УДК 517.98
ББК 22.126
Ш 65

Шишкин А.Б.
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, информатики и методики преподавания филиала Кубанского государственного университета, Славянск-на-Кубани, e-mail: shishkin-home@mail.ru

Алгебраическое ориентирование множеств. I. Симплексирование

(Рецензирована)

Аннотация. *Развивается алгебраический подход к ориентированию и вводятся понятия частично симплексированного множества и вполне симплексированного множества. Показано, что любой частичный порядок порождает соответствующее ему отношение частичного симплексирования. При этом полный порядок порождает отношение полного симплексирования. Отсюда вытекает, что любое множество может быть вполне симплексировано.*

Ключевые слова: *алгебраическое ориентирование множеств, частичное симплексирование множеств, полное симплексирование множеств, теорема Цермело.*

Shishkin A.B.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Department of Mathematics, Informatics and Techniques of Their Teaching, Branch of Kuban State University, Slavyansk-on-Kuban, e-mail: shishkin-home@mail.ru

Algebraic orientation of sets (ordering sets). I. Simplexing

Abstract. *The paper develops an algebraic approach to orientation and introduces the concepts of partially simplex set and quite simplex set. It has been shown that any partial order generates the corresponding ratio of the partial simplex. This procedure generates a complete attitude of complete simplex. It follows that any set can be well-simplexed.*

Keywords: *algebraic orientation of sets, partial simplex sets, complete sets simplex, Zermelo's theorem.*

Введение

Понятие ориентации возникло в рамках алгебраической геометрии и несет ярко выраженный отпечаток геометрического метода. При этом ориентация определяется только для некоторых специальных классов топологических пространств (многообразий, векторных расслоений, симплексов Пуанкаре и т.д.). Современный взгляд на ориентацию дается в рамках обобщенных теорий когомологий. В этой статье развивается алгебраический подход к ориентированию, который назовем *симплексированием*. Впервые этот подход рассмотрен автором в работе [1]. Он основан на обобщении понятия частично упорядоченного множества и введении понятия частично симплексированного множества размерности n. Частично симплексированное множество размерности n – это произвольное множество, на котором задано специальное $(n+1)$-местное отношение. При этом понятие частично симплексированного множества размерности 1 совпадает с понятием частично упорядоченного множества. Ориентация гладкого многообразия сводится к его частичному симплексированию (см. п. 3.5). Другими словами, ориентированное многообразие – это пример частично симплексированного множества.

Новый подход к ориентированию обладает значительной универсальностью. Он позволяет симплексировать произвольные множества. Более того, любое множество можно даже вполне симплексировать. Эта теорема развивает известную теорему Цермело о вполне упорядоченных множествах [2, 3]. Доказательство теоремы сводится к процедуре частичного симплексирования произвольного частично упорядоченного множества и проверке полноты построенного отношения.

2. Асимметричные и транзитивные отношения

Пусть X – множество, n – натуральное число. Рассмотрим декартову степень X^n и выберем пару натуральных чисел $k, j \leq n$. Отображение

$$p\colon X^n \to X^n | \, (\ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots) \to (\ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots),$$

при котором k-я и j-я компоненты векторов из X^n меняются местами, называем *транспозицией* (точнее, (k, j)-транспозицией) декартовой степени X^n. Отображение $p\colon X^n \to X^n$ называем *транзакцией* декартовой степени X^n, если оно представляется в виде композиции $p_1 \circ \cdots \circ p_m$ конечного числа транспозиций. Если p – транзакция декартовой степени X^n, то образ $p(x_1, \ldots, x_n)$ вектора $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ называем транзакцией этого вектора. Отдельные компоненты фиксированного вектора $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ могут быть равны. Это означает, что транзакция $p(x_1, \ldots, x_n)$ вектора $(x_1, \ldots, x_n)$ может с ним совпадать. Если компоненты вектора $(x_1, \ldots, x_n)$ попарно различны, то совокупность всех транзакций этого вектора эквивалентна совокупности всех транзакций декартовой степени X^n и может быть отождествлена с множеством всех подстановок n-й степени.

Подстановка

$$\begin{pmatrix} 1, \ldots, n \\ j_1, \ldots, j_n \end{pmatrix},$$

порождающая транзакцию

$$p\colon X^n \to X^n | \, (x_1, \ldots, x_n) \to (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}),$$

однозначно определяется значением $(j_1, ..., j_n)$ транзакции p в точке $(1, ..., n)$.

Транзакцию называем *четной* (соотв. *нечетной*), если порождающая ее подстановка является четной (нечетной). Любая транзакция p декартовой степени X^n обратима. При этом обратное отображение p^{-1} тоже является транзакцией декартовой степени X^n. Если транзакция $p\colon X^n \to X^n$ является четной (соотв. нечетной), то и обратная транзакция $p^{-1}\colon X^n \to X^n$ тоже является четной (соотв. нечетной). Известно, что подстановка является четной тогда и только тогда, когда она разлагается в произведение четного числа транспозиций. Это означает, что транзакция p декартовой степени X^n является четной тогда и только тогда, когда она представляется в виде композиции четного числа транспозиций X^n, в частности, множество всех четных транзакций фиксированного вектора $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ с попарно различными компонентами не пересекается с множеством всех нечетных транзакций этого вектора.

Если $n = 1$, то единственная транзакция декартовой степени X^n совпадает с тождественным отображением X^n на себя и является четной.

Конечное множество $\alpha \subseteq X$ называем *симплексом* (точнее, n-симплексом) в множестве X, если число элементов $\#\alpha$ этого множества равно n. При этом элементы симплекса α называем его *вершинами*. Любое упорядочение симплекса $\alpha \subseteq X$ называем *ориентированным симплексом* в множестве X. Ориентированный симплекс α в множестве X объявляем *эквивалентным* ориентированному симплексу β и пишем $\alpha \sim \beta$, если существует четная транзакция p декартовой степени X^n, такая, что $p(\alpha) = \beta$. Класс эквивалентности, то есть совокупность ориентированных симплексов эквивалентных фиксированному ориентированному симплексу α, обозначаем символом $\tilde{\alpha}$. Совокупность всех ориентированных симплексов α в множестве X можно отождествить с множеством $X^n_\#$ всех векторов из X^n с попарно различными компонентами. В этом случае совокупность классов эквивалентности $\tilde{\alpha}$ совпадает с фактор-множеством $X^n_\#/\!\sim$.

Если $n = 1$, то симплексы в множестве X совпадают с его элементами. В этом случае понятие симплекса и ориентированного симплекса совпадают, а классы эквивалентности $\tilde{\alpha}$ являются одноэлементными.

Пусть χ – n-местное отношение на X. Отношение χ называется *асимметричным*, если выполнены следующие условия: если p – четная транзакция степени X^n, то $p(\chi) \subseteq \chi$; если p – нечетная транзакция степени X^n, то $p(\chi) \cap \chi = \varnothing$. Легко увидеть, что все элементы асимметричного отношения являются элементами $X^n_\#$, то есть являются ориентированными симплексами в X. При этом включение $\alpha \in \chi$ влечет вложение $\tilde{\alpha} \subseteq \chi$. Любое одноместное отношение на X очевидно является асимметричным.

Говорим, что точка $x \in X$ является *внутренней точкой* ориентированного симплекса

$$\alpha := (x_1, \dots, x_n) \in X^n,$$

если

$$\alpha|_k^x := (x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \chi$$

для любого $k \in \{1, \dots, n\}$. Множество всех внутренних точек ориентированного симплекса $\alpha \in X^n$ называем его *внутренностью* и обозначаем $\operatorname{int}\alpha$ или $\operatorname{int}_\chi \alpha$. Если $n = 1$, то $\operatorname{int}\alpha = \alpha$. Если отношение χ является асимметричным, то $\operatorname{int}\alpha = \operatorname{int}\beta$ для любых $\alpha \in \chi$ и $\beta \in \tilde{\alpha}$. Отношение χ называем *транзитивным*, если любой ориентированный симплекс в множестве X, внутренность которого не является пустой, лежит в χ. Любое одноместное отношение на X очевидно является транзитивным.

Пусть X, Y – множества, $\chi \subseteq X^n$ – n-местное отношение на X, π – отображение множества X в множество Y. Обозначим π^n отображение $X^n \to Y^n$, которое вектору $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ ставит в соответствие вектор $(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) \in Y^n$. Полный образ $\pi^n(\chi) \subseteq Y^n$ определяет n-местное отношение χ' на Y. Отображение π называем *расслоенным* (точнее, *χ-расслоенным*), если выполнено условие: для любого $\beta \in \chi'$ прообраз (слой над β)

$$(\pi^n)^{-1}(\beta) := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : (\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) = \beta\}$$

лежит в χ.

Расслоенное отображение $\pi : X \to Y$ вполне характеризуется соотношениями

$$\pi^n(\chi) =: \chi', \ (\pi^n)^{-1}(\chi') = \chi.$$

Отображение π является расслоенным, если, например, оно является взаимно однозначным. При $n = 1$ отображение π является расслоенным, если образы $\pi(X \setminus \chi)$ и $\pi(\chi)$ не пересекаются.

Предложение 1. *Если отображение π является расслоенным, то отношение χ является асимметричным тогда и только тогда, когда отношение χ' является асимметричным.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что отношение χ является асимметричным. Пусть p – какая-либо транзакция X^n, p' – транзакция Y^n, порождаемая той же подстановкой. Тогда

$$p' \circ \pi^n = \pi^n \circ p.$$

Во-первых, из сделанного предположения вытекает, что $p(\chi) \subseteq \chi$ для любой четной транзакции p декартовой степени X^n. Значит,

$$p'(\chi') = p'(\pi^n(\chi)) = \pi^n(p(\chi)) \subseteq \pi^n(\chi) =: \chi'.$$

Это означает, что $p'(\chi') \subseteq \chi'$ для любой четной транзакции p' декартовой степени Y^n. Во-вторых, предположим, что $p'(\chi') \cap \chi' \neq \varnothing$ для некоторой нечетной транзакции p' декартовой степени Y^n. Тогда для некоторого вектора $\beta := (y_1, \ldots, y_n) \in \chi'$ выполняется включение $p'(\beta) \in \chi'$. Из определения отношения χ' следует, что существуют такие $x_1 \in \pi^{-1}(y_1), \ldots, x_n \in \pi^{-1}(y_n)$, что $\alpha := (x_1, \ldots, x_n) \in (\pi^n)^{-1}(\beta)$. При этом

$$\pi^n(p(\alpha)) = p'(\pi^n(\alpha)) = p'(\beta) \in \chi'.$$

Из определения расслоенного отображения вытекает, что $p(\alpha) \in \chi$. Значит, $p(\chi) \cap \chi \neq \varnothing$ для некоторой нечетной транзакции p декартовой степени X^n. Это противоречие доказывает асимметричность отношения χ'.

Достаточность. Предположим, что отношение χ' является асимметричным. Пусть $\alpha \in \chi$ и $\beta := \pi^n(\alpha)$. Во-первых, $\beta \in \chi'$. Значит,

$$\pi^n(p(\alpha)) = p'(\pi^n(\alpha)) = p'(\beta) \in \chi'$$

для любой четной транзакции p' декартовой степени Y^n. Отсюда следует, что $p(\alpha) \in \chi$ и $p(\chi) \subseteq \chi$ для любой четной транзакции p декартовой степени X^n. Во-вторых, предположим, что $p(\alpha) \in \chi$ для некоторой нечетной траказции p декартовой степени X^n. Тогда

$$p'(\beta) = p'(\pi^n(\alpha)) = \pi^n(p(\alpha)) \in \chi'.$$

Значит, $p'(\chi') \cap \chi' \neq \varnothing$ для некоторой нечетной транзакции p' декартовой степени X^n. Это противоречие доказывает асимметричность отношения χ. ■

Предложение 2. *Если отображение π является расслоенным, то отношение χ является транзитивным тогда и только тогда, когда отношение χ' является транзитивным.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что отношение χ является транзитивным. Пусть β – ориентированный симплекс в Y и $y \in \mathrm{int}_{\chi'} \beta$. Последнее означает, что $\beta|_k^y \in \chi'$ для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$. Выберем произвольный симплекс $\alpha \in (\pi^n)^{-1}(\beta)$ и произвольный элемент $x \in \pi^{-1}(y)$. Из определения расслоенного отображения вытекает, что $(\pi^n)^{-1}(\beta|_k^y) \subseteq \chi$ для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$. Значит, $\alpha|_k^x \in \chi$ для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$. Это означает, что $x \in \mathrm{int}_\chi \alpha$. Следовательно, $\alpha \in \chi$ и $\beta = \pi^n(\alpha) \in \chi'$.

Достаточность. Предположим, что отношение χ' является транзитивным. Выберем произвольный ориентированный симплекс α в X и предположим, что $x \in \mathrm{int}_\chi \alpha$. Пусть $\beta := \pi^n(\alpha)$ и $y = \pi(x)$. Условие $x \in \mathrm{int}_\chi \alpha$ означает, что $\alpha|_k^x \in \chi$ для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$. Значит, $\pi^n(\alpha|_k^x) = \beta|_k^y \in \chi'$ для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$. Последнее означает, что $y \in \mathrm{int}_{\chi'} \beta$. Следовательно, $\beta \in \chi'$. По определению расслоенного отображения $\alpha \in (\pi^n)^{-1}(\beta) \in \chi$. ■

3. Отношение частичного симплексирования

Отношение $\chi \subseteq X^n$ называем отношением *частичного симплексирования множества* (или *на множестве*) X, если оно является асимметричным и транзитивным. Любое одноместное отношение является отношением частичного симплексирования.

Если на множестве X задано отношение частичного симплексирования $\chi \subseteq X^n$, то множество X называем *частично симплексированным множеством*, а целое число $k := n - 1$ называем *размерностью* частично симплексированного множества X. Симплекс α в частично симплексированном множестве X называем *ориентируемым*, а его вершины *сравнимыми*, если декартова степень α^n пересекается с χ, то есть $p(\alpha) \in \chi$ для какой-либо транзакции $p\colon X^n \to X^n$. Если любой симплекс α в множестве X оказывается ориентируемым, то отношение частичного симплексирования $\chi \subseteq X^n$ называем отношением *симплексирования множества* (или *на множестве*) X, а само множество X называем *симплексированным*. Одноместное отношение $\chi \subseteq X$ является отношением симплексирования тогда и только тогда, когда $\chi = X$.

Предположим, что X, Y – множества, π – отображение множества X в множество Y, χ – отношение частичного симплексирования на множестве X размерности $n-1$, $\pi^n(\chi)$ – индуцированное n-местное отношение на Y. Если отображение π является расслоенным, то отношение $\pi^n(\chi) \subseteq Y^n$ является асимметричным и транзитивным, следовательно, оно является отношением частичного симплексирования на множестве Y размерности n.

Понятие симплексирования является обобщением двух ключевых математических понятий – упорядочения и ориентирования.

3.1. Частичное упорядочение множеств

Всякое отношение $\chi = \{(x_1, x_2)\colon x_1 \prec x_2\} \subseteq X^2$ частичного порядка на множестве X является отношением частичного симплексирования на этом множестве размерности 1. Действительно, если χ — отношение частичного порядка $x_1 \prec x_2$ на X, то выполнены условия:

1) если $x_1 \prec x_2$, то $x_2 \not\prec x_1$;

2) если $x_1 \prec x$ и $x \prec x_2$, то $x_1 \prec x_2$.

Легко заметить, что условие 2) равносильно транзитивности отношения χ. Осталось убедиться, что отношение $\chi \subseteq X^2$ является асимметричным. Если p — четная транзакция декартовой степени X^2, то для любого упорядоченного симплекса $(x_1, x_2) \in X^2$ справедливо равенство $p(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Значит, $p(\chi) = \chi$. Если p – нечетная транзакция декартовой степени X^2, то для любого упорядоченного симплекса $(x_1, x_2) \in X^2$ справедливо равенство $p(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. В силу 1) $p(x_1, x_2) \notin \chi$. Значит, $p(\chi) \cap \chi = \varnothing$.

Столь же просто убедиться, что верно и обратное утверждение: всякое отношение частичного симплексирования на множестве X размерности 1 является отношением частичного порядка на этом множестве.

3.2. Каноническое симплексирование пространства $\mathbf{R}^k$

Пусть $n \geq 2$, $k := n-1$, $X := \mathbf{R}^k$ и $X^n = \mathbf{R}^{kn}$. Выберем произвольный вектор $(x^{(1)}, ..., x^{(n)}) \in X^n$ и обозначим $\Delta(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_k^{(1)} & \cdots & x_k^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Легко убедиться, что определитель $\Delta(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ совпадает с определителем

$$\det(x^{(2)} - x^{(1)}, \dots, x^{(n)} - x^{(1)}) := \begin{vmatrix} x_1^{(2)} - x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(n)} - x_1^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_k^{(2)} - x_k^{(1)} & \cdots & x_k^{(n)} - x_k^{(1)} \end{vmatrix},$$

то есть число $\frac{1}{k!}\Delta(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})$ совпадает с ориентированным k-мерным объемом многогранника с вершинами $x^{(1)},\ldots,x^{(n)}$. При этом для любого $x\in\mathbf{R}^k$ справедливо равенство

$$\Delta(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})=\Delta(x,x^{(2)},\ldots,x^{(n)})+\cdots+\Delta(x^{(1)},\ldots,x^{(n-1)},x) \tag{1}$$

(см. [1]).

Если $\Delta(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})\neq 0$, то компоненты вектора $(x^{(1)},...,x^{(n)})$ попарно различны. Таким образом, вектор $(x^{(1)},...,x^{(n)})$ является ориентированным симплексом в X. Если $\Delta(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})>0$ (соотв. $\Delta(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})<0$), то ориентированный симплекс $(x^{(1)},...,x^{(n)})$ называем *положительно ориентированным* (соотв. *отрицательно ориентированным*).

Пусть $\chi\subseteq X^n$ – совокупность всех положительно ориентированных симплексов $(x^{(1)},...,x^{(n)})$ в X. Асимметричность отношения $\chi\subseteq X^n$ легко следует из свойств определителей. Проверим транзитивность отношения χ. Пусть $(x^{(1)},...,x^{(n)})\in\chi$ и $x\in\mathrm{int}_\chi(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})$. Каждый из определителей

$$\Delta(x,x^{(2)},\ldots,x^{(n)}),...,\Delta(x^{(1)},\ldots,x^{(n-1)},x)$$

больше нуля. В силу (1) определитель $\Delta(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})$ тоже больше нуля. Таким образом, $(x^{(1)},...,x^{(n)})\in\chi$. Это означает, что отношение χ является транзитивным и, значит, является отношением частичного симплексирования множества X размерности $k:=n-1$. Это отношение называем отношением *канонического частичного симплексирования* декартовой степени $\mathbf{R}^k$.

Несколько особняком стоит случай $n=1$ или $k=0$. В этом случае декартова степень $\mathbf{R}^0$ состоит из одного элемента. Существует единственное одноместное отношение на множестве $\mathbf{R}^0$ и оно, очевидно, является отношением симплексирования. Соблюдая терминологическую преемственность, это отношение называем отношением *канонического симплексирования* декартовой степени $\mathbf{R}^0$. Размерность симплексированного множества $\mathbf{R}^0$ равна нулю.

3.3. Ориентирование пространства $\mathbf{R}^k$

Далее поясним связь канонического симплексирования пространства $\mathbf{R}^k$ с ориентированием этого пространства. По известному правилу множество всех упорядоченных базисов $\{e\}$ в $\mathbf{R}^k$ разбивается на два класса эквивалентности. Ориентирование пространства $\mathbf{R}^k$ – это выбор одного из этих классов.

Осуществить этот выбор можно заданием на пространстве $\mathbf{R}^k$ специального отношения симплексирования. Действительно, произвольный упорядоченный симплекс $\alpha:=(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})$ в пространстве $\mathbf{R}^k$, удовлетворяющий условию $\Delta(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})\neq 0$, определяет однозначно систему координат $s(\alpha):=Oe$, где $O:=x^{(1)}$, $e:=(x^{(2)}-x^{(1)},...,x^{(n)}-x^{(1)})$. Разбиение совокупности $\{e\}$ на два класса эквивалентности определяет аналогичные разбиения множества $\{Oe\}$ всех систем координат и множества $\{\alpha\}$ всех упорядоченных симплексов. Последние факторизуются с помощью следующих отношений эквивалентности: $Oe\sim O'e' \iff e\sim e'$ и $\alpha\sim\beta \iff s(\alpha)\sim s(\beta)$ соответственно. Выбор класса эквивалентности упорядоченных симплексов и означает ориентирование $\mathbf{R}^k$. Этот выбор осуществляется наложением одного из двух условий: $\Delta(\alpha)>0$ или $\Delta(\alpha)<0$. Первое условие определяет положительно ориентированные симплексы, а второе условие определяет отрицательно ориентированные симплексы в $\mathbf{R}^k$. Выше показано, что совокупность всех положительно ориентированных симплексов является отношением частичного симплексирования на $\mathbf{R}^k$. Аналогичное верно и для совокупности всех отрицательно ориентированных симплексов в $\mathbf{R}^k$.

Таким образом, ориентирование пространства $\mathbf{R}^k$ сводится к выбору одного из двух специальных отношений частичного симплексирования на $\mathbf{R}^k$.

3.4. Ориентирование области в $\mathbf{R}^k$

Ориентирование области $G \subseteq \mathbf{R}^k$ по определению означает выбор одного из двух классов эквивалентности (криволинейных) систем координат $D \to G$ [4, гл. XII, §2]. Все системы координат $s(\alpha) : D \to G$ вида

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \cdots \\ t_k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1^{(2)} - x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(n)} - x_1^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_k^{(2)} - x_k^{(1)} & \cdots & x_k^{(n)} - x_k^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \cdots \\ t_k \end{pmatrix}$$

принадлежат одному из этих классов для любого положительно ориентированного симплекса $\alpha := (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ в G (то есть положительно ориентированного симплекса в $\mathbf{R}^k$, вершины которого лежат в G). Если симплекс α в G является отрицательно ориентированным, то система координат $s(\alpha)$ принадлежит другому из этих классов. Легко увидеть, что совокупность всех положительно (отрицательно) ориентированных симплексов в G является отношением частичного симплексирования на G.

Таким образом, ориентирование области G опять сводится к выбору одного из двух специальных отношений частичного симплексирования на ней.

3.5. Ориентирование гладкого многообразия

В связном гладком многообразии X системой координат служит атлас — счетный набор карт $\{(\varphi_m, U_m)\}$, покрывающих X. Атлас называется ориентирующим, если все координатные преобразования

$$\varphi_{m'm''} := \varphi_{m''} \circ \varphi_{m'}^{-1} : \varphi_{m'}(U_{m'} \cap U_{m''}) \to \varphi_{m''}(U_{m'} \cap U_{m''})$$

положительны, то есть переводят положительно (отрицательно) ориентированные системы координат в положительно (отрицательно) ориентированные системы координат [4, гл. XV, §2]. Последнее равносильно тому, что положительно (отрицательно) ориентированные симплексы $(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ в области $\varphi_{m'}(U_{m'} \cap U_{m''})$ переходят в положительно (отрицательно) ориентированные симплексы $(\varphi_{m'm''}(x^{(1)}), \ldots, \varphi_{m'm''}(x^{(n)}))$ в области $\varphi_{m''}(U_{m'} \cap U_{m''})$. Если многообразие допускает ориентирующий атлас, то его называют ориентируемым. Множество всех атласов на ориентируемом многообразии X разбивается на два класса эквивалентности. Выбор одного из этих классов называется ориентацией многообразия X.

Пусть X – ориентируемое многообразие. Упорядоченный симплекс $(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ в X будем называть положительно (отрицательно) ориентированным, если $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)} \in U_m$ для некоторого натурального m и упорядоченный симплекс $(\varphi_m(x^{(1)}), \ldots, \varphi_m(x^{(n)}))$ в области $V_k := \varphi_k(U_k)$ является положительно (отрицательно) ориентированным. Отображения $\varphi_k : U_k \to V_k$ являются взаимно однозначными и, значит, – расслоенными. В силу предложений 1 и 2 совокупность всех положительно (отрицательно) ориентированных симплексов в X является отношением частичного симплексирования на X.

Таким образом, ориентация гладкого многообразия X тоже сводится к выбору одного из двух специальных отношений частичного симплексирования на нем.

3.6. Пример симплексирования неориентируемого многообразия

Далее рассмотрим пример частичного симплексирования листа Мебиуса. Пусть

$$V_1 := \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in (-1; 1)\} \subset \mathbf{R}^2,$$

$$V_2 := \{(x_1, x_2) : x_1 \in (-1; 0), x_1 < x_2 < -x_1\} \subset V_1,$$

$$V_3 := \{(x_1, x_2) : x_1 \in (0; 1), -x_1 < x_2 < x_1\} \subset V_1,$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 – некоторые непрерывные действительные функции на V_1, V_2, V_3 соответственно. Подбираем функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 так, что лист Мебиуса $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}^3$ получается склейкой графиков U_1, U_2, U_3 функций ψ_1, ψ_2, ψ_3 вдоль пары прямых $(\pm 1, x_2, 0)$ и прямой $(0, 0, x_3)$.

Рассмотрим отображение (проекцию)

$$\pi : \mathcal{M} \to \mathbf{R}^2 \big| \, (x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2).$$

Упорядоченный симплекс $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ в $\mathcal{M}$ будем называть положительно ориентированным, если упорядоченный симплекс

$$\pi^3(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = (\pi(x^{(1)}), \pi(x^{(2)}), \pi(x^{(3)}))$$

в $\mathbf{R}^2$ является положительно ориентированным, то есть определитель

$$\Delta(\pi(x^{(1)}), \pi(x^{(2)}), \pi(x^{(3)})) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix}$$

положителен.

Предложение 3. *Совокупность всех положительно ориентированных симплексов в $\mathcal{M}$ является отношением частичного симплексирования на $\mathcal{M}$ размерности* 2.

Доказательство. Совокупность всех положительно ориентированных симплексов в $\mathcal{M}$ обозначим χ. Легко увидеть, что, отображение $\pi : \mathcal{M} \to \mathbf{R}^2$ является χ-расслоенным. При этом отношение $\chi' := \pi^3(\chi)$ является отношением частичного симплексирования размерности 2 (оно индуцировано отношением канонического частичного симплексирования пространства $\mathbf{R}^2$). Значит, отношение χ тоже имеет размерность 2. ■

4. Изоморфизмы и антиизоморфизмы

Пусть χ – отношение частичного симплексирования на множестве X размерности $n-1$, p – какая-либо нечетная транзакция X^n, p^{-1} – обратная транзакция.

Предложение 4. *Образ $p(\chi) \subseteq X^n$ является асимметричным и транзитивным, то есть является отношением частичного симплексирования на множестве X размерности $n-1$.*

Доказательство. Действительно, во-первых, если q – какая-либо четная транзакция пространства X^n, то композиция $p^{-1} \circ q \circ p$ является четной транзакцией X^n. Значит, $p^{-1} \circ q \circ p(\chi) \subseteq \chi$ и $q(p(\chi)) \subseteq p(\chi)$. Если же q – какая-либо нечетная транзакция X^n, то композиция $q \circ p$ является четной транзакцией X^n. Значит, $q(p(\chi)) = (q \circ p)(\chi) \subseteq \chi$ и, так как множества χ и $p(\chi)$ не пересекаются, то $q(p(\chi)) \cap p(\chi) = \varnothing$. Следовательно, отношение $p(\chi)$ является асимметричным. Во-вторых, если точка $x \in X$ является внутренней точкой ориентированного симплекса $\alpha \in X^n$ и $\beta := p^{-1}(\alpha) \in \chi$, то для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ справедливы включения $\alpha|_k^x \in p(\chi)$ и $p^{-1}(\alpha|_k^x) = \beta|_{j_k}^x \in \chi$, где $(j_1, ..., j_n) = p^{-1}(1, ..., n)$. Из второго включения вытекает, что $x \in \mathrm{int}_\chi \beta$. Транзитивность отношения χ влечет включения $\beta \in \chi$ и $\alpha = p(\beta) \in p(\chi)$. Следовательно, отношение $p(\chi)$ является транзитивным. ■

Предложение 5. *Образ $p(\chi)$ не зависит от выбора нечетной транзакции p декартовой степени X^n.*

Доказательство. Действительно, пусть q – какая-либо другая нечетная транзакция X^n. Тогда $q^{-1}(p(\chi)) = (q^{-1} \circ p)(\chi) \subseteq \chi$ и $p^{-1}(q(\chi)) = (p^{-1} \circ q)(\chi) \subseteq \chi$. Следовательно, $p(\chi) \subseteq q(\chi)$ и $q(\chi) \subseteq p(\chi)$. ■

Отношение частичного симплексирования $p(\chi)$ называем *обратным* к отношению χ и обозначаем χ^{-1}.

Предложение 6. *Справедливо соотношение* $(\chi^{-1})^{-1} = \chi$.

Доказательство. Действительно, если транзакции p и q являются нечетными, то транзакции $r = p \circ q$ и $r^{-1} = q^{-1} \circ p^{-1}$ являются четными, значит, $r(\chi) \subseteq \chi$ и $r^{-1}(\chi) \subseteq \chi$, то есть $(\chi^{-1})^{-1} = r(\chi) \subseteq \chi$ и $\chi \subseteq r(\chi) = (\chi^{-1})^{-1}$. ■

Пусть X и Y – частично симплексированные множества размерности $n-1$, χ_X и χ_Y – отношения частичного симплексирования на X и Y соответственно. Отображение $\pi : X \to Y$ называем *изоморфизмом* частично симплексированных множеств X и Y, если оно биективно и

$$\pi^n(\chi_X) = \chi_Y, \ (\pi^n)^{-1}(\chi_Y) = \chi_X.$$

Отображение $\pi : X \to Y$ называем *антиизоморфизмом* частично симплексированных множеств X и Y, если оно биективно и

$$\pi^n(\chi_X) = \chi_Y^{-1}, \ (\pi^n)^{-1}(\chi_Y^{-1}) = \chi_X.$$

Если частично симплексированные множества X и Y топологизированы, то при определении изоморфизма (соотв. антиизоморфизма) $\pi : X \to Y$ предполагается еще, что отображение π является гомеоморфизмом топологических пространств X и Y.

При $n = 1$ единственная транзакция декартовой степени X^n является четной, значит, понятие обратного отношения частичного симплексирования и понятие антиизоморфизма частично симплексированных множеств в этом случае лишены смысла.

5. Полное симплексирование

Пусть χ – отношение симплексирования множества X размерности $n-1$, A – подмножество множества X. Ориентированный $(n-1)$-симплекс $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in A^{n-1}$ называем *первичным* $(n-1)$*-симплексом* в A, если для любого $x \in A \setminus \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ ориентированный симплекс $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$ принадлежит χ. Симплексированное множество X называем *вполне симплексированным*, если любое непустое подмножество $A \subseteq X$, $\#A \geq n$, обладает первичным $(n-1)$-симплексом. Вполне симплексированное множество размерности 1 является вполне упорядоченным множеством и наоборот. Всякое симплексированное множество размерности 0 является вполне симплексированным множеством.

Пусть M – множество, 2^M – его булеан. Отображение $f\colon 2^M \to M$ называется функцией выбора, если $f(A) \in A$ для любого непустого $A \in 2^M$. Мы предполагаем выполненной аксиому выбора: для любого непустого множества M существует функция выбора

$2^M \to M$. Следовательно, по известной теореме Цермело всякое множество может быть вполне упорядочено. Эта теорема допускает следующее развитие.

Теорема 1. *Любое множество может быть вполне симплексировано.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы проводится по следующей схеме. Пусть X – множество и $n > 1$. Если X конечное множество и $\#X < n$, то полагаем $\chi := \varnothing$. В противном случае считаем, что множество X вполне упорядочено. Ориентированный симплекс $(x_1, \ldots, x_n)$ с вершинами из X будем называть *правильным*, если $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n$. Рассмотрим n-местное отношение χ на множестве X, определенное по следующему правилу: ориентированный симплекс $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит χ тогда и только тогда, когда он получен из правильного симплекса с помощью четной транзакции. Осталось показать, что отношение χ является отношением полного симплексирования множества X. По этому поводу смотрите статью [1]. ■

Процедура симплексирования, используемая при доказательстве теоремы 1, носит универсальный характер и может использоваться при симплексировании любого частично упорядоченного множества. Действительно, пусть X – частично упорядоченное множество. Говорим, что n-местное отношение на множестве X *порождается частичным порядком*, если оно состоит из всех ориентированных симплексов α, полученных из правильных симплексов с помощью четных транзакций.

Предложение 7. *Отношение χ, порождаемое частичным порядком, является отношением частичного симплексирования.*

Доказательство. Проверим асимметричность отношения χ. Пусть $\alpha := p(x_1, \ldots, x_n) \in \chi$, где $(x_1, \ldots, x_n)$ – некоторый правильный симплекс в X, p – некоторая четная транзакция декартовой степени X^n. Если p' – четная транзакция X^n, то композиция $p'' := p' \circ p$ тоже является четной транзакцией X^n. По определению отношения χ имеем $p'(\alpha) = p''(x_1, \ldots, x_n) \in \chi$, то есть $p'(\chi) \subseteq \chi$. Если p' – нечетная транзакция степени X^n, то композиция $p'' := p' \circ p$ тоже является нечетной транзакцией степени X^n. По определению отношения χ имеем $p'(\alpha) = p''(x_1, \ldots, x_n) \notin \chi$, то есть $p'(\chi) \cap \chi = \varnothing$. Это означает, что отношение χ является асимметричным.

Проверим транзитивность отношения χ. Пусть $\alpha := (x_1, \ldots, x_n)$ – произвольный ориентированный симплекс в X и $\operatorname{int}\alpha \neq \varnothing$. Если $x \in \operatorname{int}\alpha$, то

$$\alpha_k := (x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \chi$$

для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$. Отсюда следует, что любые две компоненты симплекса α сравнимы по порядку. Это позволяет считать, что $\alpha = p(x'_1, \ldots, x'_n)$, где $(x'_1, \ldots, x'_n)$ – некоторый правильный симплекс в X, p – некоторая транзакция степени X^n. Нам достаточно показать, что транзакция p является четной. Покажем это. Если $x \in \operatorname{int}\alpha$, то

$$\alpha_k = p(x'_1, \ldots, x'_{k'-1}, x, x'_{k'+1}, \ldots, x'_n) \in \chi$$

для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$. Здесь k' зависит от k и определяется однозначно из равенства $x'_{k'} = x_k$. Легко увидеть, что при некотором $k \in \{1, \ldots, n\}$ ориентированный симплекс

$$(x'_1, \ldots, x'_{k'-1}, x, x'_{k'+1}, \ldots, x'_n)$$

является правильным. По определению отношения χ транзакция p является четной. Значит, $\alpha \in \chi$ и отношение χ является транзитивным. ■

Примечания:

1. Шишкин А.Б. Ориентирование множеств // Труды ФОРА. 2011. № 16. С. 27–31. URL: http://fora.adygnet.ru
2. Zermelo E. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe // Mathematische Annalen. 1904. Vol. 59, Iss. 4. P. 514–516.
3. Zermelo E. Untersuchungenüber die Grundlagen der Mengenlehre I // Mathematische Annalen. 1908. Vol. 65, Iss. 2. P. 261–281.
4. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. II. М.: Наука, 1984. 640 с.

References:

1. Shishkin A.B. Ordering sets // Proceedings of Physical Society of Republic of Adyghea. 2011. No. 16. P. 27–31. URL: http://fora.adygnet.ru
2. Zermelo E. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe // Mathematische Annalen. 1904. Vol. 59, Iss. 4. P. 514–516.
3. Zermelo E. Untersuchungenüber die Grundlagen der Mengenlehre I // Mathematische Annalen. 1908. Vol. 65, Iss. 2. P. 261–281.
4. Zorich V.A. Mathematical analysis. Pt. II. M.: Nauka, 1984. 640 pp.