УДК 517.926
ББК 22.161.61
С 78

Сташ А.Х.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593905, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

Ушхо А.Д.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593908, e-mail: uschho76@mail.ru

Есин А.Д.
Студент инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593908

О разрывности младших частот нестрогих знаков и гиперкорней на множестве линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка

(Рецензирована)

Аннотация. *Изучается непрерывность в смысле равномерной топологии младших полных и векторных частот нестрогих знаков и гиперкорней на множестве линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка с ограниченными коэффициентами. Установлено существование точек, в которых каждый из этих функционалов не является инвариантным относительно бесконечно малых возмущений.*

Ключевые слова: *линейное дифференциальное уравнение, колеблемость решения, число нулей функции, полная частота, векторная частота.*

Stash A.Kh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593905, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

Ushkho A.D.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Theoretical Physics Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593908, e-mail: uschho76@mail.ru

Esin A.D.
Student of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593908

On discontinuity of younger frequencies of weak signs and hyper roots on a set of the simple homogeneous third order differential equations

Abstract. *The continuity is studied in terms of the uniform topology of younger complete and vector frequencies of weak signs and hyper roots on a set of the simple homogeneous differential equations of the third order with restricted coefficients. Existence of points in which each of these functionals is not invariant respectively infinitesimal indignations is established.*

Keywords: *the simple differential equation, decision variability, number of zero function, the complete frequency, vector frequency.*

Введение и формулировка результата

Настоящая работа логически продолжает и развивает результаты работы [1] на большее число разновидностей младших частот линейных дифференциальных уравнений третьего порядка.

Для заданного натурального n обозначим через E^n множество линейных однородных уравнений n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \qquad t \in R^+ \equiv [0;\infty),$$

с ограниченной непрерывной строкой коэффициентов $a \equiv (a_1,...,a_n): R^+ \to R^n$ (каждую такую строку будем отождествлять с соответствующим уравнением). Линейное пространство всех решений $y: R^+ \to R$ уравнения $a \in E^n$ обозначим через $S(a)$, а подмножество всех его ненулевых решений – через $S_*(a)$. В дальнейшем – звездочкой, в качестве нижнего индекса у линейного пространства будем обозначать факт выкалывания в нем нуля.

Определение 1 [2–4]**.** Скажем, что скалярная функция $y \in C^n(R^+)$ имеет *строгую* (*нестрогую*) *смену знака* в точке $t > 0$, если в любой окрестности этой точки она принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения, а через $\nu^\alpha(y,t)$ при $\alpha = -,\mp,0,+,*$ соответственно обозначим:

– число *ее строгих смен знака* на промежутке $(0,t]$;

– число *ее нестрогих смен знака* на промежутке $(0,t]$;

– число ее *нулей* на промежутке $(0,t]$;

– число ее *корней* на промежутке $(0,t]$, *то есть нулей с учетом их кратности;*

– число ее *гиперкорней* на промежутке $(0,t]$, *то есть* при его подсчете каждый некратный корень берется ровно один раз, а кратный – сразу бесконечно много раз.

Определение 2 [4]**.** Каждому решению $y \in S_*(a)$ произвольного уравнения $a \in E^n$ поставим в соответствие вектор $\psi y \equiv \left(y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)}\right)$ и для $m \in R^n_*$ обозначим $\nu^\alpha(y,m,t) \equiv \nu^\alpha\left(\langle \psi y, m\rangle, t\right)$, где $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – скалярное произведение, после чего зададим его нижние (верхние) *полные и векторные частоты*

$$\check{\sigma}^\alpha(y) = \inf_{m\in R^n_*} \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t) \qquad \left(\hat{\sigma}^\alpha(y) = \inf_{m\in R^n_*} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t)\right),$$

$$\check{\zeta}^\alpha(y) = \underline{\lim_{t\to\infty}} \inf_{m\in R^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t) \qquad \left(\hat{\zeta}^\alpha(y) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \inf_{m\in R^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t)\right)$$

строгих или нестрогих знаков, нулей, корней или гиперкорней при $\alpha = -,\pm,0,+,*$ соответственно. В случае совпадения какой-либо нижней частоты решения y с верхней одноименной будем называть ее точной и обозначать соответственно $\zeta^\alpha(y)$ или $\sigma^\alpha(y)$.

К определениям 1 и 2 добавим обозначение $\nu^\alpha(y,m,t,s) \equiv \nu^\alpha(y,m,t) - \nu^\alpha(y,m,s)$.

Определение 3 [2, 4]**.** При любом $\omega = \hat{\zeta}, \hat{\sigma}, \check{\zeta}, \check{\sigma}$ и $\alpha = -,\pm,0,+,*$ определим младшую частоту $\omega_1^\alpha(a) = \inf_{y\in S_*(a)} \omega^\alpha(y)$ линейного уравнения $a \in E^n$.

Каждую из младших частот линейного уравнения $a \in E^n$ рассмотрим как функционал на линейном топологическом пространстве E^n с естественными для функций линейными операциями и равномерной на R^+ топологией.

Определение 4 [5]**.** Для уравнения $a \in E^n$ обозначим через $\mathrm{B}(a)$ множество уравнений $b \in E^n$, удовлетворяющих условию $\lim_{t\to\infty}|b(t) - a(t)| = 0,$ при котором возмущение $b - a$ назовем бесконечно малым. Будем говорить, что функция $\omega : E^n \to R$ не инвариантна в точке $a \in E^n$ относительно бесконечно малых возмущений, если существует уравнение $b \in \mathrm{B}(a)$, удовлетворяющее условию $\omega(a) \ne \omega(b)$.

В каждой точке пространства E^2 все младшие частоты инвариантны относительно бесконечно малых возмущений [6]. В работах [1, 7] приводятся примеры точек пространства E^3, в которых младшие частоты строгих знаков, нулей и корней не являются инвариантными относительно бесконечно малых возмущений. Вопрос существования аналогичных примеров для младших частот нестрогих знаков и гиперкорней оставался открытым. Ответ на поставленный вопрос дает

Теорема. Каждый из функционалов

$$\hat{\zeta}_1^\pm, \hat{\zeta}_1^*, \hat{\sigma}_1^\pm, \hat{\sigma}_1^*, \check{\zeta}_1^\pm, \check{\zeta}_1^*, \check{\sigma}_1^\pm, \check{\sigma}_1^* : E^n \to R \qquad (1)$$

хотя бы в одной точке пространства E^3 не является инвариантным относительно бесконечно малых возмущений.

Определение 5 [5]**.** Для заданных множеств M и $F=\{f:R^{+}\to M\}$ назовем функционал $\lambda:F\to R$ остаточным, если для любых функций $f,g\in F$, удовлетворяющих хотя бы при одном $t_0\in R^{+}$ условию $f(t)=g(t),\ t\ge t_0$, имеет место равенство $\lambda(f)=\lambda(g)$.

Лемма 1 [8]**.** Для любого уравнения $a\in E^n$ функционалы (1) являются остаточными.

Лемма 2 [5]**.** Если остаточный функционал, определенный на E^n, полунепрерывен во всех точках в одном и том же смысле, то в любой точке $a\in E^n$ он инвариантен относительно бесконечно малых возмущений.

Из сформулированной теоремы, с учетом леммы 2, непременно вытекает

Следствие. Каждый из функционалов (1) хотя бы в одной точке пространства E^3 не является ни непрерывным, ни полунепрерывным сверху, ни полунепрерывным снизу.

Вспомогательные утверждения

Лемма 3. Пусть последовательность положительных чисел $t_1<t_2<\ldots$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{p\to\infty}t_p=\infty,\qquad \lim_{p\to\infty}\frac{t_{p+1}}{t_p}=1.$$

Тогда для любого решения $y\in S_*(a)$ любого уравнения $a\in E^n$ выполнены равенства

$$\check{\sigma}^*(y)=\inf_{m\in R^n}\varliminf_{p\to\infty}\frac{\pi}{t_p}\nu^*(y,m,t_p),\qquad \hat{\sigma}^*(y)=\inf_{m\in R^n}\varlimsup_{p\to\infty}\frac{\pi}{t_p}\nu^*(y,m,t_p),\tag{2}$$

$$\check{\zeta}^*(y)=\varliminf_{p\to\infty}\inf_{m\in R^n}\frac{\pi}{t_p}\nu^*(y,m,t_p),\qquad \hat{\zeta}^*(y)=\varlimsup_{p\to\infty}\inf_{m\in R^n}\frac{\pi}{t_p}\nu^*(y,m,t_p),\tag{3}$$

а при дополнительном условии $\lim\limits_{p\to\infty}(t_{p+1}-t_p)=\infty$ верно еще и следующее: если для некоторого числа $p\ge 0$ в пределах (2), (3) каждое из чисел t_p уменьшить на $T_p\le pT$, а каждое из чисел $\nu^{\alpha}(y,m,t_p)$ – на $\nu_p\le pT$, то значение предела от этого не изменится.

Доказательство этой леммы сводится к повторению рассуждений, проведенных при доказательстве леммы 7 [2].

Теорема 3 [9] позволяет внести небольшие изменения в лемму 4 [1], а именно, имеет место следующая

Лемма 4. При любом $\mu_0>0$ найдется такое $\varepsilon>0$, что для множества $M\equiv[\mu_0-\varepsilon,\mu_0+\varepsilon]$ некоторого числа $T_0>0$ и любой последовательности $k_1,k_2,\ldots\in N$ существует семейство уравнений $a_{\overline{\mu}}\in E^3$, зависящее от последовательности параметров $\overline{\mu}\equiv(\mu_1,\mu_2,\ldots)\in M^{\infty}$ и обладающее свойствами:

1) для каждой последовательности $\overline{\mu}\in M^{\infty}$ уравнение $a_{\overline{\mu}}\in E^3$ имеет набор решений y_1,y_2,y_3, удовлетворяющий при каждом $p\in N$ требованиям

$$(y_1,y_2,y_3)(t)=\begin{cases}\left(\mu_pe^{-t},\ e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t\right), & t_{p-1}+T_0\le t\le r_p,\\ \left(e^{-t}\sin t,\ \mu_pe^{-t},\ e^{-t}\cos t\right), & r_p+T_0\le t\le s_p,\\ \left(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t,\ \mu_pe^{-t}\right), & s_p+T_0\le t\le \tau_p,\\ \left(e^{-(t+N)}(\cos t+1),\ \cos 3t,\ \sin 3t\right), & \tau_p+T_0\le t\le q_p,\\ \left(\sin 3t,\ e^{-(t+N)}(\cos t+1),\ \cos 3t\right), & q_p+T_0\le t\le h_p,\\ \left(\cos 3t,\ \sin 3t,\ e^{-(t+N)}(\cos t+1)\right), & h_p+T_0\le t\le t_p,\end{cases}$$

где N – достаточно большое положительное число, $t_0\equiv 0$ и при каждом $p=1,2,\ldots$ последовательно обозначено

$$r_p \equiv t_{p-1} + T_0 + 2\pi k_p, \quad s_p \equiv r_p + T_0 + 2\pi k_p, \quad \tau_p \equiv s_p + T_0 + 2\pi k_p,$$
$$q_p \equiv \tau_p + T_0 + 2\pi k_p, \quad h_p \equiv q_p + T_0 + 2\pi k_p, \quad t_p \equiv h_p + T_0 + 2\pi k_p;$$

2) для некоторой константы d при любом $\overline{\mu} \in M^\infty$ выполнена оценка $\left\| a_{\overline{\mu}} \right\| \le d$;

3) функции $a_{\overline{\mu}}$ дифференцируемы по t и непрерывны по каждому из параметров $\mu_p \in M$ равномерно по $(p,t) \in R^+ \times N$.

Доказательство теоремы

1. В доказательстве основного результата [1] нули всех решений построенного уравнения являются нестрогими сменами знака, поэтому доказательство настоящей теоремы для нестрогих знаков можно считать завершенным.

2. При $\mu_0 = \sqrt{0{,}85}$ для последовательности $k_1 = 1,\ k_2 = 2, \ldots$ возьмем семейство уравнений $a_{\overline{\mu}} \in E^3$, существование которого утверждается в лемме 4. Внесем в это уравнение следующие изменения. При любых фиксированных значениях $p \in N$, $\overline{\mu} \in M^\infty$ для фундаментальной системы решений уравнения $a_{\overline{\mu}}$ на каждом из промежутков

$$\left[t_{p-1}, t_{p-1} + T_0\right], \quad \left[r_p, r_p + T_0\right], \quad \left[s_p, s_p + T_0\right], \quad \left[\tau_p, \tau_p + T_0\right], \quad \left[q_p, q_p + T_0\right], \quad \left[h_p, h_p + T_0\right] \qquad (2)$$

построим интерполяционные многочлены Эрмита [10, с. 36–41]. На концах отрезков (2) задаем значения этих первоначальных решений вместе с их производными до третьего порядка включительно. За счет корректного выбора узлов интерполяции [10, с. 36–41] внутри каждого отрезка и дальнейшего неограниченного увеличения их числа последовательность интерполяционных многочленов Эрмита будет равномерно сходиться на заданном отрезке к соответствующей функции. Выбираем число узлов настолько большим, чтобы внутри отрезков (2) соответствующие определители Вронского систем многочленов Эрмита были положительны. Тогда в уравнении $a_{\overline{\mu}}$ на каждом из рассматриваемых промежутков фундаментальную систему решений можно заменить соответствующей построенной системой многочленов Эрмита. При этом новое уравнение $b_{\overline{\mu}} \in E^3$ будет обладать всеми условиями 1)–3) леммы 4.

3. Зафиксируем произвольное $p \in N$ и для заданного решения $y \in S_*(b_{\overline{\mu}})$ вектора $m \in R^3$ обозначим

$$\nu^*(y,m,I_p) \equiv \nu^*(y,m,r_p,t_{p-1}+T_0) + \nu^*(y,m,s_p,r_p+T_0) + \nu^*(y,m,\tau_p,s_p+T_0) +$$
$$+ \nu^*(y,m,q_p,\tau_p+T_0) + \nu^*(y,m,h_p,q_p+T_0) + \nu^*(y,m,t_p,h_p+T_0).$$

Пусть задано отображение $\varphi : R_*^3 \to S_*(b_{\overline{\mu}})$, переводящее каждую ненулевую точку $c \equiv (c_1,c_2,c_3) \in R_*^3 \equiv R^3 \setminus \{0\}$ в решение $\varphi(c) = y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \in S_*(b_{\overline{\mu}})$, для которого обозначено

$$\kappa^*(c,m) \equiv \frac{\nu^*(y,m,I_p)}{12p}, \qquad \kappa^*(c) \equiv \inf_{m \in R^3} \kappa^+(c,m).$$

Найдем возможные значения величины $\kappa^*(c)$ при каком-либо фиксированном значении p, для других значений p эти величины не будут меняться.

Для любых векторов $g,h \in R_*^3$ через $C(g,h)$ обозначим любую содержащую их двумерную плоскость, а через l – объедение осей Oc_1, Oc_2, Oc_3 (ниже в доказательстве теоремы начало координат всюду игнорируется). Для векторов $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$ введем обозначение $L \equiv C(e_1,e_2) \cup C(e_2,e_3) \cup C(e_1,e_3)$.

3.1) Минимум в $\kappa^*(c),\ c \in l$, реализуется на векторе $m_1 = (5,0,1)$, поскольку на R^+ функция $\left\langle \psi\left(e^{-t}(\cos t + 1)\right), m_1 \right\rangle$ отделена от нуля. Следовательно, имеет место

$$\kappa^*(c) = \frac{4}{3}, \quad c \in l.$$

3.2) Для заданных функции f_1, f_2, f_3 введем обозначение

$$U(f_1, f_2, f_3) \equiv \{\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f + \gamma_3 f_3 \mid \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R \setminus \{0\}\}.$$

Заметим, для любых ненулевого вектора $m \neq m_2 = (9{,}0{,}1)$ и решения

$$y \in U\left(\cos 3t, e^{-(t+N)}(\cos t + 1)\right) \cup U\left(\sin 3t, e^{-(t+N)}(\cos t + 1)\right)$$

на соответствующем промежутке

$$\left(\tau_p + T_0,\ q_p\right], \quad \left(q_p + T_0,\ h_p\right], \quad \left(h_p + T_0,\ t_p\right] \tag{3}$$

нули функции $\langle \psi y, m \rangle$ являются точками строгой смены знака. Для вектора $m_3 = (2 - \gamma, 2{,}1)$ при достаточно малом $\gamma > 0$ функция $\langle \psi y, m_3 \rangle$ при любом

$$y \in U\left(e^{-t}, e^{-t}\cos t\right) \cup U\left(e^{-t}, e^{-t}\sin t\right)$$

не будет иметь нулей на R^+, поэтому

$$\kappa^*(c) = \frac{5}{3}, \quad c \in L \setminus l.$$

3.3) Минимум в определении величины

$$\kappa^*(c), \quad c \in R^3_* \setminus L \tag{4}$$

реализуется на векторе $m = m_2$, поскольку для любого решения

$$y \in U\left(\cos 3t, \sin 3t, e^{-(t+N)}(\cos t + 1)\right)$$

на каждом из промежутков (3) функция $\langle \psi y, m_2 \rangle$ отделена от нуля, а при любом другом векторе $m \in R^3_*$ функция $\langle \psi y, m \rangle$ на промежутках (3) будет иметь $18p$ гиперкорней.

Теперь для вычисления значений величины (4) остается посчитать число гиперкорней функции $\langle \psi y, m_2 \rangle$ на каждом из промежутков

$$\left(t_{p-1} + T_0, r_p\right], \quad \left(r_p + T_0, s_p\right], \quad \left(s_p + T_0, \tau_p\right]. \tag{5}$$

На том из трех промежутков (5), на котором $y_i(t) = \mu_p e^{-t}$, функция $\langle \psi y, m_2 \rangle$ представима в виде

$$\langle \psi y, m_2 \rangle = e^{-t}\sqrt{85\left(c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2\right)}\sin(t + \theta) + 10 c_i \mu_p e^{-t},$$

где $\theta \in R$ – вспомогательный угол. Умножив эту функцию на $\dfrac{e^t}{\sqrt{85}}$, будем иметь

$$\frac{e^t \langle \psi y, m_2 \rangle}{\sqrt{85}} = \sqrt{c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2}\,\sin(t + \theta) + c_i \rho_p, \qquad \rho_p = \frac{10\mu_p}{\sqrt{85}}.$$

Пусть для вектора $c \in R^3_*$ и номера $i \in \{1, 2, 3\}$ выполнено условие

$$c_i^2 \rho_p^2 > c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2 \tag{6}$$

(здесь и всюду ниже индекс 0 отождествлен с индексом 3, а индекс 4 – с индексом 1). Тогда имеет место оценка $\sqrt{c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2} < \left|c_i \rho_p\right|$, гарантирующая отсутствие гиперкорней функции $\langle \psi y, m_2 \rangle$ на рассматриваемом промежутке.

Аналогично, при условии $c_i^2 \rho_p^2 < c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2$ на упомянутом промежутке функция $\langle \psi y, m_2 \rangle$ имеет $2p$ гиперкорней, а при условии $c_i^2 \rho_p^2 = c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2$ – бесконечно много гиперкорней. В данном случае минимум в определении гиперчастот реализуется на векторе $m_4 = (2{,}2{,}1)$, так как на каждом из промежутков (5) имеем представление

$$\langle \psi y, m_4 \rangle = A \mu_p e^{-t}, \quad A \neq 0,$$

а на каждом из промежутков (3) –

$$\langle \psi y, m_4 \rangle = B_1 e^{-(t+N)} + B_2 \sin 3t + B_3 \cos 3t, \quad B_1, B_2, B_3 \in R \setminus \{0\}.$$

Следуя И.Н. Сергееву, обозначим через V_i подмножество пространства R^3, состоящее из точек, удовлетворяющих неравенству (6), и представляющее собой в пространстве R^3 круглый конус (точнее, его внутренность, каковую и будем подразумевать в дальнейшем под словом «конус»), ось которого совпадает с i-й осью координат.

Далее, через $U_{i,j} \subset R^3_*$ обозначим множество точек, принадлежащих ровно i из трех конусов V_1, V_2, V_3 и при этом лежащих на границе ровно j из оставшихся.

Если $\mu_p = \sqrt{0{,}85}$ (которое равносильно $\rho_p = 1$) при любом $p \in N$, то конусы V_1, V_2 и V_3 только касаются друг друга, причем только попарно (см. п. Б доказательства леммы 16 [2]). Поэтому пространство R^3_* представляет собой объединение непустых множеств $U_{0,0}$, $U_{0,1}$, $U_{1,0}$ и $U_{0,2}$, а значит, при любом $c \in R^3_* \setminus L$ справедливы равенства

$$\kappa^*(c) = \begin{cases} 3/2, & c \in U_{0,1} \cup U_{0,2}, \\ 1/3, & c \in U_{1,0}, \\ 1/2, & c \in U_{0,0}. \end{cases}$$

Если же выполняется неравенство $\mu_p > \sqrt{0{,}85}$ (которое равносильно $1 < \rho_p < \sqrt{2}$) при любом $p \in N$, то конусы уже попарно пересекаются, но не имеют общих для них всех точек, даже граничных (см. п. В доказательства леммы 16 [2]). При этом также и граница любого конуса пересекается с любым другим конусом, как и с его границей.

Следовательно, для непустых множеств $U_{0,0}$, $U_{0,1}$, $U_{1,0}$, $U_{0,2}$, $U_{2,0}$ и $U_{1,1}$ выполняется равенство $R^3_* = U_{0,0} \cup U_{0,1} \cup U_{1,0} \cup U_{0,2} \cup U_{2,0} \cup U_{1,1}$, из которого при любом $c \in R^3_* \setminus L$ справедливы равенства

$$\kappa^*(c) = \begin{cases} 3/2, & c \in U_{0,1} \cup U_{0,2} \cup U_{1,1}, \\ 1/3, & c \in U_{1,0}, \\ 1/6, & c \in U_{2,0}, \\ 1/2, & c \in U_{0,0}. \end{cases}$$

4. Не умаляя общности, можно считать, что для любого решения $y \in S_*(b_{\bar{\mu}})$ все нули функций $\langle \psi y, m_1 \rangle$, $\langle \psi y, m_2 \rangle$, $\langle \psi y, m_4 \rangle$ являются строгими сменами знака, поскольку в противном случае этого можно добиться варьированием узлов интерполяции. В самом деле, для этого достаточно взять на участках «склейки» (2) интерполяционные многочлены Эрмита разных степеней, и тогда предположение о существовании кратного нуля любой из функций $\langle \psi y, m_1 \rangle$, $\langle \psi y, m_2 \rangle$, $\langle \psi y, m_4 \rangle$ приводит к тому, что $y = 0$. Поэтому найдется такое число T, что перечисленные функции на любом промежутке вида (2) имеют не более чем T гиперкорней.

Следовательно, используя лемму 3 и рассуждения, проведенные в доказательстве основного результата [1], получим

$$\hat{\zeta}^*(y) = \hat{\sigma}^*(y) = \check{\zeta}^*(y) = \check{\sigma}^*(y) = \kappa^*(c), \qquad y \in S_*(b_{\bar{\mu}}),$$

а значит, множества значений величины κ^* в зависимости от последовательности параметров оказываются следующими:

$$E(\kappa^*) = \{1/3,\ 3/2,\ 1/2,\ 4/3,\ 5/3\}, \qquad \mu_p = \sqrt{0{,}85}, \qquad p \in N,$$

$$E(\kappa^*) = \{1/6, 1/3,\ 3/2,\ 1/2,\ 4/3,\ 5/3\}, \qquad \mu_p \in \left(\sqrt{0{,}85}; \sqrt{0{,}85} + \varepsilon\right], \quad p \in N.$$

5. Для уравнения $b_{\sqrt{0{,}85}}$ из построенного в настоящем доказательстве семейства, взятое

при постоянной последовательности $\mu_1 = \mu_2 = ... = \sqrt{0{,}85}$, выполняется равенство $\omega_1^*\left(b_{\sqrt{0{,}85}}\right) = 1/3$.

Возьмем последовательность параметров $\overline{\mu} \in \left(\sqrt{0{,}85}; \sqrt{0{,}85} + \varepsilon\right]^{\infty}$, удовлетворяющую условию $\mu_p \to \sqrt{0{,}85}$ при $p \to \infty$. Тогда в силу непрерывности семейства уравнений по $\overline{\mu}$ найдется возмущенное уравнение $b_{\overline{\mu}}$ из того же семейства, обладающее свойствами: $\omega_1^*(b_{\overline{\mu}}) = 1/6, \quad b_{\overline{\mu}} \in \mathrm{B}(b_{\sqrt{0{,}85}})$. Откуда следует, что функционал ω_1^* не инвариантен в точке $b_{\sqrt{0{,}85}}$ относительно бесконечно малых возмущений.

Теорема полностью доказана.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

Примечания:

1. Сташ А.Х. О разрывности младших частот нулей и корней на множестве линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2016. Вып. 1 (176). С. 17–24. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Сергеев И.Н. Определения и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
3. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 1. С. 119–138.
4. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1577.
5. Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.
6. Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика и механика, 2011. № 6. С. 21–26.
7. Сташ А.Х. О разрывности некоторых крайних частот на множестве линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференциальные уравнения 2015. Т. 51, № 11. С. 1552–1553.
8. Сташ А.Х. О существовании линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами полной и векторной частот // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2013. Вып. 3 (122). С. 9–17. URL: http://vestnik.adygnet.ru
9. Сергеев И.Н. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика и механика. 2009. № 3. С. 25–33.
10. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

References:

1. Stash A.Kh. On discontinuity of lower zero and root frequencies on a set of third order linear homogeneous differential equations // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2016. Iss. 1 (176). P. 17–24. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of the linear equation // Works of Seminar of I.G. Petrovsky. 2006. Iss. 25. P. 249–294.
3. Sergeev I.N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems // Mathematical Collection. 2013. Vol. 204, No. 1. P. 119–138.
4. Sergeev I.N. Determination of full frequencies of solutions of the linear equation // Differential Equations. 2008. Vol. 44, No. 11. P. 1577.
5. Sergeev I.N. On the theory of Lyapunov indices of linear systems of differential equations // Works of the Seminar of I.G. Petrovsky. 1983. Iss. 9. P. 111–166.
6. Sergeev I.N. Unsteadiness and roaming of solutions of the second order differential equation // Bulletin of Moscow University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. 2011. No. 6. P. 21–26.
7. Stash A.Kh. On discontinuity of some extreme frequencies in the set of homogeneous linear differential equations of the third order // Differential Equations. 2015 Vol. 51, No. 11. P. 1552–1553.
8. Stash A.Kh. On existence of third-order linear differential equation with continuous ranges of complete and vector frequencies // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2013. Iss. 3 (122). P. 9–17. URL: http://vestnik.adygnet.ru
9. Sergeev I.N. On control of solutions of the linear differential equation // Bulletin of the Moscow University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. 2009. No. 3. P. 25–33.
10. Kalitkin N.N. Numerical methods. M.: Nauka, 1978. 512 pp.