УДК 517.926
ББК 22.161.6
С 78

Сташ А.Х.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593905, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

К вопросу о строгих неравенствах между нижними и верхними главными частотами дифференциального уравнения третьего порядка

(Рецензирована)

Аннотация. *Установлены строгие неравенства между нижними и верхними главными частотами линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка с непрерывными ограниченными на полуоси коэффициентами.*

Ключевые слова: *линейное дифференциальное уравнение, колеблемость решения, число нулей функции, полная частота, векторная частота.*

Stash A.Kh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593905, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

On rigorous inequalities between the lower and higher main frequencies of the third order differential equation

Abstract. *Rigorous inequality conditions have been obtained between lower and higher main frequencies of linear homogeneous third-order differential equation with continuous bounded coefficients.*

Keywords: *linear differential equation, variability of solutions, number of zero function, full frequency, vector frequency.*

Введение и формулировка результата

Для заданного натурального n обозначим через E^n множество линейных однородных дифференциальных уравнений n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \qquad t \in R^+ \equiv [0;+\infty),$$

с ограниченной непрерывной строкой коэффициентов $a = (a_1,\ldots,a_n): R^+ \to R^n$ (каждую такую строку будем отождествлять с соответствующим уравнением). Через C^n обозначим подмножество множества E^n, состоящее из уравнений с постоянными коэффициентами. Линейное пространство всех решений $y: R^+ \to R$ уравнения $a \in E^n$ обозначим через $S(a)$, а подмножество всех его ненулевых решений – через $S_*(a)$. В дальнейшем вообще звездочкой в качестве нижнего индекса у линейного пространства будем обозначать факт выкалывания в нем нуля.

Определение 1 [1–3]**.** Скажем, что скалярная функция $y \in C^n(R^+)$ имеет *строгую (нестрогую) смену знака* в точке $t > 0$, если в любой окрестности этой точки она принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения, а через $\nu^\alpha(y,t)$ при $\alpha = -,\mp,0,+,*$ соответственно обозначим:

– число *ее строгих смен знака* на промежутке $(0,t]$;

– число *ее нестрогих смен знака* на промежутке $(0,t]$;

– число *ее нулей* на промежутке $(0,t]$;

– *число ее корней* на промежутке $(0,t]$, *то есть нулей с учетом их кратности*;

– число *ее гиперкорней* на промежутке $(0,t]$, то есть при его подсчете каждый некратный корень берется ровно один раз, а кратный – сразу бесконечно много раз.

Определение 2 [3]. Каждому решению $y \in S_*(a)$ произвольного уравнения $a \in E^n$ поставим в соответствие вектор $\psi y \equiv \left(y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)}\right)$ и для любого $m \in R^n_*$ обозначим $\nu^\alpha(y,m,t) \equiv \nu^\alpha\left(\langle \psi y, m \rangle, t\right)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение, после чего зададим его нижние (верхние) *полные и векторные частоты*

$$\check{\sigma}^\alpha(y) = \inf_{m \in R^n} \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y,m,t) \qquad \left(\hat{\sigma}^\alpha(y) = \inf_{m \in R^n} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y,m,t)\right),$$

$$\check{\zeta}^\alpha(y) = \underline{\lim_{t\to\infty}} \inf_{m \in R^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y,m,t) \qquad \left(\hat{\zeta}^\alpha(y) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \inf_{m \in R^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y,m,t)\right)$$

строгих или нестрогих смен знаков, нулей и корней или гиперкорней при $\alpha = -, \mp, 0, +, *$ соответственно.

К определениям 1 и 2 добавим обозначение $\nu^-(y,m,t,s) \equiv \nu^-(y,m,t) - \nu^-(y,m,s)$.

Определение 3 [1, 3]. Для любого $\alpha = -, \mp, 0, +, *$ при каждом $\omega^\alpha = \hat{\zeta}^\alpha, \hat{\sigma}^\alpha, \check{\zeta}^\alpha, \check{\sigma}^\alpha$ определим главные (характеристические) частоты ω^α уравнения $a \in E^n$ формулами

$$\omega^\alpha_{\bar{i}}(a) = \inf_{D \in G^i(a)} \sup_{y \in D_*} \omega^\alpha(y), \qquad \omega^\alpha_{\underline{i}}(a) = \sup_{D \in G^{n-i+1}(a)} \inf_{y \in D_*} \omega^\alpha(y),$$

где $i = 1, ..., n$, а через $G^i(a)$ обозначено множество i-мерных подпространств пространства $S(a)$.

Для любых уравнений $a \in E^n$, функционала ω^α $(\alpha = -, \mp, 0, +, *)$ из доказательства теоремы VI [1] непременно следуют соотношения:

$$\omega^\alpha_{\bar{1}}(a) = \omega^\alpha_{\underline{1}}(a), \quad \omega^\alpha_{\bar{n}}(a) = \omega^\alpha_{\underline{n}}(a), \qquad \omega^\alpha_{\bar{i}}(a) \ge \omega^\alpha_{\underline{i}}(a), \qquad i = 2, ..., n-1.$$

Известно [3–7], что последние неравенства превращаются в равенства

$$\omega^\alpha_{\bar{i}}(a) = \omega^\alpha_{\underline{i}}(a), \qquad i = 1, ..., n,$$

для любого $a \in C^n$.

Понятно, что для уравнений первого и второго порядков нет смысла говорить о строгих неравенствах между верхними и нижними главными частотами, поскольку их спектры (то есть множества значений на всех ненулевых решениях) состоят из одного числа (см. для уравнений второго порядка [8]).

В работе [9] установлено существование уравнения $a \in E^3$, обладающее при любом $\omega^- = \hat{\zeta}^-, \hat{\sigma}^-, \check{\zeta}^-, \check{\sigma}^-$ свойством $\omega^-_{\bar{2}}(a) > \omega^-_{\underline{2}}(a)$. Для остальных характеристик колеблемости вопрос выполнения аналогичного неравенства оставался открытым. Этому вопросу посвящена настоящая работа.

Вспомогательное утверждение

Лемма [10]. *При любом* $\mu_0 > 0$ *найдется такое* $\varepsilon > 0$, *что для множества* $M \equiv [\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$ *некоторого числа* $T_0 > 0$ *и любой последовательности* $k_1, k_2, ... \in N$ *существует семейство уравнений* $a_{\bar{\mu}} \in E^3$, *зависящее от последовательности параметров* $\bar{\mu} \equiv (\mu_1, \mu_2, ...) \in M^\infty$ *и обладающее свойствами:*

1) для каждой последовательности $\bar{\mu} \in M^\infty$ *уравнение* $a_{\bar{\mu}} \in E^3$ *имеет набор решений* y_1, y_2, y_3, *удовлетворяющий при каждом* $p \in N$ *требованиям*

$$(y_1, y_2, y_3)(t) = \begin{cases} \left(\mu_p e^{-t},\ e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t\right), & t_{p-1} + T_0 \le t \le r_p, \\ \left(e^{-t}\sin t,\ \mu_p e^{-t},\ e^{-t}\cos t\right), & r_p + T_0 \le t \le s_p, \\ \left(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t,\ \mu_p e^{-t}\right), & s_p + T_0 \le t \le \tau_p, \\ \left(e^{-t}(\cos t + 1),\ \cos 3t,\ \sin 3t\right), & \tau_p + T_0 \le t \le q_p, \\ \left(\sin 3t,\ e^{-t}(\cos t + 1),\ \cos 3t\right), & q_p + T_0 \le t \le h_p, \\ \left(\cos 3t,\ \sin 3t,\ e^{-t}(\cos t + 1)\right), & h_p + T_0 \le t \le t_p, \end{cases}$$

где $t_0 \equiv 0$, *и при каждом* $p = 1,2,...$ *последовательно обозначено*

$$r_p \equiv t_{p-1} + T_0 + 2\pi k_p, \quad s_p \equiv r_p + T_0 + 2\pi k_p, \quad \tau_p \equiv s_p + T_0 + 2\pi k_p,$$
$$q_p \equiv \tau_p + T_0 + 2\pi k_p, \quad h_p \equiv q_p + T_0 + 2\pi k_p, \quad t_p \equiv h_p + T_0 + 2\pi k_p.$$

Формулировка и доказательство результатов

С помощью методов работ [1, 9, 10] докажем следующую

Теорема. *Существуют уравнение* $a \in E^3$, *удовлетворяющее при каждом* $\omega = \hat{\zeta}, \hat{\sigma}, \breve{\zeta}, \breve{\sigma}$ *неравенствам*

$$\omega^{\alpha}_{\underline{2}}(a) < \omega^{\alpha}_{\overline{2}}(a), \qquad \alpha = \mp, 0, +, *.$$

Доказательство теоремы.

1. При некоторой последовательности параметров

$$\overline{\mu}_0 \in \left[\sqrt{0{,}85} - \varepsilon, \sqrt{0{,}85}\right)^{\infty}$$

и последовательности $k_1 = 1, k_2 = 2,...$ возьмем уравнение $b_{\overline{\mu}_0} \in E^3$, существование которого утверждается в лемме, и внесем небольшие изменения: при любых фиксированных значениях $p \in N$ на промежутках

$$\left[\tau_p + T_0,\ q_p\right]; \quad \left[q_p + T_0,\ h_p\right]; \quad \left[h_p + T_0,\ t_p\right] \tag{1}$$

функцию $e^{-t}(\cos t + 1)$ заменяем (теорема 3 [11] позволяет это сделать) на $e^{-(t+N)}(\cos t + 1)$, где N – некоторое достаточно большое число, в результате чего получим новое уравнение $a_{\overline{\mu}_0} \in E^3$.

2. Зафиксируем произвольное $p \in N$ и для заданного решения $y \in S_*(a_{\overline{\mu}_0})$, вектора $m \in R^3_*$ при любом $\alpha = \mp, 0, +, *$ обозначим

$$\nu^{\alpha}(y, m, I_p) \equiv \nu^{\alpha}(y, m, r_p, t_{p-1} + T_0) + \nu^{\alpha}(y, m, s_p, r_p + T_0) + \nu^{\alpha}(y, m, \tau_p, s_p + T_0) +$$
$$+ \nu^{\alpha}(y, m, q_p, \tau_p + T_0) + \nu^{\alpha}(y, m, h_p, q_p + T_0) + \nu^{\alpha}(y, m, t_p, h_p + T_0).$$

Пусть задано отображение $\varphi : R^3_* \to S_*(a_{\overline{\mu}_0})$, переводящее каждую ненулевую точку $c \equiv (c_1, c_2, c_3) \in R^3_*$ в решение

$$\varphi(c) = y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \in S_*(a_{\overline{\mu}_0}), \tag{2}$$

для которого обозначены

$$\kappa^{\alpha}(c, m) \equiv \frac{\nu^{\alpha}(y, m, I_p)}{12p}, \qquad \kappa^{\alpha}(c) \equiv \inf_{m \in R^3_*} \kappa^{\alpha}(c, m).$$

Заметим, что в последних формулах явно присутствует p, но величина $\kappa^{\alpha}(c, m)$ вообще не зависит от p, а зависит от векторов m и c (это видно из вида фундаментальной системы решений уравнения $a_{\overline{\mu_0}}$).

3. Выберем векторы $m_1 = (5,0,1)$, $m_2 = (9,0,1)$, $m_3 = (2,2,1)$. Не умаляя общности, можно считать, что для любого решения $S_*(a_{\overline{\mu_0}})$ все нули функций $\langle \psi y, m_1 \rangle$, $\langle \psi y, m_2 \rangle$, $\langle \psi y, m_3 \rangle$ являются строгими сменами знака, поскольку в противном случае этого можно добиться. В самом деле, для этого достаточно взять на участках «склейки» интерполяционные многочлены Эрмита (см. [10]) разных степеней и тогда предположение о существовании кратного нуля у любой из функций $\langle \psi y, m_1 \rangle$, $\langle \psi y, m_2 \rangle$, $\langle \psi y, m_3 \rangle$ приводит к тому, что $y = 0$.

Следовательно, из рассуждений работы [10] следует, что любое решение (2) удовлетворяет равенствам

$$\hat{\zeta}^{\alpha}(y) = \hat{\sigma}^{\alpha}(y) = \breve{\zeta}^{\alpha}(y) = \breve{\sigma}^{\alpha}(y) = \kappa^{\alpha}(c), \qquad \alpha = \mp, 0, +, *.$$

На основании этих равенств, с учетом изоморфизма $\varphi : R_*^3 \to S_*(a_{\overline{\mu_0}})$, главные частоты уравнения $a_{\overline{\mu_0}} \in E^3$ можно вычислять по формулам

$$\omega_{\overline{2}}^{\alpha}(a_{\overline{\mu_0}}) = \inf_{D \in G^3} \sup_{c \in D_*} \kappa^{\alpha}(c), \qquad \omega_{\underline{2}}^{\alpha}(a_{\overline{\mu_0}}) = \sup_{D \in G^3} \inf_{c \in D_*} \kappa^{\alpha}(c), \qquad \alpha = \mp, 0, +, *,$$

где G^2 – множество всех двумерных плоскостей, проходящих через начало координат.

4. Для каждого $\alpha = \mp, 0, +, *$ найдем возможные значения величины $\kappa^{\alpha}(c)$ при каком-либо фиксированном значении p, для других значений p эти величины не будут меняться.

Для любых векторов $g, h \in R_*^3$ через $C(g,h)$ обозначим любую содержащую их двумерную плоскость, а через l – объединение осей Oc_1, Oc_2, Oc_3 (ниже в доказательстве теоремы начало координат всюду игнорируется). Для векторов $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ введем обозначение $L \equiv C(e_1, e_2) \cup C(e_2, e_3) \cup C(e_1, e_3)$.

4.1) Минимум в $\kappa^{\pm}(c)$, $\kappa^{0}(c)$, $\kappa^{+}(c)$, $\kappa^{*}(c)$, $c \in l$ реализуется на векторе m_1, поскольку на R^+ функция $\langle \psi\big(e^{-(t+N)}(\cos t + 1)\big), m_1 \rangle$ отделена от нуля. Следовательно, имеет место цепочка равенств

$$\kappa^{\pm}(c) = \kappa^{0}(c) = \kappa^{+}(c) = \kappa^{*}(c) = \frac{4}{3}, \ \ c \in l.$$

4.2) Для заданных функций f_1, f_2, f_3 введем обозначение

$$U(f_1, f_2, f_3) \equiv \{\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + \gamma_3 f_3 \mid \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R \setminus \{0\}\}.$$

Заметим, для любого вектора $m \neq m_2$ решения

$$y \in U\big(0,\ \cos 3t,\ e^{-(t+N)}(\cos t + 1)\big) \cup U\big(0,\ \sin 3t,\ e^{-(t+N)}(\cos t + 1)\big)$$

нули функции $\langle \psi y, m \rangle$ на соответствующем промежутке из (1) являются точками смены знака.

Для вектора $m_4 = (2 - \gamma, 2, 1)$ при достаточно малом $\gamma > 0$ функция $\langle \psi y, m_4 \rangle$ при любом

$$y \in U\big(0,\ e^{-t},\ e^{-t}\cos t\big) \cup U\big(0,\ e^{-t},\ e^{-t}\sin t\big)$$

не будет иметь гиперкорней на R^+, поэтому

$$\kappa^{\pm}(c) = \kappa^{0}(c) = \kappa^{+}(c) = \kappa^{*}(c) = \frac{5}{3}, \ \ c \in L \setminus l.$$

4.3) Минимум в определении величин

$$\kappa^{\pm}(c), \qquad \kappa^{0}(c), \qquad \kappa^{+}(c), \qquad \kappa^{*}(c), \qquad c \in R_*^3 \setminus L \tag{3}$$

реализуется на векторе $m = m_2$, поскольку на R^+ для любого решения

$$y \in U\big(\sin 3t,\ \cos 3t,\ e^{-(t+N)}(\cos t + 1)\big)$$

функция $\langle \psi y, m_2 \rangle$ отделена от нуля, а при любом другом векторе $m \in R_*^3$ функция $\langle \psi y, m \rangle$ на полуинтервалах (1) будет иметь $18p$ нестрогих знаков.

Теперь для вычисления значений величин (3) остается посчитать числа нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней функции $\langle \psi y, m_2 \rangle$ на каждом из промежутков

$$\left(t_{p-1} + T_0, r_p\right], \quad \left(r_p + T_0, s_p\right], \quad \left(s_p + T_0, \tau_p\right]. \tag{4}$$

4.4) На том из трех промежутков (4), на котором $y_i(t) = \mu_p e^{-t}$ функция $\langle \psi y, m_2 \rangle$ представима в виде

$$\langle \psi y, m_2 \rangle = e^{-t} \sqrt{85\left(c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2\right)} \sin(t + \theta) + 10 c_i \mu_p e^{-t},$$

или

$$\frac{e^t \langle \psi y, m_1 \rangle}{\sqrt{85}} = \sqrt{c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2} \sin(t + \theta) + c_i \rho_p,$$

где $\theta \in R$ – вспомогательный угол, $\rho_p = \dfrac{10\mu_p}{\sqrt{85}}$.

Пусть для вектора $c \in R_*^3$ и номера $i \in \{1, 2, 3\}$ выполнено условие

$$c_i^2 \rho_p^2 > c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2 \tag{5}$$

(здесь и всюду ниже индекс 0 отождествлен с индексом 3, а индекс 4 – с индексом 1). Тогда имеет место оценка

$$\sqrt{c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2} < \left| c_i \rho_p \right|,$$

гарантирующая отсутствие гиперкорней у функции $\langle \psi y, m_2 \rangle$ на рассматриваемом промежутке.

Аналогично, при условии

$$c_i^2 \rho_p^2 < c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2$$

на упомянутом промежутке функция $\langle \psi y, m_2 \rangle$ имеет $2p$ нестрогих смен знаков и гиперкорней, а при условии

$$c_i^2 \rho_p^2 = c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2$$

– столько же корней, ровно вдвое меньше нулей и нестрогих знаков. В данном случае минимум в определении частот гиперкорней реализуется на векторе m_3, так как на каждом из промежутков (4) имеем

$$\langle \psi y, m_3 \rangle = A \mu_p e^{-t}, \quad A \neq 0,$$

а на каждом из промежутков (1) представление

$$\langle \psi y, m_3 \rangle = B_1 e^{-t} + B_2 \sin 3t + B_3 \cos 3t, \quad B_1, B_2, B_3 \in R \setminus \{0\}.$$

4.5) Следуя И.Н. Сергееву, обозначим через V_i подмножество пространства R_*^3, состоящее из точек, удовлетворяющих неравенству (5), и представляющее собой в пространстве R_*^3 круглый конус (точнее, его внутренность, каковую и будем подразумевать в дальнейшем под словом конус), ось которого совпадает с i-й осью координат. Далее через $U_{i,j} \subset R_*^3$ обозначим множество точек, принадлежащих ровно i из трех конусов V_1, V_2, V_3 и при этом лежащих на границе ровно j из оставшихся.

Поскольку выполнено неравенство $\mu_p < \sqrt{0{,}85}$ (которое равносильно $\rho_p < 1$) при любом $p \in N$, то никакие два из конусов V_1, V_2 и V_3 не имеют общих точек, даже граничных (см. п. 4.А доказательства леммы 16 [1]). Поэтому для непустых множеств $U_{0,0}$,

$U_{0,1}$, $U_{1,0}$ выполняется представление $R_*^3 = U_{0,0} \cup U_{0,1} \cup U_{1,0}$, а значит при любом $c \in R_*^3 \setminus L$ справедливы равенства

$$\kappa^{\pm}(c) = \kappa^0(c) = \begin{cases} 1/3, & c \in U_{1,0}, \\ 5/12, & c \in U_{0,1}, \\ 1/2, & c \in U_{0,0}, \end{cases}$$

$$\kappa^{+}(c) = \begin{cases} 1/3, & c \in U_{1,0}, \\ 1/2, & c \in U_{0,0} \cup U_{0,1}, \end{cases} \qquad \kappa^{*}(c) = \begin{cases} 1/3, & c \in U_{1,0}, \\ 3/2, & c \in U_{0,1}, \\ 1/2, & c \in U_{0,0}. \end{cases}$$

Таким образом, собирая все полученные значения величин $\kappa^{\pm}$, κ^0, κ^+, κ^*, находим их множества значений

$$E(\kappa^{\pm}) = E(\kappa^0) = \{1/3, 5/12, 1/2, 4/3, 5/3\},$$

$$E(\kappa^{+}) = \{1/3, 1/2, 4/3, 5/3\}, \qquad E(\kappa^{*}) = \{1/3, 1/2, 4/3, 3/2, 5/3\}.$$

5. Любая плоскость $C \in G^2$ пересекает множество L, поэтому имеет место

$$\sup_{c \in C} \kappa^{\alpha}(c) = \frac{5}{3}, \qquad \alpha = \mp, 0, +, *.$$

Следовательно, при любом $\alpha = \mp, 0, +, *$ соблюдается равенство

$$\omega_2^{\alpha}(a_{\overline{\mu_0}}) = \inf_{D \in G^3} \sup_{c \in D_*} \kappa^{\alpha}(c) = \frac{5}{3}.$$

Для координатных плоскостей $C_1 \equiv C(e_1, e_2)$, $C_2 \equiv C(e_2, e_3)$, $C_3 \equiv C(e_1, e_3)$ и для любой другой плоскости $C \in G^2 \setminus \{C_1, C_2, C_3\}$ имеем

$$\inf_{c \in C_1} \kappa^{\alpha}(c) = \inf_{c \in C_2} \kappa^{\alpha}(c) = \inf_{c \in C_3} \kappa^{\alpha}(c) = \frac{4}{3}, \qquad \inf_{c \in C} \kappa^{\alpha}(c) < \frac{4}{3}.$$

Откуда находим

$$\omega_{\underline{2}}^{\alpha}(a_{\overline{\mu_0}}) = \sup_{D \in G^3} \inf_{c \in D_*} \kappa^{\alpha}(c) = \frac{4}{3}, \qquad \alpha = \mp, 0, +, *.$$

Таким образом, установили неравенство

$$\omega_{\underline{2}}^{\alpha}(a_{\overline{\mu_0}}) < \omega_2^{\alpha}(a_{\overline{\mu_0}}), \qquad \alpha = \mp, 0, +, *.$$

Теорема полностью доказана.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

Примечания:

1. Сергеев И.Н. Определения и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
2. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 1. С. 119–138.
3. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1577.

References:

1. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of the linear equation // Works of Seminar of I.G. Petrovsky. 2006. Iss. 25. P. 249–294.
2. Sergeev I.N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems // Mathematical Collection. 2013. Vol. 204, No. 1. P. 119–138.
3. Sergeev I.N. Determination of full frequencies of solutions of the linear equation // Differential Equations. 2008. Vol. 44, No. 11. P. 1577.

4. Бурлаков Д.С., Цой С.В. Равенство полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1662–1663.
5. Сташ А.Х. Полные и векторные частоты нестрогих знаков решений линейных автономных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 829–830.
6. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот нестрогих знаков и корней решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2015. Вып. 3 (166). С. 18–22. URL: http://vestnik.adygnet.ru
7. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот знака решений линейных автономных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1418–1422.
8. Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика и механика. 2011. № 6. С. 21–26.
9. Сташ А.Х. Свойства главных полных и векторных частот строгих знаков линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2016. Вып. 2 (181). С. 39–47. URL: http://vestnik.adygnet.ru
10. Сташ А.Х. О разрывности младших частот нулей и корней на множестве линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2016. Вып. 1 (176). С. 17–24. URL: http://vestnik.adygnet.ru
11. Сергеев И.Н. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика и механика. 2009. № 3. С. 25–33.

4. Burlakov D.S., Tsoy S.V. Equality of full and vector frequencies of solutions of linear autonomous system // Differential Equations. 2011. Vol. 47, No. 11. P. 1662–1663.
5. Stash A.Kh. Complete and vector frequencies of lax signs of solutions of the linear autonomous differential equations // Differential Equations. 2015. Vol. 51, No. 6. P. 829–830.
6. Stash A.Kh. Properties of full and vector frequencies of lax signs and roots of solutions of linear homogenous autonomous differential equations // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2015. Iss. 3 (166). P. 18–22. URL: http://vestnik.adygnet.ru
7. Stash A.Kh. Properties of complete and vector sign frequencies of solutions of linear autonomous differential equations // Differential Equations. 2014. Vol. 50, No. 10. P. 1418–1422.
8. Sergeev I.N. Unsteadiness and roaming of solutions of the second order differential equation // Bulletin of Moscow University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. 2011. No. 6. P. 21–26.
9. Stash A.Kh. Properties of the main complete and vector frequencies of rigorous signs of the linear homogeneous third order differential equations // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2016. Iss. 2 (181). P. 39–47. URL: http://vestnik.adygnet.ru
10. Stash A.Kh. On discontinuity of lower zero and root frequencies on a set of third order linear homogeneous differential equations // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2016. Iss. 1 (176). P. 17–24. URL: http://vestnik.adygnet.ru
11. Sergeev I.N. On control of solutions of the linear differential equation // Bulletin of the Moscow University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. 2009. No. 3. P. 25–33.