УДК 517.91/92
ББК 22.161.6
И 42

Иконникова Е.В.
Соискатель кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, e-mail: uralochka_87@mail.ru

О второй теореме Н.Н. Боголюбова-Н.М. Крылова в принципе усреднения для функционально-дифференциальных включений нейтрального типа

(Рецензирована)

Аннотация. *Рассматривается задача о существовании периодических решений для абстрактных функционально-дифференциальных включений нейтрального типа, имеющих стандартный для задач принципа усреднения вид, в котором малый положительный параметр содержится в качестве множителя в правой части включения. Решение поставленной задачи сводится к построению интегрального оператора, неподвижные точки которого являются решениями функционально-дифференциального включения. Этот оператор уплотняет относительно специальной меры некомпактности, что позволяет применить теорию степени отображения для уплотняющих операторов. Полученный результат является аналогом классического принципа усреднения Н.Н. Боголюбова-Н.М. Крылова.*

Ключевые слова: *принцип усреднения, дифференциальное включение нейтрального типа, уплотняющий оператор.*

Ikonnikova E.V.
Applicant of the Department of Functional Analysis and Operator Equations of Mathematical Faculty of Voronezh State University, Voronezh, e-mail: uralochka_87@mail.ru

On the second theorem of N.N. Bogolyubov-N.M. Krylov on averaging principle for functional differential inclusions of neutral type

Abstract. *The aim of this paper is to examine the existence of periodic solutions for abstract functional-differential inclusions of neutral type having the standard form for averaging method's problems, where a small positive parameter is contained as a multiplier in the right-hand side of inclusion. The solution of the problem reduces to construction of an integral operator the fixed points of which are solutions of the functional-differential inclusion. This operator is condensing relative special measure of noncompactness that allows us to apply topological degree theory for condensing operators. This result is analog of the classical averaging principle of N.N. Bogolyubov-N.M. Krylov.*

Keywords: *averaging method, differential inclusion of neutral type, condensing map.*

Используемые обозначения, понятия и факты

Приведем обозначения и некоторые понятия теории многозначных отображений, которые будут использоваться в настоящей работе. Пусть E и E_1 – вещественные банаховы пространства, $R_+ = \{t \in R,\ t > 0\}$. Через $K(E)$ $(Kv(E))$ обозначим набор всех непустых компактных (компактных выпуклых) подмножеств пространства E; $P(E)$ – множество всех непустых подмножеств из E; $Cb(E)$ – набор всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства E. Ниже $\mathrm{B}_E(a,r)$ – шар в пространстве E с центром в точке a радиуса r $(\mathrm{B}_E = \mathrm{B}_E(0,1))$.

Определение 1 [1, с. 7]**.** Мерой некомпактности Хаусдорфа $\chi(\Omega)$ множества $\Omega \in Cb(E)$ называется инфимум тех d, при которых Ω имеет в E конечную d-сеть.

Определение 2 [2, с. 6]**.** Метрикой Хаусдорфа на множестве $Cb(E)$ называется функция $\mathrm{h}: Cb(E)\times Cb(E) \to R_+$ вида $\mathrm{h}(N_1,N_2) = \inf\{\sigma : N_1 \subset B_\sigma(N_2),\ N_2 \subset B_\sigma(N_1)\}$, где $B_\sigma(N_i)$ есть σ-раздутие множества N_i, $i = 1,2$.

Определение 3 [2, с. 44]**.** Пусть $X \subseteq E$, Λ – пространство параметров и $k \in R_+$. Многозначное отображение $H: X \to K(E)$ или семейство многозначных отображений $G: \Lambda\times X \to K(E)$ называется (k,χ)-уплотняющим, если, соответственно, $\chi(H(\Lambda)) \le k\chi(\Lambda)$ или $\chi(G(\Lambda\times\Lambda)) \le k\chi(\Lambda)$ для каждого $\Omega \in Cb(X)$.

Теорема 1 [2, с. 46]. Пусть $X \subseteq E$ и многозначное отображение $\mathfrak{B} : X \times E \to K(E)$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) для всех $x \in X$ многозначное отображение $\mathfrak{B}(x, \cdot) : E \to K(E)$ удовлетворяет условию Липшица с константой k относительно метрики Хаусдорфа $\mathbf{h}$ в $K(E)$;

(ii) множество $\mathfrak{B}(\Omega \times \{y\})$ является относительно компактным в E для любого $\Omega \in Cb(X)$ и $y \in E$.

Тогда диагональный оператор $A : X \to K(E)$, определяемый равенством $A(x) = \mathfrak{B}(x, x)$, является (k, χ)-уплотняющим на X, то есть для каждого $\Omega \in Cb(X)$ выполнено соотношение $\chi\big(A(\Omega)\big) \le k\chi(\Omega)$.

Предложение 1. Пусть выполнено условие i) теоремы 1, тогда если многозначное отображение $\mathfrak{B}(\cdot, y)$ полунепрерывно сверху при любом фиксированном $y \in E$, то диагональный оператор $A(\cdot)$ также полунепрерывен сверху.

Доказательство. Рассмотрим последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ и $\{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subset E$, сходящиеся к $x_0 \in X$ и $y_0 \in E$ соответственно. В силу полунепрерывности сверху по первой переменной многозначного отображения $\mathfrak{B}(\cdot, \cdot)$, для любого $\gamma > 0$ при каждом фиксированном m найдутся такие n_m и $\eta_m > 0$, что для всех $n \ge n_m$ и $0 < \eta \le \eta_m$ таких, что $\|x_n - x_0\| < \eta$, будет выполнено $\mathfrak{B}(x_n, y_m) \subset \mathfrak{B}(x_0, y_m) + \gamma \mathrm{B}_E$. Также, в силу выполнения условия (i), для любого $\delta > 0$ найдется такое M, что для всех $m \ge M$ таких, что $\|y_m - y_0\| \le \frac{\delta}{k}$, верно включение $\mathfrak{B}(x_0, y_m) \subset \mathfrak{B}(x_0, y_0) + \delta \mathrm{B}_E$. Следовательно, $\mathfrak{B}(x_n, y_m) \subset \mathfrak{B}(x_0, y_0) + \delta \mathrm{B}_E + \gamma \mathrm{B}_E$. Таким образом, из вышеприведенных рассуждений следует, что оператор $\mathfrak{B}$ является полунепрерывным сверху по совокупности переменных. Положим $y_0 = x_0$, тогда в силу построения, диагональный оператор $A(\cdot)$ также полунепрерывен сверху. ■

Определение 4 [3]. Пусть $\Psi : [0, T] \to Kv(\mathbb{R}^n)$ – многозначное отображение, $S_\Psi = \{\psi : [0, T] \to \mathbb{R}^n, \psi$ интегрируемы на $[0, T]$ и $\psi(t) \in \Psi(t)$ для почти всех (далее – п.в.) $t \in [0, T]\}$. Тогда интеграл от многозначного отображения, определенный как множество $\int\limits_0^T \Psi(s)ds = \Big\{ z \in \mathbb{R}^n : z = \int\limits_0^T \psi(s)ds, \psi \in S_\Psi \Big\}$, называется интегралом Аумана.

Далее под нормой в пространстве $\mathbb{R}^n$ для элемента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем понимать норму: $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \sum\limits_{i=1}^n |x_i|$. Для T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ через $C_T(\mathbb{R}^n)$ обозначается пространство непрерывных функций с нормой $\|x\|_{C_T} = \sup\limits_{t \in [0,T]} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}$, через $L^p([a, b], \mathbb{R}^n)$ $\big(L^p_T(\mathbb{R}^n)\big)$ – пространство функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (T-периодических функцийй $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$), суммируемых со степенью $1 < p < \infty$ на $[a, b]$ (на $[0, T]$). Нормы в пространствах $L^p([a, b], \mathbb{R}^n)$ и $L^p_T(\mathbb{R}^n)$ определены равенствами: $\|x\|_{L^p([a,b])} = \left(\int\limits_a^b \|x(s)\|^p_{\mathbb{R}^n} ds \right)^{\frac{1}{p}}$ и $\|x\|_{L^p_T} = \left(\int\limits_0^T \|x(s)\|^p_{\mathbb{R}^n} ds \right)^{\frac{1}{p}}$, соответственно. Через $W^1_p([a, b], \mathbb{R}^n)$ $\big(W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)\big)$ обозначается пространство функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$), суммируемых со степенью $1 < p < \infty$ и имеющих обобщенные производные первого порядка, суммируемые в $\mathbb{R}^n$ с данной степенью p. Нормы в пространствах $W^1_p([a, b], \mathbb{R}^n)$ и $W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)$ определены как $\|x\|_{W^1_p([a,b])} = \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n} + \|x'\|_{L^p([a,b])}$ и $\|x\|_{W^1_{p,T}} = \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n} + \|x'\|_{L^p_T}$, соответственно.

Приведем в удобном для дальнейшего виде формулировку понятия степени отображения для многозначных (k, χ)-уплотняющих векторых полей. Более подробно данный вопрос изложен в [1, 2].

Пусть $X \subseteq E$, $U \subseteq E$ – непустые открытые ограниченные множества, $\overline{U}, \partial U$ – соответственно замыкание и граница множества U.

Определение 5 [2, с. 42]. Точка $x \in X$ называется неподвижной точкой многозначного отображения $\mathfrak{F} : X \to E$, если $x \in \mathfrak{F}(x)$. Множество всех неподвижных точек $\mathfrak{F}$ обозначим $Fix\mathfrak{F}$.

Определение 6 [2, с. 41]. Многозначным (k, χ)-уплотняющим векторным полем, соответствующим многозначному (k, χ)-уплотняющему отображению $\mathfrak{F} : X \to P(E)$, называется многозначное векторное поле $\Upsilon : X \to P(E)$, определяемое по формуле $\Upsilon(x) = x - \mathfrak{F}(x)$. Ниже для простоты обозначений будем писать $\Upsilon = I - \mathfrak{F}$.

Точка $x \in X$ такая, что $0 \in \Upsilon(x)$, называется особой точкой многозначного векторного поля Υ. Ясно, что особые точки многозначного векторного поля $\Upsilon = I - \mathfrak{F}$ являются неподвижными точками многозначного отображения $\mathfrak{F}$, и обратно. Если $Fix\mathfrak{F} \cap X = \emptyset$, где $X \in E$, то будем говорить, что $\Upsilon = I - \mathfrak{F}$ невырождено на X.

Пусть $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1 : \partial U \to Kv(E)$ – полунепрерывные сверху (k, χ)- уплотняющие многозначные отображения, $Fix\mathfrak{F}_i \cap \partial U = \emptyset, i = 0, 1$.

Определение 7 [2, с. 58]. Многозначные векторные поля $\Upsilon_0 = I - \mathfrak{F}_0$ и $\Upsilon_1 = I - \mathfrak{F}_1$ называются (k, χ)-гомотопными, $\Upsilon_0 \sim \Upsilon_1$, если существует такое полунепрерывное сверху (k, χ)-уплотняющее семейство многозначных векторных полей $G : \partial U \times [0, 1] \to Kv(E)$, что: 1) $x \notin G(x, \lambda)$ при $x \in \partial U$ и $\lambda \in [0, 1]$; 2) $G(\cdot, 0) = \mathfrak{F}_0, G(\cdot, 1) = \mathfrak{F}_1$. Семейство G называется гомотопией, связывающей многозначные векторные поля Υ_0 и Υ_1.

Каждому полунепрерывному сверху (k, χ)-уплотняющему многозначному векторному полю $\Upsilon = I - \mathfrak{F}$, не вырожденному на ∂U, может быть сопоставлена целочисленная характеристика – степень отображения $deg(\Upsilon, \partial U)$, обладающая следующими основными свойствами [2, с. 52]:

$(D1)$ *Свойство нормализации.* Если $\mathfrak{F}(x) \equiv L$ для всех $x \in \partial U$, то

$$deg(\Upsilon, \partial U) = \begin{cases} 1, \text{ если } L \bigcap U \neq \emptyset; \\ 0, \text{ если } L \bigcap \overline{U} = \emptyset. \end{cases}$$

$(D2)$ *Гомотопическая инвариантность.* Если $\Upsilon_0, \Upsilon_1 : \partial U \to Kv(E)$ и $\Upsilon_0 \sim \Upsilon_1$, то $deg(\Upsilon_0, \partial U) = deg(\Upsilon_1, \partial U)$.

$(D3)$ *Основной принцип неподвижной точки.* Пусть полунепрерывное сверху (k, χ)-уплотняющее многозначное отображение $\mathfrak{F} : \overline{U} \to Kv(E)$ не имеет неподвижных точек на ∂U и $deg(I - \mathfrak{F}, \partial U) \neq 0$. Тогда $\mathfrak{F}$ имеет в U неподвижную точку.

$(D4)$ *Принцип сужения отображения.* Пусть полунепрерывное сверху (k, χ)-уплотняющее многозначное отображение $\mathfrak{F} : \partial U \to Kv(E)$ не имеет неподвижных точек на границе ∂U и $\mathfrak{F}(\partial U) \subset E'$, где E' – подпространство E. Тогда $deg(I - \mathfrak{F}, \partial U) = deg|_{E'}(I - \mathfrak{F}, \partial U')$, где $U' = U \bigcap E'$, а $deg|_{E'}$ обозначает степень отображения, вычисляемую в подпространстве E'.

Постановка задачи и формулировка теоремы

Рассмотрим дифференциальное включение нейтрального типа следующего вида:

$$x' \in \varepsilon F(x, x'), \ \varepsilon \in (0, 1), \tag{1}$$

где многозначное отображение $F : C_T(\mathbb{R}^n) \times L^p_T(\mathbb{R}^n) \to Kv\big(L^p_T(\mathbb{R}^n)\big)$, $1 < p < \infty$, удовлетворяет следующим условиям:

$F_1)$ при любом фиксированном $y \in L^p_T(\mathbb{R}^n)$ многозначное отображение $F(\cdot, y) : C_T(\mathbb{R}^n) \to Kv\big(L^p_T(\mathbb{R}^n)\big)$ полунепрерывно сверху;

$F_2)$ при любом фиксированном $x \in C_T(\mathbb{R}^n)$ многозначное отображение $F(x, \cdot) : L^p_T(\mathbb{R}^n) \to Kv\big(L^p_T(\mathbb{R}^n)\big)$ удовлетворяет условию Липшица по метрике Хаусдорфа $\mathbf{h}$ в $Kv\big(L^p_T(\mathbb{R}^n)\big)$ с константой $k \geq 0$.

Определим оператор $F_0 : \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$F_0(\nu) = \frac{1}{T} \int\limits_0^T F(\overline{\nu}, 0)(s) ds, \tag{2}$$

где $\nu \in \mathbb{R}^n$, $\overline{\nu} \in C_T(\mathbb{R}^n)$ – функция-константа, равная ν. Интеграл в правой части формулы (2) понимается как интеграл Аумана.

Теорема 2. Пусть включение $\nu' \in F_0(\nu)$ имеет решение $\nu^* \in \mathbb{R}^n$, у которого существует ограниченная окрестность $V(\nu^*) \in \mathbb{R}^n$ такая, что

$$0 \notin F_0(\nu) \text{ при всех } \nu \in \partial V(\nu^*) \tag{3}$$

и

$$deg_{\mathbb{R}^n}\big(-F_0, V(\nu^*)\big) \neq 0. \tag{4}$$

Тогда при достаточно малых ε включение (1) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение x_ε такое, что $x_\varepsilon(t) \in V(\nu^*)$ и $\|x'_\varepsilon\|_{L^p_T} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы проведем в несколько этапов с помощью промежуточных лемм и предложений.

Пусть $S_{F(x,y)}$ – множество селекторов таких, что $S_{F(x,y)} = \{f \in L^p_T(\mathbb{R}^n) : f(t) \in F(x,y)(t)$ при п.в. $t \in [0,T], x \in C_T(\mathbb{R}^n), y \in L^p_T(\mathbb{R}^n)\}$.

Определим многозначный оператор $\Phi_\varepsilon : C_T(\mathbb{R}^n) \times L^p_T(\mathbb{R}^n) \to Kv\big(W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)\big)$ следующим образом:

$$\Phi_\varepsilon(x,y) = x(0) + J_\varepsilon F(x,y) = x(0) + \{J_\varepsilon f : f \in S_{F(x,y)}\}, \tag{5}$$

где

$$(J_\varepsilon f)(t) = \varepsilon \int\limits_0^t f(s)ds - \varepsilon\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\int\limits_0^T f(s)ds. \tag{6}$$

Несложно видеть, что $(J_\varepsilon f)(\cdot) \in W^1_p([0,T];\mathbb{R}^n)$ для любого $f \in S_{F(x,y)}$ и, кроме того, оператор (6) периодичен при каждом $f \in S_{F(x,y)}$, поэтому $J_\varepsilon : L^p_T(\mathbb{R}^n) \to W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)$. Также заметим, что, по условию, значения многозначной функции F лежат в компактном выпуклом подмножестве пространства $L^p_T(\mathbb{R}^n)$, поэтому образы оператора $J_\varepsilon F(\cdot,\cdot)$, в силу линейности и непрерывности J_ε, также лежат в компактном выпуклом множестве пространства $W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)$, то есть $\Phi_\varepsilon : C_T(\mathbb{R}^n) \times L^p_T(\mathbb{R}^n) \to Kv\big(W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)\big)$.

Замечание 1. Из свойств интеграла [3, с. 10] следует, что многозначный оператор (5) полунепрерывен сверху по первой переменной.

Лемма 1. Многозначное отображение $\Phi_\varepsilon(x,\cdot) : L^p_T(\mathbb{R}^n) \to Kv\big(W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)\big)$ при любом фиксированном $x \in C_T(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию Липшица по метрике Хаусдорфа $\mathbf{h}$ в $Kv\big(W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)\big)$ с константой $k_1 = 2k \geq 0$.

Доказательство. Пусть $x \in C_T(\mathbb{R}^n)$, $y_1, y_2 \in L^p_T(\mathbb{R}^n)$. Выберем произвольный селектор $\varphi^{y_1} \in S_{\Phi_\varepsilon(x,y_1)}$, для него найдется такой селектор $f^{y_1} \in S_{F(x,y_1)}$, что выполнено равенство $\varphi^{y_1}(t) = x(0) + (J_\varepsilon f^{y_1})(t)$. В силу условия F_2), для f^{y_1} и любого $\theta \geq 0$ найдется такой селектор $f^{y_2} \in S_{F(x,y_2)}$, что будет справедлива неравенство

$$\|f^{y_1} - f^{y_2}\|_{L^p_T} \leq k\|y_1 - y_2\| + \theta. \tag{7}$$

По f^{y_2} построим селектор φ^{y_2} по формуле $\varphi^{y_2}(t) = x(0) + (J_\varepsilon f^{y_2})(t)$. Понятно, что $\varphi^{y_2} \in S_{\Phi_\varepsilon(x,y_2)}$. Далее, воспользовавшись определением нормы в пространстве $W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)$, интегральным неравенством Минковского и неравенством Гельдера, оценим расстояние между φ^{y_1} и φ^{y_2}.

$$\|\varphi^{y_1}-\varphi^{y_2}\|_{W^1_{p,T}} \le \varepsilon\left(\int\limits_0^T\Big[\big\|f^{y_1}(t)-f^{y_2}(t)\big\|_{\mathbb{R}^n}+\Big\|\frac{1}{T}\int\limits_0^T\big(f^{y_2}(s)-f^{y_1}(s)\big)ds\Big\|_{\mathbb{R}^n}\Big]^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \varepsilon\big\|f^{y_1}-f^{y_2}\big\|_{L^p_T}+\frac{\varepsilon}{T}T^{\frac{1}{p}}\int\limits_0^T\big\|f^{y_1}(s)-f^{y_2}(s)\big\|_{\mathbb{R}^n}\cdot 1ds \le \varepsilon\big\|f^{y_1}-f^{y_2}\big\|_{L^p_T}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{T}T^{\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_0^T|1|^q\,ds\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_0^T\Big\|f^{y_1}(s)-f^{y_2}(s)\Big\|^p_{\mathbb{R}^n}ds\Big)^{\frac{1}{p}}=2\varepsilon\|f^{y_1}-f^{y_2}\|_{L^p_T}. \quad (8)$$

Положим $k_1 = 2k$, тогда, учитывая оценки (7), (8) и неравенство $0<\varepsilon<1$, получим соотношение

$$\|\varphi^{y_1}-\varphi^{y_2}\|_{W^1_{p,T}} \le k_1\|y_1-y_2\|_{L^p_T}+\theta,\ \theta\ge 0,$$

откуда следует

$$\mathbf{h}_{W^1_{p,T}}\big(\Phi_\varepsilon(x,y_1),\Phi_\varepsilon(x,y_1)\big)\le k_1\|y_1-y_2\|_{L^p_T}+\theta,\ \theta\ge 0.$$

В силу произвольности θ можно утверждать, что справедлива оценка

$$\mathbf{h}_{W^1_{p,T}}\big(\Phi_\varepsilon(x,y_1),\Phi_\varepsilon(x,y_1)\big)\le k_1\|y_1-y_2\|_{L^p_T},$$

что и требовалось доказать. ■

Построим диагональный оператор $\mathfrak{B}_\varepsilon(x,x)$ следующим образом. Положим $\mathfrak{B}_\varepsilon(x,w)=\Phi_\varepsilon(x,w')$, где $x\in C_T(\mathbb{R}^n)$, $w\in W^1_{p,T}\big(\mathbb{R}^n\big)$, то есть $\mathfrak{B}_\varepsilon(\cdot,\cdot): C_T(\mathbb{R}^n)\times W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)\to Kv\big(W^1_{p,T}\big(\mathbb{R}^n\big)\big)$. Зафиксируем $\tilde{w}$ и положим $\tilde{w}=x$, тогда $\mathfrak{B}_\varepsilon(x,x)=\Phi_\varepsilon(x,x')$ и $\mathfrak{B}_\varepsilon(\cdot,x): C_T(\mathbb{R}^n)\to Kv\big(W^1_{p,T}\big(\mathbb{R}^n\big)\big)$.

Лемма 2. Диагональный оператор $A_\varepsilon: C_T(\mathbb{R}^n)\to Kv\big(W^1_{p,T}\big(\mathbb{R}^n\big)\big)$, определенный равенством $A_\varepsilon(x)=\mathfrak{B}_\varepsilon(x,x)$, является (k_1,χ)-уплотняющим относительно меры некомпактности Хаусдорфа χ при каждом фиксированном ε.

Доказательство. Из построения оператора $\mathfrak{B}_\varepsilon$ и леммы 2 в силу определения нормы в $W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)$ следует, что $\mathfrak{B}_\varepsilon(x,\cdot): W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)\to Kv\big(W^1_{p,T}\big(\mathbb{R}^n\big)\big)$ удовлетворяет условию Липшица по метрике Хаусдорфа $\mathbf{h}$. Заметим также, что оператор $\mathfrak{B}_\varepsilon(\cdot,x): C_T(\mathbb{R}^n)\to Kv\big(W^1_{p,T}\big(\mathbb{R}^n\big)\big)$ в силу построения и замечания 1 является полунепрерывным сверху, поэтому в силу предложения 1 диагональный оператор $A_\varepsilon(\cdot)$ также полунепрерывен сверху.

Выберем произвольное множество $\Omega\in Cb\big(W^1_p([0,T],\mathbb{R}^n)\big)$. Так как любое ограниченное множество в $W^1_p([0,T],\mathbb{R}^n)$ компактно в $C([0,T],\mathbb{R}^n)$, то при каждом $w\in W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)$ множество $\Omega\times\{w\}$ компактно. Так как полунепрерывный сверху оператор переводит компакт в компакт [2, с. 5], то множество $\mathfrak{B}_\varepsilon(\Omega\times\{w\})$ компактно. Таким образом, построенный оператор $\mathfrak{B}_\varepsilon$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, а значит диагональный оператор A_ε является (k_1,χ)-уплотняющим в пространстве $W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)$ относительно меры некомпактности Хаусдорфа χ. ■

Лемма 3. Неподвижные точки оператора $A_\varepsilon(\cdot)$ и только они являются T-периодическими решениями включения (1).

Доказательство проводится аналогично однозначному случаю [1, с. 197].

Для дальнейшего доказательства нам потребуется множество $\mathcal{V}=\{x\in W^1_{p,T}, x(t)\in V(\nu^*)$ при $t\in[0,T]\}$ и оператор $\Phi_{0,\varepsilon}(x)=x(0)+\varepsilon F_0(x)$, где $F_0(x)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(\overline{x},0)(s)ds$ и $\overline{x}\in\mathcal{V}$ есть функция-константа, равная $x\in\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим оператор

$$G^{\varepsilon}(\lambda, x) = \lambda A_{\varepsilon}(x) + (1-\lambda)\Phi_{0,\varepsilon}(x) \tag{9}$$

и покажем, что он определяет гомотопию на $\mathcal{V}$. Так как отображение $A_{\varepsilon}(\cdot)$ является (k_1, χ)-уплотняющим по мере некомпактности Хаусдорфа и нетрудно видеть, что оператор $\Phi_{0,\varepsilon}$ компактен в $W_p^1([0,T], \mathbb{R}^n)$, то можно утверждать, что оператор (9) является (k_1, χ)-уплотняющим по мере некомпактности Хаусдорфа [2, с. 44], поэтому достаточно показать, что $G^{\varepsilon}(\lambda, x)$ не имеет неподвижных точек на границе множества $\partial\mathcal{V}$ при всех $\lambda \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$.

Предположим противное. Тогда для любого $\varepsilon_0 > 0$ найдется такое $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, что отображение $G^{\varepsilon}(\cdot, \cdot)$ не является гомотопией, то есть существуют сходящиеся последовательности $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что $\varepsilon_m \to 0$, $\varepsilon_m > 0$, $\lambda_m \to \lambda_0$, $\lambda_m \in [0,1]$, и

$$x_m \in \lambda_m A_{\varepsilon_m}(x_m) + (1-\lambda_m)\Phi_{0,\varepsilon_m}(x_m), \; x_m \in \partial\mathcal{V}.$$

Тогда верно следующее включение:

$$x_m(t) \in \lambda_m x_m(0) + \lambda_m \varepsilon_m \int_0^t F(x_m, x'_m)(s)ds - \lambda_m \varepsilon_m \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) \cdot$$
$$\int_0^T F(x_m, x'_m)(s)ds + (1-\lambda_m)x_m(0) + (1-\lambda_m)\varepsilon_m F_0(x_m). \tag{10}$$

Положим $t = T$ во включении (10) и, воспользовавшись равенством $x_m(0) = x_m(T)$, получим

$$0 \in \frac{1}{2}\lambda_m \varepsilon_m \int_0^T F(x_m, x'_m)(s)ds + (1-\lambda_m)\varepsilon_m F_0(x_m). \tag{11}$$

Очевидно, существуют селекторы $\overline{f}^{x'_m} \in S_{F(x_m, x'_m)}$ и $\overline{g}^m \in S_{F_0(x_m)}$, реализующие равенство для (11):

$$-2(1-\lambda_m)\overline{g}^m \overset{\text{п.в.}}{=} \lambda_m \int_0^T \overline{f}^{x'_m}(s)ds. \tag{12}$$

Продифференцируем правую и левую часть включения (10) и получим:

$$x'_m(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} \lambda_m \varepsilon_m F(x_m, x'_m)(t) - \lambda_m \frac{\varepsilon_m}{T} \int_0^T F(x_m, x'_m)(s)ds. \tag{13}$$

Для селекторов, удовлетворяющих соотношению (12), включение (13) примет вид:

$$x'_m(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \lambda_m \varepsilon_m \overline{f}^{x'_m}(t) + \frac{2}{T}(1-\lambda_m)\varepsilon_m \overline{g}^m. \tag{14}$$

В силу условия $F_2)$ для $\overline{f}^{x'_m}$ и любого $\theta \geq 0$ найдется такой селектор $f^0 \in S_{F(x_m, 0)}$, что будет справедливо неравенство

$$\|\overline{f}^{x'_m} - f^0\|_{L_T^p} \leq k\|x'_m\|_{L_T^p} + \theta. \tag{15}$$

Воспользовавшись соотношением (15) с учетом произвольности θ, оценим последовательность $\{x_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ T-периодических функций в $\mathbb{R}^n$:

$$\|x_m'(t)\|_{\mathbb{R}^n} \overset{\text{п.в.}}{\leq} \lambda_m\varepsilon_m\|\overline{f}^{x_m}(t)-f^0(t)\|_{\mathbb{R}^n}+\lambda_m\varepsilon_m\|f^0(t)\|_{\mathbb{R}^n}+\frac{2}{T}(1-\lambda_m)\varepsilon_m\|\overline{g}^m\|_{\mathbb{R}^n}\leq$$
$$\leq \lambda_m\varepsilon_m\|x_m'(t)\|_{\mathbb{R}^n}+\|f^0(t)\|_{\mathbb{R}^n}+\frac{2}{T}(1-\lambda_m)\varepsilon_m\|\overline{g}^m\|_{\mathbb{R}^n}, \quad (16)$$

откуда получим

$$(1-\lambda_m\varepsilon_m)\|x_m'(t)\|_{\mathbb{R}^n} \overset{\text{п.в.}}{\leq} \lambda_m\varepsilon_m\|f^0(t)\|_{\mathbb{R}^n}+\frac{2}{T}(1-\lambda_m)\varepsilon_m\|\overline{g}^m\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Заметим, что последовательность $\{x_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ лежит на границе $\partial\mathcal{V}$ в $W_p^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ и поэтому является ограниченной в $W_p^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, а следовательно, и компактной в $C([0,T],\mathbb{R}^n)$. В силу полунепрерывности сверху многозначных операторов F и F_0 множества $F(x_m,0)$ и $F_0(x_m)$ также будут компактны, а значит, для операторов F и F_0 существуют такие константы M и M_0 соответственно, что для любых селекторов $f^0\in S_{F(x_m,0)}$ и $g^m\in S_{F_0(x_m)}$ будет верна оценка:

$$(1-\lambda_m\varepsilon_m)\|x_m'(t)\|_{\mathbb{R}^n}\leq \lambda_m\varepsilon_m M+\frac{2}{T}(1-\lambda_m)\varepsilon_m M_0,$$

откуда следует

$$\|x_m'(t)\|_{\mathbb{R}^n} \overset{\text{п.в.}}{\leq} \varepsilon_m\max\Big\{\frac{2M_0}{T};\frac{M}{1-\varepsilon_m}\Big\}\leq\varepsilon_m\Big(\frac{2M_0}{T}+\frac{M}{1-\varepsilon_m}\Big)$$

или

$$x_m'\in\varepsilon_m B_{L^p([0,T])}\left(0;T^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{2M_0}{T}+\frac{M}{1-\varepsilon_m}\Big)\right), \quad (17)$$

то есть $x_m'\to 0$ при $m\to\infty$, а значит предельная функция x_0 для последовательности $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ в $W_p^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ есть функция-константа.

Возьмем среднее от обеих частей включения (11)

$$0\in\frac{1}{2}\lambda_m\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(x_m,x_m')(s)ds+(1-\lambda_m)F_0(x_m) \quad (18)$$

и перейдем к пределу, в результате чего получим $0\in(1+\frac{1}{2}\lambda_0)F_0(x_0)$. Так как $\lambda_0\in[0,1]$, то $1+\frac{1}{2}\lambda_0\neq 0$ и, следовательно, $0\in F_0(x_0)$, где $x_0\in\partial\mathcal{V}$, что противоречит условию (3).

Таким образом, наше предположение неверно, а значит оператор (9) определяет гомотопию.

В силу свойства $D2$, $deg_{W_{p,T}^1}\big(I-A_\varepsilon,\mathcal{V}\big)=deg_{W_{p,T}^1}\big(I-\Phi_{0,\varepsilon},\mathcal{V}\big)$ для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Заметим также, что $(I-\Phi_{0,\varepsilon})(x_0)=-\varepsilon F_0(x_0)$ для всех функций-констант x_0. Применяя принцип сужения отображения (свойство $D4$), получим

$$deg_{W_{p,T}^1}\big(I-\Phi_{0,\varepsilon},\mathcal{V}\big)=deg_{\mathbb{R}^n}\big(-\varepsilon F_0,V(\nu^*)\big).$$

В силу условия теоремы (3), можно утверждать, что отображения $-\varepsilon F_0(x_0)$ и $-F_0(x_0)$ гомотопны в $\mathbb{R}^n$, откуда и из условия (4) следует следующее соотношение:

$$deg_{W_{p,T}^1}\big(I-\Phi_\varepsilon,\mathcal{V}\big)=deg_{\mathbb{R}^n}\big(-F_0,V(\nu^*)\big)\neq 0$$

для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Таким образом $A_\varepsilon(\cdot)$ имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку x_ε, причем $x_\varepsilon(t)\in V(\nu^*)$ при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ и п.в. $t\in\mathbb{R}$, то есть при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ включение (1) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $x_\varepsilon(\cdot)$ такое, что $x_\varepsilon(t)\in V(\nu^*)$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$ и $\|x_\varepsilon'\|_{L_T^p}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Последнее утверждение завершает доказательство теоремы. ■

Примечания:

1. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р.Р. Ахмеров [и др.]. Новосибирск: Наука, 1986. 265 с.
2. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin; New York: de Gruyter, 2001. 231 pp.
3. Aumann Robert J. Integrals of Set-Valued Functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1965. No. 12. P. 1–12.

References:

1. Measures of noncompactness and condensing operators / R.R. Akhmerov [etc.]. Novosibirsk: Nauka, 1986. 265 pp.
2. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin; New York: de Gruyter, 2001. 231 pp.
3. Aumann Robert J. Integrals of Set-Valued Functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1965. No. 12. P. 1–12.