УДК 519.16+514.172.45
ББК 22.174.2
Ш 78

Шовгенов Д.А.
Аспирант кафедры дискретного анализа Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова, Ярославль, e-mail: djsh92@mail.ru

Комбинаторно-геометрические характеристики задачи о сбалансированном полном двудольном подграфе*

(Рецензирована)

Аннотация. *Изучается плотность графа многогранника следующей задачи. Задан полный реберно-взвешенный двудольный граф. Рассматриваются все его полные подграфы с фиксированным количеством вершин. Требуется найти среди них подграф с минимальным (максимальным) суммарным весом ребер.*
Ключевые слова: *двудольный граф, полиэдральный граф, плотность графа, NP-полная задача.*

Shovgenov D.A.
Post-graduate student of the Discrete Analysis Department, Yaroslavl State University named after P.G. Demidov, Yaroslavl, e-mail: djsh92@mail.ru

Combinatorial-geometric characteristics of the problem of a balanced complete bipartite subgraph

Abstract. *In this paper, we study graph of polyhedron of the following problem. A complete edge-weighted bipartite graph is given. We consider all of its complete subgraphs with fixed number of vertices. It is required to find among them a subgraph with the minimum (maximum) total weight of edges.*
Keywords: *bipartite graph, 1-skeleton, the clique number, NP-complete problem.*

1. Введение

Известно, что вычислительная сложность задач комбинаторной оптимизации отражает некоторые свойства многогранников, порождаемых этими задачами. В частности, одной из ключевых характеристик является плотность графа многогранника, которая служит нижней оценкой временной трудоемкости для широкого класса алгоритмов [1].

Ниже рассматривается задача комбинаторной оптимизации, представляющая собой задачу на графах и допускающая следующую постановку. Заданы полный реберно-взвешенный двудольный граф и некоторое множество $\widetilde{X}$ его подграфов. Требуется найти подграф из $\widetilde{X}$, имеющий минимальный (максимальный) вес, под которым понимается сумма весов всех входящих в него ребер.

Сбалансированный полный двудольный подграф (Balanced complete bipartite subgraph, BCBS) [2]. Требуется найти полный двудольный подграф максимального веса, при условии, что размер каждой его доли равен заданному числу k.

2. Сложность задачи BCBS

Рассмотрим близкую к BCBS задачу распознавания $\text{BCBS}_{расп}$ следующего вида. Заданы полный реберно-взвешенный двудольный граф $G=G(V, E)$ и целое число M. Требуется выяснить, существует ли полный двудольный подграф с k вершинами в каждой доле, сумма весов ребер которого не меньше, чем M.

Теорема 1. *Задача $BCBS_{расп}$ NP-полна.*

Доказательство.

Принадлежность $\text{BCBS}_{расп}$ классу NP легко следует из того, что в случае положительного ответа достаточно указать соответствующий подграф, чтобы за полиномиальное время убедиться в том, что его вес не меньше, чем M.

* *Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 14-01-00333.*

Теперь осуществим полиномиальное сведение к нашей задаче известной *NP*-полной задачи КЛИКА [2], предварительно напомнив ее формулировку.

Заданы граф $g=g(U, E)$ и натуральное число k. Требуется выяснить, имеются ли в графе g k попарно смежных вершин (иначе, есть ли в графе клика размера k).

Рассмотрим индивидуальную задачу КЛИКА. По заданным g и k построим индивидуальную задачу $\mathrm{BCBS}_{расп}$, полагая $M=2k^2-k$, а в качестве полного двудольного реберно-взвешенного графа выберем граф G с множествами $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ вершин в одной доле и $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ – в другой, где $n=|U|$. Значения $c_{ij}=c(u_i,v_j)$ весов ребер определим формулой

$$c_{ij}=\begin{cases} k, & если\ \ i=j, \\ 1, & если\ \ (u_i,v_j)\in E, \\ 0, & если\ \ (u_i,v_j)\notin E. \end{cases}$$

Покажем, что граф g имеет клику размера k в том и только том случае, когда в двудольном графе G есть полный двудольный подграф с k вершинами в каждой доле, вес которого не меньше M.

Действительно, если в графе g есть клика $U'\subseteq U$, $|U'|=k$, то вес сбалансированного полного двудольного подграфа графа G, одна доля которого U', а вторая – $\{v_i : u_i\in U'\}$, равен

$$\sum\nolimits_{u_i\in U'} c_{ii}+\sum\nolimits_{u_i,u_j\in U',i\neq j} c_{ij}=k^2+k(k-1)=2k^2-k\,.$$

Обратно, если в графе G есть сбалансированный полный двудольный подграф с k вершинами в каждой доле и весом, не меньшим, чем $M=2k^2-k$, то у этого подграфа вес каждого ребра положителен, и среди них ровно k ребер вида (u_i, v_i). Следовательно, множество вершин U, состоящее из таких $u_i\in U$, для которых (u_i, v_i) принадлежит нашему двудольному подграфу, образует клику из k вершин графа g.

Теорема 1 доказана.

3. Многогранник и полиэдральный граф задачи BCBS

Обозначим, как и выше, через G полный двудольный граф с n вершинами в каждой доле. Пусть $m=n^2$ – общее количество ребер графа G. Рассмотрим пространство R^m, координаты которого ассоциированы с ребрами G. Выберем натуральное k $(k\leq n)$ и рассмотрим совокупность $\widetilde{X}$ всех сбалансированных полных двудольных подграфов $\widetilde{x}$ графа G с k вершинами в каждой доле. Для каждого $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$ определим его характеристический вектор $x\in R^m$, положив равными единице значения тех координат, которые соответствуют ребрам $\widetilde{x}$, при этом приняв равными нулю значения остальных координат. Совокупность всех характеристических векторов обозначим через X. Рассмотрим вектор $c\in R^m$, составленный из весов ребер графа G. Тогда поставленная задача является задачей оптимизации линейной функции (c, x) на конечном множестве X.

Обозначим через $P(X)$ многогранник задачи $P(X)=\mathrm{conv}X$. Полиэдральным графом задачи называют граф многогранника, множеством вершин которого служит множество геометрических вершин, а множеством ребер – совокупность геометрических ребер (множество одномерных граней). Для описания графа многогранника бывает полезным следующее утверждение [3]:

Лемма 1. *Две вершины x и y многогранника P смежны тогда и только тогда, когда они строго отделяются от множества остальных его вершин, или, иными словами, они несмежны тогда и только тогда, когда некоторая их выпуклая комбинация совпадает с некоторой выпуклой комбинацией остальных вершин, то есть найдутся такие $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, $\gamma_z\geq 0$, для которых*

$$\alpha x + \beta y = \sum \gamma_z z, \tag{1}$$

$$\alpha + \beta = \sum \gamma_z = 1, \tag{2}$$

и суммирование проводится по всем вершинам, отличным от x *и* y.

Следующее утверждение дает эффективное описание полиэдрального графа задачи BCBS (ср. с [4]).

Теорема 2. *Для того чтобы две вершины* x *и* y *многогранника* $P(X)$ *были смежны, необходимо и достаточно, чтобы либо соответствующие двудольные подграфы* $\tilde{x}$ *и* $\tilde{y}$ *не имели одинаковых долей, либо имели по одной одинаковой доле, а их вторые доли отличались не более чем на одну вершину.*

Доказательство.

Достаточность. Предположим сначала, что соответствующие x и y подграфы $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ не имеют совпадающих долей. Рассуждая от противного, допустим, что x и y несмежны. Воспользуемся леммой 1 и рассмотрим $z \in X$, для которого $\gamma_z>0$. Обозначим через U_x, U_y, U_z подмножества вершин из $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$, через V_x, V_y, V_z – подмножества из $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, а через E_x, E_y, E_z – множества ребер подграфов $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и $\tilde{z}$ соответственно. Из условий (1), (2) следует вложение

$$E_z \subseteq E_x \cup E_y. \tag{3}$$

Так как выполняются условия $z \neq x$ и $z \neq y$, то U_z не совпадает ни с множеством U_x, ни с U_y, а V_z не совпадает ни с V_x, ни с V_y. Но это противоречит вложению (3).

Предположим теперь, что $U_x=U_y$, а

$$|V_x \backslash V_y|=1. \tag{4}$$

Снова рассуждая от противного и допуская, что x и y несмежны, применим лемму 1 и рассмотрим $z \in X$, для которого $\gamma_z>0$. Из вложения (3) вытекает, что $U_x=U_y=U_z$ и $V_z \subseteq V_x \cup V_y$. Но тогда, учитывая (4), получим одно из равенств $V_x=V_y$ или $V_x=V_y$, откуда следует, что $z=x$ или $z=y$. Снова приходим к противоречию. Второй вариант – когда $V_x=V_y$, а $|U_x \backslash U_y|=1$, рассматривается аналогично.

Необходимость. Пусть x и y смежны и пусть $U_x=U_y$. Докажем равенство (4). Снова рассуждая от противного, предположим, что (4) не выполняется. Так как $V_x \neq V_y$, иначе $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ совпадали бы, то $|V_x \backslash V_y| \geq 2$. Пусть $v_1 \in V_x \backslash V_y$ и $v_2 \in V_y \backslash V_x$. Рассмотрим два новых подграфа $\tilde{X} - \tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$, у которых $U_{z_1}=U_{z_2}=U_x$, $V_{z_1}=(V_x \backslash \{v_1\}) \cup \{v_2\}$, $V_{z_2}=(V_x \backslash \{v_2\}) \cup \{v_1\}$. Непосредственно проверяется равенство

$$x+y=z_1+z_2,$$

которое означает, что x и y несмежны, что приводит к противоречию.

Теорема доказана.

Из доказанного критерия смежности вершин многогранника $P(X)$ вытекает неполиномиальная нижняя оценка кликового числа, или плотности его полиэдрального графа.

Теорема 3. *Плотность* P_{nk} *графа многогранника* $P(X)$ *задачи сбалансированный полный двудольный подграф удовлетворяет неравенству:*

$$P_{nk} \geq C_n^k. \tag{5}$$

Доказательство. Для получения оценки (5) выберем среди вершин одной доли $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ графа G k вершин (количество вариантов равно C_n^k), а из другой доли $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ выберем вершины с такими же номерами. Тогда в силу теоремы 2 любые два полных двудольных подграфа с такими наборами вершин порождают смежные точки множества X.

Теорема доказана.

4. Заключение

Установлено, что задача о поиске максимального сбалансированного полного двудольного подграфа в полном двудольном графе является *NP*-трудной и имеет сверхполиномиальную нижнюю оценку плотности полиэдрального графа, которая получена на основе его эффективного описания.

Примечания:

1. Бондаренко В.А., Максименко А.Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. М., 2008. 184 с.
2. Гэри М.Р., Джонсон Д.С. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
3. Бренстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988. 240 с.
4. Антонов А.И., Бондаренко В.А. Полиэдральные графы задач РАЗБИЕНИЕ НА ТРЕУГОЛЬНИКИ И ПОЛНЫЙ ДВУДОЛЬНЫЙ ПОДГРАФ // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, № 6. С. 101–106.

References:

1. Bondarenko V.A., Maksimenko A.N. Geometric constructions and complexity in combinatorial optimization. M., 2008. 184 pp.
2. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and Intractability. M.: Mir, 1982. 416 pp.
3. Brondsted A. An introduction to convex polytopes. M.: Mir, 1988. 240 pp.
4. Antonov A.I., Bondarenko V.A. Polyhedral graphs of graph partitioning and complete bipartite subgraph problems // Modelling and Analysis of Information Systems. 2012. Vol. 19, No. 6. P. 101–106.