear equation // Works of Seminar of I.G. Petrovsky. 2006. Iss. 25. P. 249–294.
2. Sergeev I.N. Determination of full frequencies of solutions of the linear equation // Differential Equations. 2008. Vol. 44, No. 11. P. 1577.
3. Sergeev I.N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems // Mathematical Collection. 2013. Vol. 204, No. 1. P. 119–138.
4. Sergeev I.N. Unsteadiness and roaming of solutions of the second order differential equation // Bulletin of Moscow University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. 2011. No. 6. P. 21–26.
5. Sergeev I.N. On the theory of Lyapunov indices of linear systems of differential equations // Works of the Seminar of I.G. Petrovsky. 1983. Iss. 9. P. 111–166.
6. Stash A.Kh. On existence of third-order linear differential equation with continuous ranges of complete and vector frequencies // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2013. Iss. 3 (122). P. 9–17. URL: http://vestnik.adygnet.ru
7. Stash A.Kh. On discontinuity of lower zero and root frequencies on a set of third order linear homogeneous differential equations // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2016. Iss. 1 (176). P. 17–24. URL: http://vestnik.adygnet.ru
8. Kalitkin N.N. Numerical methods. M.: Nauka, 1978. 512 pp.