УДК 517.926
ББК 22.161.6
С 78

Сташ А.Х.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593905, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

Пример несовпадения полной и векторной частот гиперкорней решения дифференциального уравнения третьего порядка

(Рецензирована)

Аннотация. *Приводится пример линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка с непрерывными ограниченными на положительной полуоси коэффициентами, для некоторого решения которого полная и векторная частоты гиперкорней не совпадают.*

Ключевые слова: *линейное дифференциальное уравнение, колеблемость решений, число нулей функции, полная частота, векторная частота.*

Stash A.Kh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593905, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

Example of discrepancy of the complete and vector frequencies of hyper roots of solutions of the third order differential equation

Abstract. *An example is given of the simple homogeneous differential equation of the third order with the continuous coefficients limited on a positive semiaxis, for some solution of which the complete and vector frequencies of hyper roots do not coincide.*

Keywords: *linear differential equation, variability of solutions, number of zero function, full frequency, vector frequency.*

Введение

Для решений линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка все характеристики колеблемости, введенные И.Н. Сергеевым в работах [1–3], равны нулю, так как эти решения не имеют нулей, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (равно как и все нижние) частоты равны между собой [4]. Следовательно, на множестве решений уравнений первого и второго порядков полные и векторные частоты знаков, нулей, корней и гиперкорней идентичны.

Про несовпадение полной и векторной частот гиперкорней хотя бы одного решения линейного однородного дифференциального уравнения порядка, не ниже третьего, не было ничего известно. Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

Для заданного натурального n обозначим через E^n множество линейных однородных уравнений n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \qquad t \in R^+ \equiv [0;\infty),$$

с ограниченной непрерывной строкой коэффициентов

$$a \equiv (a_1,...,a_n): R^+ \to R^n$$

(каждую такую строку будем отождествлять с соответствующим уравнением). Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in E^n$ обозначим через $S_*(a)$.

Определение 1 [2, 3]**.** Для каждого решения $y \in S_*(a)$ уравнения $a \in E^n$, чисел $t > s \geq 0$ и вектора $m \equiv (m_1, m_2, ..., m_n) \in R^n$ обозначим $\nu^*(y, m, t, s)$ количество гиперкорней скалярного произведения

$$\langle \psi y(\tau), m \rangle = m_1 y(\tau) + m_2 \dot{y}(\tau) + \cdots + m_n y^{(n-1)}(\tau) \qquad \left(\psi y \equiv \left(y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)}\right)\right)$$

на промежутке $(s, t]$, где в процессе подсчета этого количества:

– каждый некратный корень берется ровно один раз*;*

– любой кратный корень берется бесконечно много раз независимо от его фактической кратности (другими словами, как только хотя бы в одной точке $\tau_0 \in (s, t]$ выполнены одновременно оба равенства

$$\langle \psi y(\tau_0), m \rangle = \langle \psi \dot{y}(\tau_0), m \rangle = 0,$$

так, сразу величина $\nu^*(y, m, t, s)$ считается равной бесконечности, а в противном случае она равна числу нулей функции $\langle \psi y, m \rangle$ на промежутке $(s, t]$).

Определение 2 [2, 3]**.** Каждому решению $y \in S_*(a)$ уравнения $a \in E^n$ поставим в соответствие верхние (нижние) полную и векторную частоты гиперкорней

$$\breve{\sigma}^*(y) = \inf_{m \in R^n} \underline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\pi}{t} \nu^*(y, m, t, 0) \qquad \left(\hat{\sigma}^*(y) = \inf_{m \in R^n} \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\pi}{t} \nu^*(y, m, t, 0)\right),$$

$$\breve{\zeta}^*(y) = \underline{\lim_{t \to \infty}} \inf_{m \in R^n} \frac{\pi}{t} \nu^*(y, m, t, 0) \qquad \left(\hat{\zeta}^*(y) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \inf_{m \in R^n} \frac{\pi}{t} \nu^*(y, m, t, 0)\right).$$

В случае совпадения полной или векторной верхней частоты гиперкорней решения y с одноименной нижней будем называть ее точной и обозначать $\zeta^*(y)$ или $\sigma^*(y)$.

Замечание. Из определений 1 и 2 следует, что для любого решения $y \in S_*(a)$ произвольного уравнения $a \in E^n$ справедливы цепочки соотношений

$$\hat{\zeta}^*(y) \leq \hat{\sigma}^*(y), \quad \breve{\zeta}^*(y) \leq \breve{\sigma}^*(y), \quad \breve{\zeta}^*(y) \leq \hat{\zeta}^*(y), \quad \breve{\sigma}^*(y) \leq \hat{\sigma}^*(y).$$

Формулировка и доказательство результата

Имеет место следующая

Теорема. *Существует уравнение* $c \in E^3$, *некоторое решение* $z \in S_*(c)$ *которого удовлетворяет неравенству* $\zeta^*(y) < \sigma^*(y)$.

Доказательство теоремы. Выберем уравнение $a \in E^3$ вида $\dddot{y} + \dot{y} = 0$ с фундаментальной системой решений

$$\sin t, \quad 1, \quad \cos t, \tag{1}$$

определитель Вронского которой удовлетворяет неравенству

$$\begin{vmatrix} \sin t & 1 & \cos t \\ \cos t & 0 & -\sin t \\ -\sin t & 0 & -\cos t \end{vmatrix} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 > 0, \quad t \in R^+.$$

По выбранной системе из трех функций

$$y_1 = \sin 3t, \quad y_2 = e^{-t}(\cos t + 1), \quad y_3 = \cos 3t$$

с положительным определителем Вронского

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix}\sin 3t & e^{-t}(\cos t+1) & \cos 3t\\ 3\cos 3t & -e^{-t}(\cos t+\sin t+1) & -3\sin 3t\\ -9\sin 3t & e^{-t}(2\sin t+1) & -9\cos 3t\end{vmatrix}=e^{-t}(27\cos t+6\sin t+30)>0,\ \ t\in R^{+},$$

восстановим линейное однородное уравнение $b\in E^3$ вида

$$\frac{1}{\Delta(t)}\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & y_3 & y\\ \dot y_1 & \dot y_2 & \dot y_3 & \dot y\\ \ddot y_1 & \ddot y_2 & \ddot y_3 & \ddot y\\ \dddot y_1 & \dddot y_2 & \dddot y_3 & \dddot y\end{vmatrix}=0,$$

решениями которого они являются (см. [5]). Раскладывая определитель по элементам последнего столбца, убеждаемся, что коэффициенты построенного уравнения являются ограниченными функциями на R^{+}.

Выберем такие числа t_1 и t_2, что $\pi<t_1<t_2$. В соответствии с теоремой 3 из работы [6] построим на участке $[t_1,t_2]$ уравнение $c\in E^3$ (с гладкими коэффициентами), переводящее набор (1) решений, заданных на отрезке $[0,t_1]$, в набор (2) решений, заданных на луче $[t_2,+\infty)$: слева от отрезка $[t_1,t_2]$ уравнение $c\in E^3$ совпадает с уравнением $a\in E^3$, а справа – с уравнением $b\in E^3$. Здесь первое решение начального набора переходит в первое решение конечного решения, второе – во второе, а третье – в третье. Обозначим полученные кусочно составленные решения этого уравнения через $z_1,z_2,z_3\in S_*(c)$ соответственно.

Для вектора $m_1=(9,0,1)$ и решения $z=z_1-\dfrac{8\sqrt{2}}{9}z_2+z_3\in S_*(c)$ имеем представление

$$\langle \psi z(t),m_1\rangle=\sin t+8\cos t-8\sqrt{2},\quad t\in[0,t_1].$$

Отсюда, в силу равенств $\langle \psi z(\pi/4),m_1\rangle=\langle \psi \dot z(\pi/4),m_1\rangle=0,$ имеем $\nu^{*}(z,m_1,t_1,0)=\infty$.

Для любого вектора $m=(\alpha,\beta,\gamma)$ неколлинеарного вектору m_1 при $t\in[t_2,+\infty)$ имеем

$$\langle \psi z(t),m\rangle=A_1\sin(3t+3t_1)+A_2e^{-t}\cos(t+t_2)+A_3e^{-t},$$

где $A_1,A_2,A_3\in R,\ \ A_1^2=2(\alpha-9\gamma)^2+18\beta^2\neq 0,\ \ 3t_1,\ t_2$ – вспомогательные углы. Поэтому, начиная с некоторого достаточно большого значения $t_3(m)$, на любом промежутке длины π будет иметь ровно 3 нуля. Кроме того, согласно теореме 2 из [3], найдется вектор m_2 неколлинеарный вектору m_1, для которого при любом $t\in R^{+}$ выполнено неравенство $\nu^{*}(z,m_2,t,0)<\infty$. Следовательно, для верхней полной частоты гиперкорней имеем

$$\hat\sigma^{*}(z)=\inf_{m\in R^n}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^{*}(z,m,t_3(m),0)+\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\pi}{t}\nu^{*}(z,m,t,t_3(m))\right)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\pi}{t}\left[\frac{3(t+t_1-t_3(m))}{\pi}\right]=3,$$

где $[s]$ – целая часть числа s. Для нижней полной частоты гиперкорней решения $z\in S_*(c)$ имеют место аналогичные равенства, поэтому $\breve\sigma^{*}(z)=3$.

Далее, при $\alpha\to 9,\ \beta\to 0,\ \gamma\to 1$ имеем $A_1\to 0,\ A_2\to\sqrt{85},\ A_3\to 10$, откуда при любом $t>0$ найдется такое $m(t),$ что $\nu^{*}(z,m(t),t,0)=0,$ а значит, выполнены равенства

$$\zeta^{*}(z)=\lim_{t\to\infty}\inf_{m\in R^n}\frac{\pi}{t}\nu^{*}(z,m,t,0)=0.$$

Теорема полностью доказана.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

Примечания:

1. Сергеев И.Н. Определения и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
2. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1577.
3. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 1. С. 119–138.
4. Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 21–26.
5. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.
6. Сергеев И.Н. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 3. С. 25–33.

References:

1. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of the linear equation // Works of Seminar of I.G. Petrovsky. 2006. Iss. 25. P. 249–294.
2. Sergeev I.N. Determination of full frequencies of solutions of the linear equation // Differential Equations. 2008. Vol. 44, No. 11. P. 1577.
3. Sergeev I.N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems // Mathematical Collection. 2013. Vol. 204, No. 1. P. 119–138.
4. Sergeev I.N. Unsteadiness and roaming of solutions of the second order differential equation // Bulletin of Moscow University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. 2011. No. 6. P. 21–26.
5. Filippov A.F. Introduction in the theory of differential equations. M.: Editorial URSS, 2004. 240 pp.
6. Sergeev I.N. On control of solutions of the linear differential equation // Bulletin of the Moscow University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. 2009. No. 3. P. 25–33.