**УДК 514.76**
**ББК 22.1**
**Р 89**

**Рустанов А.Р.**
*Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и специальной социологии Института социально-гуманитарного образования Московского педагогического государственного университета, Москва, e-mail: aligadzhi@yandex.ru*
**Харитонова С.В.**
*Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии и компьютерных наук Оренбургского государственного университета, Оренбург, e-mail: hcb@yandex.ru*

# $NC_{10}$-многообразия класса $R_1$

*(Рецензирована)*

***Аннотация.*** *Показано, что вполне интегрируемая $NC_{10}$-структура является точнейше косимплектической. Получено тождество римановой кривизны почти контактных метрических многообразий класса $NC_{10}$, названное первым дополнительным тождеством кривизны $NC_{10}$-многообразия. И на его основе выделен класс $NC_{10}$-многообразий, тензор римановой кривизны которых удовлетворяет условию $R(\xi,\Phi^2X)\xi=0$, $\forall X \in \mathrm{X}(M)$. Доказано, что выделенный класс многообразий совпадает с классом точнейше косимплектических многообразий, и получена локальная характеризация этого класса многообразий.*

***Ключевые слова:*** *косимплектическая структура, точнейше косимплектическое многообразие, келерово многообразие, тензор Римана-Кристоффеля, тождества Грея, $NC_{10}$-многообразие.*

**Rustanov A.R.**
*Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Theoretical and Express Sociology of Institute of Social Arts Education of the Moscow Pedagogical State University, Moscow, e-mail: aligadzhi@yandex.ru*
**Kharitonova S.V.**
*Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Geometry and Computer Science Department, Orenburg State University, Orenburg, e-mail: hcb@yandex.ru*

# Class $R_1$ $NC_{10}$ variety

***Abstract.*** *The paper shows that quite integrable $NC_{10}$ structure is most precisely cosymplectic. The identity of Riemannian curvature of almost contact metric varieties of $NC_{10}$ class called the first complementary identity of curvature of $NC_{10}$ variety has been obtained. On its basis the class of $NC_{10}$ varieties, the tensor of Riemannian curvature of which meets condition $R(\xi,\Phi^2X)\xi=0$, $\forall X \in \mathrm{X}(M)$, is allocated. The paper proves that the allocated class of varieties coincides with a class of most precisely cosymplectic varieties. The local characterization of this class of varieties has been obtained.*

***Keywords:*** *cosymplectic structure, most precisely cosymplectic variety, Kahlerian variety, tensor of Riemann Christoffel, identity of Gray, $NC_{10}$ variety.*

## Введение

В работе [1] введен новый класс почти контактных метрических многообразий, обобщающий класс косимплектических и класс точнейше косимплектических многообразий. Данная работа продолжает изучение этого класса многообразий. В пункте 1 напоминаются необходимые для дальнейшего исследования сведения о структурных уравнениях и структурных тензорах $NC_{10}$-многообразий [1]. Доказывается, что вполне интегрируемая $NC_{10}$-структура является точнейше косимплектической структурой. Кроме того, доказывается, что на интегральных подмногообразиях максимальной размерности вполне интегрируемого первого фундаментального распределения $NC_{10}$-многообразия индуцируется приближенно келерова структура. В пункте 2 исследуются свойства структурных тензоров. В пункте 3 получено первое дополнительное тождество тензора римановой кривизны $NC_{10}$-многообразий и на его основе выделен класс $NC_{10}$-многообразий и получена локальная классификация этого класса.

## 1. Определение почти контактных метрических многообразий класса $NC_{10}$

Пусть $M$ – гладкое почти контактное метрическое многообразие (коротко, $AC$-многообразие), размерности $2n+1$, $\mathbf{X}(M)$ – $C^{\infty}$-модуль гладких векторных полей на многообразии $M$. В дальнейшем все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса $C^{\infty}$.

**Определение 1.1** [1]. $AC$-структура, характеризуемая тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y+\nabla_Y(\Phi)X=\xi\nabla_X(\eta)\Phi Y+\xi\nabla_Y(\eta)\Phi X+\eta(X)\nabla_{\Phi Y}\xi+\eta(Y)\nabla_{\Phi X}\xi,\quad X,Y\in\mathbf{X}(M),\tag{1.1}$$

называется ***NC-структурой***. $AC$-многообразие, снабженное $NC_{10}$-структурой, называется ***$NC_{10}$-многообразием***.

Полная группа структурных уравнений $NC_{10}$-структуры на пространстве присоединенной $G$-структуры имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}
&1)\, d\omega=F_{ab}\omega^a\wedge\omega^b+F^{ab}\omega_a\wedge\omega_b;\\
&2)\, d\omega^a=-\theta^a_b\wedge\omega^b+C^{abc}\omega_b\wedge\omega_c+F^{ab}\omega_b\wedge\omega;\\
&3)\, d\omega_a=\theta^b_a\wedge\omega_b+C_{abc}\omega^b\wedge\omega^c+F_{ab}\omega^b\wedge\omega;\\
&4)\, d\theta^a_b+\theta^a_c\wedge\theta^c_b=\left(A^{ad}_{bc}-2C^{adh}C_{hbc}-F^{ad}F_{bc}\right)\omega^c\wedge\omega_d,
\end{aligned}\tag{1.2}$$

где

$$F_{ab}=-\sqrt{-1}\Phi^0_{a,b};\quad F^{ab}=\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat a,\hat b};\quad F_{ab}+F_{ba}=0;\quad F^{ab}+F^{ba}=0;\quad \overline{F^{ab}}=F_{ab};\quad C_{abc}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat a}_{b,c};$$

$$C^{abc}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat b,\hat c};\quad C_{abc}=C_{[abc]};\quad C^{abc}=C^{[abc]};\quad \overline{C^{abc}}=C_{abc};\quad A^{ad}_{[bc]}=A^{[ad]}_{bc}=0;$$

$$F_{ad}C^{dbc}=F^{ad}C_{dbc}=0.\tag{1.3}$$

Кроме того, имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&1)\, dF_{ab}-F_{cb}\theta^c_a-F_{ac}\theta^c_b=0;\\
&2)\, dF^{ab}+F^{cb}\theta^a_c+F^{ac}\theta^b_c=0;\\
&3)\, dC_{abc}-C_{dbc}\theta^d_a-C_{adc}\theta^d_b-C_{abd}\theta^d_c=C_{abcd}\omega^d;\\
&4)\, dC^{abc}+C^{cbd}\theta^a_d+C^{adc}\theta^b_d+C^{abd}\theta^c_d=C^{abcd}\omega_d,
\end{aligned}\tag{1.4}$$

где

$$C_{a[bcd]}=F_{a[b}F_{cd]};\qquad C^{a[bcd]}=F^{a[b}F^{cd]}.\tag{1.5}$$

Дифференцируя внешним образом вторую группу структурных уравнений (1.2.4), получим

$$dA^{ad}_{bc}+A^{hd}_{bc}\theta^a_h+A^{ah}_{bc}\theta^d_h-A^{ad}_{hc}\theta^h_b-A^{ad}_{bh}\theta^h_c=A^{ad}_{bch}\omega^h+A^{adh}_{bc}\omega_h,\tag{1.6}$$

где

$$A^{ad}_{b[ch]}=A^{a[dh]}_{bc}=0;\qquad A^{ad}_{b[c}C_{gf]d}=2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d};\qquad A^{a[d}_{bc}C^{gf]c}=2C_{hbc}C^{ah[d}C^{gf]c};$$

$$A^{ad}_{b[c}F_{|d|g]}=F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]};\qquad A^{a[d}_{bc}F^{|c|g]}=F_{bc}F^{a[d}F^{|c|g]}.\tag{1.7}$$

Назовем: тождество $F^{ad}C_{dbc}=0$ ***первым фундаментальным тождеством*** $NC_{10}$-структуры; тождество $A^{ad}_{b[c}C_{gf]d}=2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d}$ – ***вторым фундаментальным тождеством***; тождество $A^{ad}_{b[c}F_{|d|g]}=F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]}$ – ***третьим фундаментальным тождеством***.

**Предложение 1.1** [1]. $NC_{10}$-структура является: 1) точнейше косимплектической тогда и только тогда, когда второй структурный тензор равен нулю, то есть $F=0$; 2) структурой класса $C_{10}$ тогда и только тогда, когда первый структурный тензор равен нулю, то есть $C^{abc}=C_{abc}=0$; 3) косимплектической структурой тогда и только тогда, когда $C^{abc}=C_{abc}=0$, $F^{ab}=F_{ab}=0$.

Из (1.2) следует

**Теорема 1.1.** Вполне интегрируемая $NC_{10}$-структура является точнейше косимплектической структурой.

**Доказательство.** Почти контактная метрическая структура является вполне интегрируемой, если $d\eta \wedge \eta = 0$. Так как $\omega = \pi^*(\eta)$, $\pi$ – естественная проекция пространства присоединенной $G$-структуры на многообразие $M$, из первого уравнения системы (1.2) следует, что для того, чтобы первое фундаментальное распределение было вполне интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы слагаемые $F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b$ и $F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b$ были равны нулю. Значит, необходимо, чтобы обнулились коэффициенты $F_{ab}$ и $F^{ab}$. Согласно предложению 1.1 $NC_{10}$-структура является точнейше косимплектической структурой.■

Поскольку всякое точнейше косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую [2], то предыдущую теорему можно сформулировать в следующем виде.

**Теорема 1.2.** Вполне интегрируемая $NC_{10}$-структура локально эквивалентна произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

**Теорема 1.3.** Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях максимальной размерности вполне интегрируемого первого фундаментального распределения $NC_{10}$-многообразия, является приближенно келеровой структурой.

**Доказательство.** В предположении вполне интегрируемости первого фундаментального распределения уравнения $NC_{10}$-структуры примут вид:

$$\begin{aligned}
&1)\, d\omega = 0;\\
&2)\, d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + \delta^a_b \omega \wedge \omega^b;\\
&3)\, d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + \delta^b_a \omega \wedge \omega_b.
\end{aligned} \qquad (1.8)$$

С учетом того, что для $NC_{10}$-многообразий $B^{[abc]} = C^{[abc]} = C^{abc} = B^{abc}$ [1], находим, что в этом случае на интегральных подмногообразиях максимальной размерности индуцируется приближенно келерова структура.■

## 2. Структурные тензоры почти контактных метрических многообразий класса $NC_{10}$

Следуя [2], тензор $C = \{C^i{}_{jk}\}$, $C = \{C^i{}_{jk}\}$, $C^{\hat{a}}{}_{bc} = C_{abc}$; все прочие компоненты нулевые, назовем ***первым структурным тензором*** $NC_{10}$-структуры. Тензор $F = \{F^i{}_j\}$, $F^a{}_{\hat{b}} = F^{ab}$ $F^{\hat{a}}{}_b = F_{ab}$; все прочие компоненты нулевые, назовем ***вторым структурным тензором*** $NC_{10}$-структуры.

В [3] получены аналитические выражения для структурных тензоров $AC$-структуры. Получим аналитические выражения первого и второго структурных тензоров $NC_{10}$-структуры. Напомним аналитические задания структурных тензоров $AC$-структуры [3]:

$$1)\ B(X,Y) = -\frac{1}{8}\{\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) + \\ + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X)\};$$

$$2)\ C(X,Y) = -\frac{1}{8}\{-\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) + \\ + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X)\};$$

$$3)\ D(X) = \frac{1}{4}\{2\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\xi - 2\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi \circ \nabla_{\xi}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi^2 \circ \nabla_{\xi}(\Phi)(\Phi X)\};$$

4) $E(X) = -\frac{1}{2}\left\{\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\right\}$; (2.1)

5) $F(X) = \frac{1}{2}\left\{\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\right\}$;

6) $G = \Phi \circ \nabla_{\xi}(\Phi)\xi$.

Формулы (2.1) для $NC_{10}$-структуры примут вид:

1) $B(X,Y) = -\frac{1}{8}\{\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) + {}$
$+ \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X)\} = 0$;

2) $C(X,Y) = -\frac{1}{8}\{-\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) + {}$
$+ \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X)\}$;

3) $D(X) = \frac{1}{4}\{2\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\xi - 2\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - {}$
$- \Phi \circ \nabla_{\xi}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi^2 \circ \nabla_{\xi}(\Phi)(\Phi X)\} = -F(X)$;

4) $E(X) = -\frac{1}{2}\left\{\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\right\} = 0$; (2.2)

5) $F(X) = \frac{1}{2}\left\{\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\right\}$;

6) $G = \Phi \circ \nabla_{\xi}(\Phi)\xi = 0$.

Из (2.2:1) и (2.2:2) следует

$$C(X,Y) = -\frac{1}{4}\left\{\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X)\right\}. \tag{2.3}$$

Из (2.2:4) и (2.2:5) следует

$$F(X) = \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi = -\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi .$$

Из последнего равенства имеем $F(X) = -\Phi \circ \nabla_X(\Phi)\xi$. Поскольку для почти контактной метрической структуры $\Phi \circ \nabla_X(\Phi)\xi = \nabla_X \xi$, то окончательно получим:

$$F(X) = -\nabla_X \xi, \quad \forall X \in \mathbf{X}(M). \tag{2.4}$$

Структурные тензоры обладают свойствами, выраженными в следующем предложении.

**Предложение 2.1.** Структурные тензоры $NC_{10}$-структуры обладают следующими свойствами:

1) $\Phi \circ C(X,Y) = -C(\Phi X, Y) = -C(X, \Phi Y)$;

2) $C(X,\xi) = 0$;

3) $\eta \circ C(X,Y) = 0$;

4) $\Phi \circ F = -F \circ \Phi$;

5) $\langle F(X), Y\rangle = \langle X, F(Y)\rangle$;

6) $\eta \circ F = 0$;

7) $F(\xi) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathbf{X}(M)$. (2.5)

Предварительно докажем следующую лемму.

**Лемма.** На $NC_{10}$-многообразии имеют место тождества

$$\eta \circ \{\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X\} = \nabla_X(\eta)\Phi Y + \nabla_Y(\eta)\Phi X = 0 \qquad \forall X, Y \in \mathbf{X}(M). \tag{2.6}$$

**Доказательство.** Из определения 1.1 следует

$$\eta \circ \{\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X\} = \nabla_X(\eta)\Phi Y + \nabla_Y(\eta)\Phi X + \eta(X)\eta \circ \nabla_{\Phi Y}\xi + \eta(Y)\eta \circ \nabla_{\Phi X}\xi, \quad X, Y \in \mathbf{X}(M).$$

Поскольку на почти контактном метрическом многообразии имеет мест равенство $\eta \circ \nabla_X \xi = 0 \quad \forall X \in \mathbf{X}(M)$, то последнее равенство примет вид:

$$\eta \circ \{\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X\} = \nabla_X(\eta)\Phi Y + \nabla_Y(\eta)\Phi X, \qquad X, Y \in \mathbf{X}(M). \tag{2.7}$$

Ковариантно дифференцируя равенство $\eta \circ \Phi = 0$, получим

$$\nabla_X(\eta)\Phi Y + \eta \circ \nabla_X(\Phi)Y = 0, \qquad X, Y \in \mathbf{X}(M). \tag{2.8}$$

Из последних двух тождеств следует (2.6). □

**Доказательство предложения 2.1.**

1) Аналитическое выражение первого структурного тензора можно записать в виде [4]

$$C(X,Y) = -\frac{1}{4}\{\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X)\},$$

тогда

$$C(\Phi X,Y) = -\frac{1}{4}\{\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^3 X)\} =$$

$$= -\frac{1}{4}\{\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X)\}$$

и

$$C(X,\Phi Y) = -\frac{1}{4}\{\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) - \Phi \circ \nabla_{\Phi^3 Y}(\Phi)(\Phi^2 X)\} =$$

$$= -\frac{1}{4}\{\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X)\},$$

то есть $C(\Phi X,Y) = C(X,\Phi Y)$.

Докажем теперь равенство $\Phi \circ C(X,Y) = -C(\Phi X,Y)$. С учетом (2.3) имеем

$$\Phi \circ C(X,Y) = -\frac{1}{4}\{\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^3 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X)\} =$$

$$= -\frac{1}{4}\{\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X)\}.$$

А также

$$C(\Phi X,Y) = -\frac{1}{4}\{\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^3 X)\} =$$

$$= -\frac{1}{4}\{\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X)\}.$$

Из последних двух равенств получаем $\Phi \circ C(X,Y) = -C(\Phi X,Y)$.

2) $C(X,\xi) = -\frac{1}{4}\{\Phi \circ \nabla_{\Phi\xi}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi\xi}(\Phi)(\Phi^2 X)\} = 0$.

3) Поскольку $\eta \circ \Phi = 0$, то

$$\eta \circ C(X,Y) = -\frac{1}{4}\eta \circ \{\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X)\} = 0.$$

4) Поскольку $\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi = 0$ и $\nabla_X \xi = \Phi \circ \nabla_X(\Phi)\xi$, то $\nabla_{\Phi^2 X}\xi + \Phi \circ \nabla_{\Phi X}\xi = 0$, то есть $\nabla_X \xi = \Phi \circ \nabla_{\Phi X}\xi$.

В последнем равенстве сделаем замену $X \to \Phi X$, тогда получим $\nabla_{\Phi X}\xi = -\Phi \circ \nabla_X \xi$, то есть $\Phi \circ F(X) = -F(\Phi X)$.

5) Это свойство вытекает из кососимметричности функций $\{F^{ab}, F_{ab}\}$.

6) $\eta(F(X)) = -\eta(\nabla_X \xi) = 0$.

7) $F(\xi) = \nabla_\xi \xi = 0$. ■

## 3. Дополнительное тождество кривизны почти контактных метрических многообразий класса $NC_{10}$

Напомним [4], что существенные ненулевые компоненты тензора Римана-Кристоффеля на пространстве присоединенной $G$-структуры имеют вид:

1) $R^b_{00a} = F_{ac}F^{cb}$; 2) $R^a_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} - C^{adh}C_{hbc}$; 3) $R^a_{\hat{b}cd} = 2C^{abh}C_{hcd}$; 4) $R^{\hat{a}}_{bcd} = C_{acdb} - F_{ab}F_{cd}$. (3.1)

Рассмотрим равенства $R^0_{00a} = F^{0c}F_{ca} = F^0{}_{0,a}$, $R^b_{00a} = F^{bc}F_{ca} = F^b{}_{0,a}$, $R^{\hat{b}}_{00a} = F^{\hat{b}c}F_{ca} = F^{\hat{b}}{}_{0,a}$, то есть $R^i_{00a} = F^{ic}F_{ca} = F^i{}_{0,a}$, то есть $R(\xi,\varepsilon_a)\xi = \nabla_{\varepsilon_a}(F)\xi$. Векторы $\{\varepsilon_a\}$ образуют базис подпространства $D^{\sqrt{-1}}_\Phi$, а проектором модуля $\mathbf{X}(M)$ на подмодуль $D^{\sqrt{-1}}_\Phi$ является эндоморфизм $\pi = -\frac{1}{2}\left(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$, тогда равенство $R(\xi,\varepsilon_a)\xi = \nabla_{\varepsilon_a}(F)\xi$ перепишется в виде $R\left\{\xi,-\frac{1}{2}\left(\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X\right)\right\}\xi = \nabla_{-\frac{1}{2}\left(\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X\right)}(F)\xi \quad \forall X \in \mathbf{X}(M)$. Расписывая полученное равенство по линейности и выделяя действительную и мнимую части, получим эквивалентное тождество

$$R\left(\xi,\Phi^2 X\right)\xi = \nabla_{\Phi^2 X}(F)\xi \qquad \forall X \in \mathbf{X}(M). \tag{3.2}$$

Приведенная выше процедура называется ***процедурой восстановления тождества*** [2, 5].

Назовем тождество (3.1) ***первым дополнительным тождеством*** тензора римановой кривизны $AC$-многообразия класса $NC_{10}$. Так как $\Phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$, $\nabla_\xi(F)\xi = 0$, то тождество (3.2) можно записать в форме

$$R(\xi,X)\xi = \nabla_X(F)\xi \qquad \forall X \in \mathbf{X}(M). \tag{3.3}$$

**Определение 3.1.** $AC$-многообразие назовем многообразием класса $R_1$, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет условию $R\left(\xi,\Phi^2 X\right)\xi = 0 \quad \forall X \in \mathbf{X}(M)$.

**Теорема 3.1.** $NC_{10}$-многообразие является многообразием класса $R_1$ тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной $G$-структуры $R^b_{00a} = 0$.

**Доказательство.** Пусть $NC_{10}$-многообразие является многообразием класса $R_1$. Тогда, согласно определению 3.1, имеет место тождество $R(\xi,X)\xi = 0 \quad \forall X \in \mathbf{X}(M)$, которое на пространстве присоединенной $G$-структуры перепишется в виде $R^0_{00a}\xi + R^b_{00a}\varepsilon_b + R^{\hat{b}}_{00a}\varepsilon_{\hat{b}} = 0$, то есть с учетом (3.1) $R^b_{00a}\varepsilon_b = 0$, то есть $R^b_{00a} = 0$.

Обратно, пусть для $NC_{10}$-многообразия $R^b_{00a} = 0$. Поскольку для $NC_{10}$-многообразия имеют место равенства $R^0_{00a} = 0$ и $R^{\hat{b}}_{00a} = 0$, то, применяя процедуру восстановления тождества к равенствам $R^i_{00a} = 0$, получим $R\left(\xi,\Phi^2 X\right)\xi = 0 \quad \forall X \in \mathbf{X}(M)$.■

Из определения 3.1 и (3.3) непосредственно следует следующая теорема.

**Теорема 3.2.** $NC_{10}$-многообразие является многообразием класса $R_1$ тогда и только тогда, когда $\nabla_X(F)\xi = 0 \quad \forall X \in \mathbf{X}(M)$.

**Теорема 3.3.** $NC_{10}$-многообразие является многообразием класса $R_1$ тогда и только тогда, когда оно является точнейше косимплектическим многообразием.

**Доказательство.** Согласно теореме 3.1 $NC_{10}$-многообразие является многообразием класса $R_1$ тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной $G$-структуры $R^b_{00a} = 0$, которое с учетом (3.1) примет вид $F^{bc}F_{ca} = 0$. Свернем это равенство по индексам $a$ и $b$, тогда $F^{ab}F_{ab} = 0$, то есть $\sum_{a,b} F_{ab}\overline{F_{ab}} = 0$, то есть $\sum_{a,b}\left|F_{ab}\right|^2 = 0 \Leftrightarrow F_{ab} = 0$. Согласно предложению

1.1 $NC_{10}$-многообразие класса $R_1$ является точнейше косимплектическим многообразием.

Обратно, поскольку для точнейше косимплектического многообразия $R^b_{00a} = 0$ и точнейше косимплектическое многообразие является $NC_{10}$-многообразием, то, согласно теореме 3.1, оно ***является*** $NC_{10}$-многообразием класса $R_1$.■

Известно [2], что точнейше косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую, тогда теорему 3.3 можно сформулировать в виде:

**Основная теорема.** $NC_{10}$-многообразие класса $R_1$ локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.


**Примечания:**

1. Рустанов А.Р. Многообразия класса $NC_{10}$ // Преподаватель XXI век. 2014. № 3. С. 209–218.
2. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М.: МПГУ, 2003. 495 с.
3. Кириченко В.Ф., Дондукова Н.Н. Контактно геодезические преобразования почти контактных метрических структур // Математические заметки. 2006. Т. 80, вып. 2. С. 209–219.
4. Рустанов А.Р. Аналитическое задание структурных тензоров почти контактных метрических многообразий // Преподаватель XXI век. 2013. № 1. С. 218–223.
5. Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Математический сборник. 2002. Т. 193, № 8. С. 71–100.

**References:**

1. Rustanov A.R. Varieties of $NC_{10}$ class // Teacher XXI century. 2014. No. 3. P. 209–218.
2. Kirichenko V.F. Differential geometric structures on manifolds. M.: MPSU, 2003. 495 pp.
3. Kirichenko V.F., Dondukova N.N. Contactly geodesic transformations of almost contact metric structures // Mat. Zametki. 2006. Vol. 80, No. 2, P. 209–219.
4. Rustanov A.R. Analytical task of structural tensors of almost contact metric manifolds // Teacher XXI century. 2013. No. 1. P. 218–223.
5. Kirichenko V.F., Rustanov A.R. Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds // Mathematical Collection. Vol. 193, 2002. No. 8. P. 71–100.