МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 519.5
ББК 22.126
Ш 65

Шишкин А.Б.
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, информатики и методики преподавания филиала Кубанского государственного университета, Славянск-на-Кубани, e-mail: shishkin-home@mail.ru

Алгебраическое ориентирование множеств. III. Интеграл по проекции

(Рецензирована)

Аннотация. *Приведены основы теории интегрирования по проекции на измеримых частично симплексированных множествах в* R^n*, обобщающей теорию интегрирования на ориентируемых многообразиях. Изучены ключевые свойства интеграла по проекции (преемственность определения, критерий интегрируемости по проекции для ограниченных функций, счетная аддитивность и др.).*

Ключевые слова: *измеримое частично симплексированное множество, мера по проекции, интеграл по проекции.*

Shishkin A.B.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Department of Mathematics, Informatics and Techniques of Teaching, Branch of Kuban State University, Slavyansk-on-Kuban, e-mail: shishkin-home@mail.ru

Algebraic orientation of sets (ordering sets). III. Integral with respect to a projection

Abstract. *Here we give bases of the theory of integration with respect to a projection on measurable partially simplex sets in* R^n*, generalizing the theory of integration on the focused varieties. Key properties of integral with respect to a projection are studied (definition continuity, integrability criterion with respect to a projection for limited functions, countable additivity, etc.).*

Keywords: *measurable partially simplex set, measure with respect to a projection, integral with respect to a projection.*

1. Введение

Настоящая статья продолжает задуманный автором цикл работ по вопросам многомерного интегрирования, связанным с новым подходом к ориентированию многообразий. В работах [1, 2] развивается алгебраический метод ориентирования произвольных множеств и вводятся понятия частично симплексированного множества и измеримого частично симплексированного множества в $\mathbf{R}^n$. Ориентируемые многообразия в $\mathbf{R}^n$ являются примерами измеримых частично симплексированных множеств. Ориентируемые многообразия являются гладкими, но отношение частичного симплексирования можно определить на произвольном топологическом многообразии [1]. Это означает, что произвольное топологическое многообразие можно рассматривать как пример частично симплексированного множества. Возникает вопрос: возможно ли построение теории интегрирования на измеримых частично симплексированных множествах, продолжающей теорию интегрирования на ориентируемых многообразиях? Содержание настоящей статьи дает положительный ответ на этот вопрос.

Статья содержит основы теории интеграла по проекции на частично симплексированных подмножествах $\mathbf{R}^n$. Второй параграф содержит определение интеграла по проекции на измеримом частично симплексированном множестве ограниченной действительной функции. В основе понятия интеграла по проекции лежит понятие измеримого по проекции частично симплексированного множества, которое, в свою очередь, является обобщением классического понятия измеримого множества по Жордану. В этом же параграфе рассмотрен вопрос преемственности определения интеграла по проекции с классическим интегралом по координатам (предложения 1–3). Отметим, что ранее в работе [3] осуществлен другой подход к определению интеграла по проекции, который оказывается частным по отношению к рассмотренному в этой статье.

В третьем параграфе вводится понятие исчерпывающей пары. Показано, что применение исчерпывающих пар на этапе определения интеграла по проекции делает этот математический инструмент существенно более гибким в практическом использовании.

Четвертый параграф посвящен доказательству критерия интегрируемости ограниченной функции на измеримом частично симплексированном множестве (теорема 1). Этот критерий развивает известный критерий Лебега интегрируемости ограниченной функции по Риману в терминах множества ее точек разрыва [4]. Его следствия (предложения 4–5) дают окончательный ответ на вопрос преемственности определения интеграла по проекции.

В пятом параграфе рассмотрены ключевые свойства интеграла по проекции – аддитивность интеграла по проекции и счетная аддитивность интеграла по проекции (предложения 6–7).

2. Интеграл по проекции

2.1. Предварительные определения. Ниже нам потребуются некоторые сведения из статей [1, 2]. Приведем их. Пусть $n \in \mathbf{N}$, $(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)$ – упорядоченное семейство отдельных экземпляров пространства $\mathbf{R}$, в которых переменные обозначены $x_1, \ldots, x_n$ соответственно; $\mathbf{R}^n$ – декартово произведение $\mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_n$; $x := (x_1, \ldots, x_n)$ – переменная в пространстве $\mathbf{R}^n$. Пусть $k \in \mathbf{Z}$ и $0 \leq k \leq n$. Выберем из упорядоченного семейства $(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)$ произвольное подсемейство $(\mathbf{R}_{j_1}, \ldots, \mathbf{R}_{j_k})$, содержащее k элементов. Считаем, что $j_1 < \ldots < j_k$. Каждый такой выбор определяет декартово произведение $\mathbf{R}^k_J := \mathbf{R}_{j_1} \times \ldots \times \mathbf{R}_{j_k}$ и проекцию

$$\pi_J : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k_J \big| \, x \to x_J.$$

Здесь $J := (j_1, ..., j_k)$, $x_J := (x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$ – переменная в пространстве $\mathbf{R}^k_J$.

Выберем произвольное натуральное ν и рассмотрим каноническое покрытие пространства $\mathbf{R}^n$ счетной системой n-мерных кубов (n-ячеек ранга ν)

$$\delta_s := [0, 2^{-\nu}]^n + 2^{-\nu} s, \quad s \in \mathbf{Z}^n.$$

Объединение e конечной совокупности n-ячеек ранга ν называется элементарным множеством ранга ν. Аналогично определяется элементарное множество $\tilde{e}$ ранга ν в декартовой степени $\mathbf{R}^k_J$. Проекция π_J отображает всякое элементарное множество $e \subset \mathbf{R}^n$ ранга ν на элементарное множество $\tilde{e} := \pi_J e \subset \mathbf{R}^k_J$ ранга ν. Связное элементарное множество $d \subset \mathbf{R}^n$ ранга ν называется π_J-доменом ранга ν, если его проекция $\pi_J d \subset \mathbf{R}^k_J$ состоит из одной k-ячейки $\tilde{\delta} \subset \mathbf{R}^k_J$ ранга ν. π_J-домен $d \subseteq e$ ранга ν называется максимальным (в множестве e), если для любого π_J-домена $d' \subseteq e$ ранга ν, удовлетворяющего условию $d \subseteq d'$, выполняется равенство $d = d'$.

Пусть E – ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$, e^E_ν – объединение всех n-ячеек ранга ν, пересекающихся с замыканием $\bar{E}$ множества E. Если максимальный в e^E_ν π_J-домен d лежит в множестве $A \subseteq e^E_\nu$, то пишем $d \sqsubseteq A$. Для любой n-ячейки δ ранга ν при $k > 0$ символом $v_J(\delta)$ обозначаем верхнюю меру π_J-проекции $\pi_J(E \cap \delta) \subset \mathbf{R}^k_J$ по Жордану. При $k = 0$ полагаем $v_J(\delta) := \#\pi_J(E \cap \delta)$, если множество $\pi_J(E \cap \delta)$ конечно, и $v_J(\delta) := +\infty$, если множество $\pi_J(E \cap \delta)$ бесконечно. Здесь символ $\#A$ обозначает число элементов в множестве A. Для любого π_J-домена $d \sqsubseteq e^E_\nu$ символом $v_J(d)$ обозначаем сумму

$$\sum_{\delta \subseteq d} v_J(\delta),$$

где суммирование ведется по всем n-ячейкам ранга ν, составляющим d.

Если $A \subseteq e_\nu^E$, то символом $v_J(A)$ обозначаем сумму

$$\sum_{d \sqsubseteq A} v_J(d),$$

где суммирование ведется по всем максимальным в e_ν^E π_J-доменам, лежащим в множестве A.

Наделим множество E произвольным отношением частичного симплексирования размерности k. Пространство $\mathbf{R}_J^k$ наделяем отношением канонического частичного симплексирования [1]. Пусть $k > 0$. π_J-домен $d \sqsubseteq e_\nu^E$ называется положительным (соотв. отрицательным), если сужение проекции π_J на множество $E \cap d$ является изоморфизмом (соотв. антиизоморфизмом) частично симплексированных множеств $E \cap d$ и $\tilde{d} := \pi_J d$. Если $k = 0$, то положительные и отрицательные π_J-домены выбираются среди максимальных в e_ν^E π_J-доменов произвольным образом. Положительные и отрицательные π_J-домены в e_ν^E называются ориентированными π_J-доменами в e_ν^E. Объединение всех положительных (соотв. отрицательных) π_J-доменов $d \sqsubseteq e_\nu^E$ обозначим p_ν^E (соотв. n_ν^E). Тогда объединение всех ориентированных π_J-доменов в e_ν^E совпадает с объединением $o_\nu^E := p_\nu^E \cup n_\nu^E$. Символом $\bar{p}_\nu^E$ (соотв $\bar{n}_\nu^E$) обозначаем объединение всех π_J-доменов $d \sqsubseteq e_\nu^E$, которые не являются положительными (соотв. отрицательными), а символом s_ν^E обозначаем пересечение $\bar{p}_\nu^E \cap \bar{n}_\nu^E$. Легко увидеть, что множество s_ν^E содержится в e_ν^E и имеет место равенство

$$e_\nu^E = p_\nu^E \cup n_\nu^E \cup s_\nu^E.$$

Отметим, что множество s_ν^E, вообще говоря, не является элементарным множеством ранга ν. Оно может содержать пересечения n-ячеек ранга ν, которые не влияют на величину $v_J(s_\nu^E)$.

Придавая ν всевозможные натуральные значения, получаем три последовательности:

$$\{v_J(p_\nu^E)\}_{\nu=1}^\infty, \quad \{v_J(n_\nu^E)\}_{\nu=1}^\infty, \quad \{v_J(s_\nu^E)\}_{\nu=1}^\infty.$$

Первые две последовательности не убывают, значит, существуют конечные или бесконечные пределы

$$\mu_J^+(E) := \lim_{\nu\to\infty} v_J(p_\nu^E), \quad \mu_J^-(E) := \lim_{\nu\to\infty} v_J(n_\nu^E).$$

Если $\mu_J^+(E), \mu_J^-(E) < +\infty$ и $\lim_{\nu\to\infty} v_J(s_\nu^E) = 0$, то говорят, что частично симплексированное множество E измеримо по проекции π_J или просто π_J-измеримо. При этом разность

$$\mu_J(E) := \mu_J^+(E) - \mu_J^-(E)$$

называется мерой E по проекции π_J или просто π_J-мерой E. Совокупность всех измеримых по проекции π_J частично симплексированных множеств размерности k обозначаем символом Σ_J.

2.2. Определение интеграла по проекции. Пусть на множестве $E \in \Sigma_J$[1] определена ограниченная действительная функция f и

$$M := \sup_E |f|.$$

[1] O_k – совокупность всех ограниченных частично симплексированных множеств $R \subset \mathbf{R}^n$ размерности k;

$O(R)$ – совокупность всех подмножеств множества $R \in O_k$ с индуцированным из R отношением частичного симплексирования;

Σ_J – совокупность всех измеримых по проекции π_J множеств $R \in O_k$;

$\Sigma_J(R)$ – совокупность всех измеримых по проекции π_J множеств из $O(R)$.

Будем считать, что вне множества E все значения функции f равны нулю. Для любого $\xi \in \mathbf{R}^n$ положим

$$f_+(\xi) := \max\{0, f(\xi)\}, \ f_-(\xi) := -\min\{0, f(\xi)\}.$$

Для любого натурального ν и любого π_J-домена $d \sqsubseteq e_\nu^E$ символами

$$m_d^+, \quad m_d^-, \quad m_d, \quad M_d^+, \quad M_d^-, \quad M_d$$

обозначаем точные грани

$$\inf_d f_+, \quad \inf_d f_-, \quad \inf_d f, \quad \sup_d f_+, \quad \sup_d f_-, \quad \sup_d f$$

соответственно. Справедливы очевидные соотношения:

$$0 \le m_d^+ \le M_d^+ \le M, \quad 0 \le m_d^- \le M_d^- \le M, \quad M_d \le M_d^+, -m_d \le M_d^-,$$

$$(M_d^+ - m_d^+) + (M_d^- - m_d^-) \le M_d - m_d \le M_d^+ + M_d^-.$$

Рассмотрим последовательность

$$\Delta S_\nu^E := \sum_{d \sqsubseteq e_\nu^E} 2^{-\nu k}(M_d - m_d)$$

и последовательности

$$(\sigma_\nu^E)_+ := \sum_{d \sqsubseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k} m_d^+ + \sum_{d \sqsubseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k} m_d^-,$$

$$(\sigma_\nu^E)_- := \sum_{d \sqsubseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k} m_d^- + \sum_{d \sqsubseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k} m_d^+,$$

$$(\Sigma_\nu^E)_+ = \sum_{d \sqsubseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k} M_d^+ + \sum_{d \sqsubseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k} M_d^-,$$

$$(\Sigma_\nu^E)_- = \sum_{d \sqsubseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k} M_d^- + \sum_{d \sqsubseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k} M_d^+.$$

Последовательности $(\sigma_\nu^E)_+$ и $(\sigma_\nu^E)_-$ не убывают и

$$0 \le (\sigma_\nu^E)_+ \le M\,|\mu_J|\,(E), \quad 0 \le (\sigma_\nu^E)_- \le M\,|\mu_J|\,(E)$$

для любого натурального ν. Значит, существуют конечные пределы

$$\mathcal{I}_+^E := \lim_{\nu\to\infty}(\sigma_\nu^E)_+, \ \ \mathcal{I}_-^E := \lim_{\nu\to\infty}(\sigma_\nu^E)_-.$$

Если последовательность ΔS_ν^E сходится к нулю, то функцию f называем *интегрируемой по проекции* π_J или π_J-*интегрируемой* на множестве E и пишем $f \in \mathcal{I}_J(E)$. При этом предел $\mathcal{I}_-^E$ называем *нижним* π_J-*интегралом* функции f по множеству E, предел $\mathcal{I}_+^E$ называем *верхним* π_J-*интегралом* функции f по множеству E, а число $\mathcal{I}^E := \mathcal{I}_+^E - \mathcal{I}_-^E$ называем *интегралом по проекции* π_J или π_J-*интегралом* функции f по множеству E и обозначаем символом

$$\int\limits_E f(x)dx_J := \int\limits_E f(x)dx_{j_1}\dots dx_{j_k}.$$

2.3. Последовательность интегральных сумм. Подвергнем данное выше определение интеграла по проекции первоначальному анализу с позиций традиционного подхода к понятию поверхностного интеграла по координатам. Для этого определим последовательность интегральных сумм

$$S_\nu^E := \sum_{d\sqsubseteq o_\nu^E} 2^{-\nu k} h_d f(\xi_d) = \sum_{d\sqsubseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k} f(\xi_d) - \sum_{d\sqsubseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k} f(\xi_d),$$

где $\xi_d \in E \cap d$ и

$$h_d := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad d \sqsubseteq p_\nu^E, \\ -1, & \text{если} \quad d \sqsubseteq n_\nu^E. \end{cases}$$

Рассмотрим связь этой последовательности с числом $\mathcal{I}^E$.

Предложение 1. *Если функция f интегрируема по проекции π_J на множестве E, то $(\Sigma_\nu^E)_+ \to \mathcal{I}_+^E$ и $(\Sigma_\nu^E)_- \to \mathcal{I}_-^E$ при $\nu \to \infty$.*

Доказательство. Для любого натурального ν выполняются неравенства:

$$0 \le (\Sigma_\nu^E)_+ - (\sigma_\nu^E)_+ = \sum_{d\sqsubseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k}\left(M_d^+ - m_d^+\right) + \sum_{d\sqsubseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k}\left(M_d^- - m_d^-\right) \le$$

$$\le \sum_{d\sqsubseteq o_\nu^E} 2^{-\nu k}(M_d - m_d) \le \sum_{d\sqsubseteq e_\nu^E} 2^{-\nu k}(M_d - m_d) = \Delta S_\nu^E;$$

$$0 \le (\Sigma_\nu^E)_- - (\sigma_\nu^E)_- = \sum_{d\sqsubseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k}\left(M_d^- - m_d^-\right) + \sum_{d\sqsubseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k}\left(M_d^+ - m_d^+\right) \le$$

$$\le \sum_{d\sqsubseteq o_\nu^E} 2^{-\nu k}(M_d - m_d) \le \sum_{d\sqsubseteq e_\nu^E} 2^{-\nu k}(M_d - m_d) = \Delta S_\nu^E.$$

При этом, если функция f интегрируема по проекции π_J на множестве E, то $\Delta S_\nu^E \to 0$ при $\nu \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\nu\to\infty}(\Sigma_\nu^E)_+ = \lim_{\nu\to\infty}(\sigma_\nu^E)_+ =: \mathcal{I}_+^E,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}(\Sigma_\nu^E)_- = \lim_{\nu\to\infty}(\sigma_\nu^E)_- =: \mathcal{I}_-^E.$$

Предложение доказано. ■

Предложение 2. *Если функция f интегрируема по проекции π_J на множестве E, то последовательность интегральных сумм S_ν^E сходится к $\mathcal{I}^E$ при любом выборе $\xi_d \in E \cap d$.*

Доказательство. Из определения функций f_+ и f_- вытекает, что $f = f_+ - f_-$. Значит, $S_\nu^E = S_\nu^E(f_+) - S_\nu^E(f_-)$, где

$$S_\nu^E(f_+) = \sum_{d\sqsubseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k} f_+(\xi_d) - \sum_{d\sqsubseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k} f_+(\xi_d),$$

$$S_\nu^E(f_-) = \sum_{d\sqsubseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k} f_-(\xi_d) - \sum_{d\sqsubseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k} f_-(\xi_d).$$

При этом

$$\sum_{d\sqsubseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k} m_d^+ - \sum_{d\sqsubseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k} M_d^+ \le S_\nu^E(f_+) \le \sum_{d\sqsubseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k} M_d^+ - \sum_{d\sqsubseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k} m_d^+,$$

$$\sum_{d\sqsubseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k} m_d^- - \sum_{d\sqsubseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k} M_d^- \le S_\nu^E(f_-) \le \sum_{d\sqsubseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k} M_d^- - \sum_{d\sqsubseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k} m_d^-.$$

Значит,

$$(\sigma_\nu^E)_+ - (\Sigma_\nu^E)_- \le S_\nu^E \le (\Sigma_\nu^E)_+ - (\sigma_\nu^E)_-.$$

Остальное вытекает из предыдущего предложения. ■

Если $k > 0$, $E \subset \mathbf{R}_J^k$ и отношение частичного симплексирования на множестве E индуцировано из $\mathbf{R}_J^k$, то в силу известного критерия Дарбу интегрируемость по проекции ограниченной функции эквивалентна ее интегрируемости по Риману.

При $k = 0$ для любого достаточно большого ранга ν имеем $\Delta S_\nu^E(f) = 0$. Это означает, что в этом случае любая функция f интегрируема по проекции π_J на множестве $E \in \Sigma_J$ и при этом

$$\int\limits_E f(x)dx_J = \sum_{\xi\in E_+} f(\xi) - \sum_{\xi\in E_-} f(\xi).$$

Важно отметить еще связь интегрируемости функции f с интегрируемостью функций f_+ и f_-.

Предложение 3. *Интегрируемость по проекции π_J на множестве E функции f влечет интегрируемость по проекции π_J на множестве E функций f_+ и f_-. При этом справедливо равенство*

$$\int\limits_E f(x)dx_J = \int\limits_E f_+(x)dx_J - \int\limits_E f_-(x)dx_J.$$

Доказательство. Из следующих соотношений

$$\Delta S_\nu^E(f_+) + \Delta S_\nu^E(f_-) = \sum_{d\sqsubseteq e_\nu^E} 2^{-\nu k}(M_d^+ - m_d^+) + \sum_{d\sqsubseteq e_\nu^E} 2^{-\nu k}(M_d^- - m_d^-) =$$

$$= \sum_{d\sqsubseteq e_\nu^E} 2^{-\nu k}(M_d^+ - m_d^+ + M_d^- - m_d^-) \le \sum_{d\sqsubseteq e_\nu^E} 2^{-\nu k}(M_d - m_d) =: \Delta S_\nu^E(f)$$

вытекает, что интегрируемость по проекции π_J на множестве E функции f влечет интегрируемость по проекции π_J на множестве E функций f_+ и f_-. При этом $S_\nu^E(f) = S_\nu^E(f_+) - S_\nu^E(f_-)$, значит, по предложению 2 для любой π_J-интегрируемой на множестве E функции f справедливо требуемое равенство. ■

3. Исчерпывающие пары

3.1. Определение исчерпывающей пары. Пару последовательностей

$$\{p'_\nu\}_{\nu=1}^\infty,\ \{n'_\nu\}_{\nu=1}^\infty,$$

где p'_ν, n'_ν – элементарные множества ранга ν, будем называть парой, *исчерпывающей множество* $E \in \Sigma_J$ *по проекции* π_J, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) множество p'_ν составлено из π_J-доменов $d \sqsubseteq p^E_\nu$, а множество n'_ν составлено из π_J-доменов $d \sqsubseteq n^E_\nu$;

2) $\lim_{\nu\to\infty} v_J(p'_\nu) = \mu^+_J(E)$, $\lim_{\nu\to\infty} v_J(n'_\nu) = \mu^-_J(E)$.

Пара последовательностей $\left\{p^E_\nu\right\}^\infty_{\nu=1}$, $\left\{n^E_\nu\right\}^\infty_{\nu=1}$ является примером пары, исчерпывающей множество E по проекции π_J.

Рассмотрим более общий пример. Пусть частично симплексированное множество $A \in O(E)$ измеримо по проекции π_J и $|\mu_J|(A) = 0$ [2, п. 2.3]. Обозначим p'_ν объединение всех π_J-доменов $d \sqsubseteq p^E_\nu$, которые не пересекаются с множеством A, n'_ν – объединение всех π_J-доменов $d \sqsubseteq n^E_\nu$, которые тоже не пересекаются с множеством A. Легко увидеть, что пара последовательностей $\{p'_\nu\}^\infty_{\nu=1}$, $\{n'_\nu\}^\infty_{\nu=1}$ является примером пары, исчерпывающей множество E по проекции π_J. Действительно, множество $E\setminus A$ измеримо по проекции π_J и

$$\mu^+_J(E \setminus A) = \mu^+_J(E),\ \ \mu^-_J(E \setminus A) = \mu^-_J(E).$$

При этом выполняются очевидные соотношения:

$$p'_\nu \subseteq p^{E\setminus A}_\nu \subseteq p'_\nu \cup s^E_\nu,\quad n'_\nu \subseteq n^{E\setminus A}_\nu \subseteq n'_\nu \cup s^E_\nu.$$

Значит,

$$v_J(p'_\nu) \le v_J(p^{E\setminus A}_\nu) \le v_J(p'_\nu) + v_J(s^E_\nu),$$
$$v_J(n'_\nu) \le v_J(n^{E\setminus A}_\nu) \le v_J(n'_\nu) + v_J(s^E_\nu).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\nu\to\infty} v_J(p^{E\setminus A}_\nu) = \mu^+_J(E),\quad \lim_{\nu\to\infty} v_J(n^{E\setminus A}_\nu) = \mu^-_J(E).$$

3.2. Дополнение к определению интеграла по проекции. Предположим, что функция f ограничена на $E \in \Sigma_J$ и равна нулю вне множества E. Выберем произвольную пару $\{p'_\nu\}^\infty_{\nu=1}$, $\{n'_\nu\}^\infty_{\nu=1}$, исчерпывающую множество E по проекции π_J. Суммируя по π_J-доменам $d \sqsubseteq p'_\nu$ и $d \sqsubseteq n'_\nu$, получаем суммы:

$$(\sigma'_\nu)_+ := \sum_{d\sqsubseteq p'_\nu} 2^{-\nu k} m^+_d + \sum_{d\sqsubseteq n'_\nu} 2^{-\nu k} m^-_d,$$

$$(\sigma'_\nu)_- := \sum_{d\sqsubseteq p'_\nu} 2^{-\nu k} m^-_d + \sum_{d\sqsubseteq n'_\nu} 2^{-\nu k} m^+_d,$$

$$(\Sigma'_\nu)_+ = \sum_{d\sqsubseteq p'_\nu} 2^{-\nu k} M^+_d + \sum_{d\sqsubseteq n'_\nu} 2^{-\nu k} M^-_d,$$

$$(\Sigma'_\nu)_- = \sum_{d\sqsubseteq p'_\nu} 2^{-\nu k} M^-_d + \sum_{d\sqsubseteq n'_\nu} 2^{-\nu k} M^+_d.$$

Замечаем, что разности

$$(\sigma^E_\nu)_- - (\sigma'_\nu)_-,\quad (\sigma^E_\nu)_+ - (\sigma'_\nu)_+,\quad (\Sigma^E_\nu)_- - (\Sigma'_\nu)_-,\quad (\Sigma^E_\nu)_+ - (\Sigma'_\nu)_+$$

не превосходят числа

$$\Delta v_\nu := M\left(v_J(p^E_\nu) - v_J(p'_\nu) + v_J(n^E_\nu) - v_J(n'_\nu)\right).$$

При этом по определению исчерпывающей пары $\Delta v_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$. Значит,

$$\lim_{\nu\to\infty}(\sigma'_\nu)_- = \lim_{\nu\to\infty}(\Sigma'_\nu)_- = \mathcal{I}^E_-$$

$$\lim_{\nu\to\infty}(\sigma'_\nu)_+ = \lim_{\nu\to\infty}(\Sigma'_\nu)_+ = \mathcal{I}^E_+.$$

Кроме того, разность $S^E_\nu - S'_\nu$ тоже не превосходит числа Δv_ν. Следовательно,

$$\lim_{\nu\to\infty}(S^E_\nu - S'_\nu) = 0.$$

Это означает, что при определении интеграла по проекции π_J от ограниченной на множестве $E \in \Sigma_J$ функции f можно заменить пару последовательностей $\{p^E_\nu\}^\infty_{\nu=1}$, $\{n^E_\nu\}^\infty_{\nu=1}$ произвольной парой $\{p'_\nu\}^\infty_{\nu=1}$, $\{n'_\nu\}^\infty_{\nu=1}$, исчерпывающей множество E по проекции π_J. При этом независимо от выбора отмеченных точек $\xi_d \in d$ выполняются неравенства:

$$S'_\nu(f) = \sum_{d\sqsubseteq p^E_\nu} 2^{-\nu k} f_+(\xi_d) + \sum_{d\sqsubseteq n^E_\nu} 2^{-\nu k} f_-(\xi_d) - \sum_{d\sqsubseteq p^E_\nu} 2^{-\nu k} f_-(\xi_d) - \sum_{d\sqsubseteq n^E_\nu} 2^{-\nu k} f_+(\xi_d) \le$$

$$\le \sum_{d\sqsubseteq p^E_\nu} 2^{-\nu k} M^+_d + \sum_{d\sqsubseteq n^E_\nu} 2^{-\nu k} M^-_d - \sum_{d\sqsubseteq p^E_\nu} 2^{-\nu k} m^-_d - \sum_{d\sqsubseteq n^E_\nu} 2^{-\nu k} m^+_d = (\Sigma'_\nu)_+ - (\sigma'_\nu)_-;$$

$$S'_\nu(f) = \sum_{d\sqsubseteq p^E_\nu} 2^{-\nu k} f_+(\xi_d) + \sum_{d\sqsubseteq n^E_\nu} 2^{-\nu k} f_-(\xi_d) - \sum_{d\sqsubseteq p^E_\nu} 2^{-\nu k} f_-(\xi_d) - \sum_{d\sqsubseteq n^E_\nu} 2^{-\nu k} f_+(\xi_d) \ge$$

$$\ge \sum_{d\sqsubseteq p^E_\nu} 2^{-\nu k} m^+_d + \sum_{d\sqsubseteq n^E_\nu} 2^{-\nu k} m^-_d - \sum_{d\sqsubseteq p^E_\nu} 2^{-\nu k} M^-_d - \sum_{d\sqsubseteq n^E_\nu} 2^{-\nu k} M^+_d = (\sigma'_\nu)_+ - (\Sigma'_\nu)_-.$$

Значит, для любой функции $f \in \mathcal{I}_J(E)$ имеем

$$\int\limits_E f(x)dx_J = \lim_{\nu\to\infty} S'_\nu.$$

Если $E \subset \mathbf{R}^k_J$ и отношение частичного симплексирования на множестве E индуцировано из $\mathbf{R}^k_J$, то вместо пары последовательностей $\{p'_\nu\}^\infty_{\nu=1}$, $\{n'_\nu\}^\infty_{\nu=1}$, исчерпывающей множество $E \in \Sigma_J$ по проекции π_J, говорим лишь об одной последовательности $\{p'_\nu\}^\infty_{\nu=1}$, исчерпывающей измеримое множество $E \subset \mathbf{R}^k_J$. Эта последовательность удовлетворяет естественным условиям: всякая k-ячейка элементарного множества $p'_\nu \subset \mathbf{R}^k_J$ является k-ячейкой элементарного множества p^E_ν и $\lim_{\nu\to\infty} v_k(p'_\nu) = \mu_k(E)$.

4. Критерий интегрируемости по проекции

4.1. Нуль-множества по проекции. Пусть $E \in \Sigma_J$. Покрытие $e_1, e_2, \ldots$ множества $R \subseteq E$ называем *элементарным*, если каждое множество e_j является элементарным множеством ранга $\nu(j)$. Множество $R \subseteq E$ называем *нуль-множеством по проекции* π_J, если для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарное покрытие $e_1, e_2, \ldots$ множества R, удовлетворяющее условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} v_J(e_j) < \varepsilon.$$

Говорим, что функция f, определенная на множестве E, *непрерывна почти всюду на* E *по проекции* π_J, если точки разрыва этой функции образуют нуль-множество по проекции π_J.

Предоставляем читателю самому убедиться в справедливости следующих свойств нуль-множеств по проекции π_J:

- конечные и счетные множества являются нуль-множествами по проекции π_J;
- любое подмножество нуль-множества по проекции π_J является нуль-множеством по проекции π_J;
- объединение счетной совокупности нуль-множеств по проекции π_J является нуль-множеством по проекции π_J;
- множество $R \in \Sigma_J(E)$, имеющее нулевую вариацию $|\mu_J|(R)$ меры по проекции π_J, является нуль-множеством по проекции π_J;
- компактное нуль-множество $R \in O(E)$ по проекции π_J измеримо по проекции π_J и $|\mu_J|(R) = 0$.

4.2. Критерий интегрируемости по проекции. Ниже докажем критерий интегрируемости по проекции π_J ограниченной функции f. Этот критерий является развитием известного критерия Лебега интегрируемости ограниченной функции по Риману.

Теорема 1. *Для того, чтобы ограниченная на множестве $E \in \Sigma_J$ функция f была π_J-интегрируема на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы f была непрерывна почти всюду на E по проекции π_J.*

Доказательство. *Необходимость*. При $k = 0$ теорема очевидно справедлива. Пусть $k > 0$, функция f ограничена и интегрируема на множестве E по проекции π_J, $R \subseteq E$ – множество точек разрыва функции f. Предположим, что множество R не является нуль-множеством по проекции π_J. Обозначим R_i множество точек x из R, удовлетворяющих условию: для любой окрестности $U(x)$ точки x выполняется неравенство

$$\sup\nolimits_{U(x)\cap E} f - \inf\nolimits_{U(x)\cap E} f \geq \frac{1}{i}.$$

Из определения точек разрыва вытекает, что

$$R = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i.$$

Следовательно, для некоторого натурального i' множество $R' := R_{i'}$ не является нуль-множеством по проекции π_J. Это означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого элементарного покрытия $e_1, e_2, \dots$ множества R' выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} v_J(e_j) \geq \varepsilon.$$

Выберем произвольное $\nu \in \mathbf{N}$ и из семейства π_J-доменов $d \sqsubseteq e_\nu^E$ удалим те, внутренности которых не пересекаются с множеством R'. Полученное элементарное множество $e'_\nu \subseteq e_\nu^E$ ранга ν включает множество R', значит, совокупность π_J-доменов $d \sqsubseteq e'_\nu$ образует элементарное покрытие множества R'. Следовательно,

$$v_J(e'_\nu) = \sum_{d \sqsubseteq e'_\nu} 2^{-\nu k} \geq \varepsilon.$$

При этом

$$\Delta S_\nu^E \geq \sum\nolimits_{d \sqsubseteq e'_\nu} 2^{-\nu k}(M_d - m_d) \geq \frac{\varepsilon}{i'} > 0$$

для любого $\nu \in \mathbf{N}$. Но это противоречит интегрируемости по проекции π_J функции f на множестве E.

Достаточность. Будем считать, что множество R точек разрыва функции f является нуль-множеством по проекции π_J. Пусть $\varepsilon > 0$, $M := \sup_E |f|$, $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{4M}$ и

$$\frac{1}{i} \le \varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{2(|\mu_J|(E)+1)}.$$

Пусть o_ν – объединение всех π_J-доменов $d \sqsubseteq o_\nu^E$, которые не пересекаются с множеством R_i, s_ν – объединение всех π_J-доменов $d \sqsubseteq o_\nu^E$, которые пересекаются с множеством R_i.

Во-первых, множество R_i является компактным нуль-множеством по проекции π_J. Значит, $|\mu_J|(R_i) = 0$ и $|\mu_J|(E \setminus R_i) = |\mu_J|(E)$. Для любого ранга ν выполняются соотношения $o_\nu^E = o_\nu \cup s_\nu$, $o_\nu \subseteq o_\nu^{E\setminus R_i} \subseteq o_\nu \cup s_\nu^E$ и

$$v_J(o_\nu^E) = v_J(o_\nu) + v_J(s_\nu),$$

$$v_J(o_\nu) \le v_J(o_\nu^{E\setminus R_i}) \le v_J(o_\nu) + v_J(s_\nu^E).$$

Следовательно,

$$\lim_{\nu\to\infty} v_J(s_\nu) = 0$$

и для любого $\nu \ge \nu'$ выполняется неравенство $v_J(s_\nu) < \varepsilon_1$. При этом $R_i \subset \operatorname{int} s_\nu$.

Во-вторых, для любой точки $x \in \bar{E}\setminus R_i$ символом s_ν^x обозначим объединение всех π_J-доменов $d \sqsubseteq e_\nu^E$, содержащих точку x. Пусть для любого $\nu \ge \nu_x$ выполняется неравенство

$$\sup_{E\cap s_\nu^x} f - \inf_{E\cap s_\nu^x} f < \varepsilon_2.$$

Семейство открытых множеств $\operatorname{int} s_{\nu_x}^x$, $x \in \bar{E} \setminus R_i$ покрывает компакт $\bar{E} \setminus \operatorname{int} s_{\nu'}$. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $\operatorname{int} s_{\nu_x}^x$, $x \in \{x^{(1)}, \dots, x^{(t)}\}$. Пусть натуральное $\nu'' \ge \max\{\nu', \nu_{x^{(1)}}, \dots, \nu_{x^{(t)}}\}$ выбрано из условия: для любого $\nu \ge \nu''$ выполняется неравенство

$$v_J(e_\nu^E) < |\mu_J|(E) + 1.$$

Сумма

$$\Delta S_\nu^E = \sum\nolimits_{d\sqsubseteq e_\nu^E} 2^{-\nu k}(M_d - m_d)$$

может быть представлена в виде $\Delta S'_\nu + \Delta S''_\nu$, где в сумме $\Delta S'_\nu$ суммирование ведется по всем π_J-доменам $d \sqsubseteq s_{\nu'}$, а в сумме $\Delta S''_\nu$ суммирование ведется по всем остальным π_J-доменам $d \sqsubseteq e_\nu^E$. Если $\nu \ge \nu''$ и π_J-домен $d \sqsubseteq e_\nu^E$ не лежит в множестве $s_{\nu'}$, то он лежит в $s_{\nu_x}^x$, где x – некоторая точка из набора $\{x^{(1)}, \dots, x^{(t)}\}$. Значит, для всякого $\nu \ge \nu''$ имеем

$$\Delta S_\nu^E \le 2M\varepsilon_1 + (|\mu_J|(E)+1)\varepsilon_2 = \varepsilon.$$

Из этих соотношений вытекает, что

$$\lim_{\nu\to\infty} \Delta S_\nu^E = 0.$$

Теорема доказана. ■

4.3. Следствия критерия. Точки разрыва функций f_+ и f_- являются точками разрыва функции f. Отсюда и из доказанного критерия вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 4. *Интегрируемость по проекции π_J на множестве $E \in \Sigma_J$ ограниченной функции f равносильна интегрируемости по проекции π_J на множестве E функций f_+ и f_-.*

Из этого предложения и из очевидного соотношения $S_\nu^E(f) = S_\nu^E(f_+) - S_\nu^E(f_-)$ вытекает, что справедливо такое предложение.

Предложение 5. *Интегрируемость по проекции π_J на множестве $E \in \Sigma_J$ ограниченной функции f равносильна существованию предела последовательности интегральных сумм $\lim_{\nu\to\infty} S_\nu^E(f)$, который, понятно, не зависит от выбора отмеченных точек ξ_d. При этом*

$$\int\limits_E f(x)dx_J = \lim_{\nu\to\infty} S_\nu^E(f). \tag{1}$$

4.4. Замечания. Сделаем два важных замечания. Во-первых, предложение 5 показывает, что данное в этой статье определение интеграла по проекции соблюдает формальную преемственность, то есть речь не идет об определении нового интеграла, а лишь о продолжении традиционного подхода к интегрированию по координатам на более общий случай измеримых частично симплексированных множеств в $\mathbf{R}^n$.

Во-вторых, интегральная сумма $S_\nu^E(f)$ имеет смысл для любой локально ограниченной на $E \in \Sigma_J$ функции f. Поэтому предложение 5 позволяет использовать соотношение (1) для распространения понятия интегрируемости по проекции и понятия интеграла по проекции на произвольные локально ограниченные на E функции. Далее символом $\mathcal{I}_J(E)$ обозначаем совокупность всех π_J-интегрируемых на множестве E локально ограниченных функций.

5. Счетная аддитивность интеграла по проекции

5.1. Аддитивность интеграла по проекции. Свойство аддитивности интеграла по проекции состоит в следующем: если ограниченная действительная функция f интегрируема по проекции π_J на множестве $E \in \Sigma_J$ и $A, A_1, A_2 \in \Sigma_J(E)$, $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то функция f интегрируема по проекции π_J на множествах A, A_1, A_2 и

$$\int_A f(x)dx_J = \int_{A_1} f(x)dx_J + \int_{A_2} f(x)dx_J.$$

Убедимся в справедливости следующего предложения.

Предложение 6. *Интеграл по проекции обладает свойством аддитивности.*

Доказательство. Действительно, интегрируемость по проекции π_J функции f на множествах A, A_1, A_2 следует из очевидных неравенств

$$\Delta S_\nu^A \le \Delta S_\nu^E, \quad \Delta S_\nu^{A_1} \le \Delta S_\nu^E, \quad \Delta S_\nu^{A_2} \le \Delta S_\nu^E.$$

При этом пара последовательностей $p'_\nu := p_\nu^{A_1} \cup p_\nu^{A_2}$, $n'_\nu := n_\nu^{A_1} \cup n_\nu^{A_2}$ является исчерпывающей множество A по проекции π_J и

$$(\sigma'_\nu)_- = (\sigma_\nu^{A_1})_- + (\sigma_\nu^{A_2})_-, \quad (\sigma'_\nu)_+ = (\sigma_\nu^{A_1})_+ + (\sigma_\nu^{A_2})_+.$$

Следовательно,

$$\mathcal{I}_-^A = \mathcal{I}_-^{A_1} + \mathcal{I}_-^{A_2}, \quad \mathcal{I}_+^A = \mathcal{I}_+^{A_1} + \mathcal{I}_+^{A_2}, \quad \mathcal{I}^A = \mathcal{I}^{A_1} + \mathcal{I}^{A_2},$$

где $\mathcal{I}_-^A$ – нижний π_J-интеграл функции f по множеству A, $\mathcal{I}_+^A$ – верхний π_J-интеграл функции f по множеству A, $\mathcal{I}^A := \mathcal{I}_+^A - \mathcal{I}_-^A$ – π_J-интеграл функции f по множеству A. ■

5.2. Счетная аддитивность интеграла по проекции. Свойство счетной аддитивности интеграла по проекции состоит в следующем: если ограниченная действительная функция f интегрируема по проекции π_J на множестве $E \in \Sigma_J$, $A, A_1, A_2, \ldots \in \Sigma_J(E)$,

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

и множества $A_1, A_2, \ldots$ попарно не пересекаются, то функция f интегрируема по проекции π_J на множествах $A, A_1, A_2, \ldots$ и

$$\int_A f(x)dx_J = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f(x)dx_J.$$

Справедливо следующее предложение.

Предложение 7. *Интеграл по проекции обладает свойством счетной аддитивности.*

Доказательство. Действительно, интегрируемость по проекции π_J функции f на множествах $A, A_1, A_2, \ldots$ следует из очевидных неравенств

$$\Delta S_\nu^A \le \Delta S_\nu^E, \quad \Delta S_\nu^{A_j} \le \Delta S_\nu^E, \quad j \in \mathbf{N}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и натуральные $\nu(j)$ подобраны так, что выполняются неравенства

$$v_J(p_{\nu(j)}^{A_j}) \ge \mu_J^+(A_j) - \frac{\varepsilon}{2^j}, \ v_J(n_{\nu(j)}^{A_j}) \ge \mu_J^-(A_j) - \frac{\varepsilon}{2^j},$$

$$(\sigma_{\nu(j)}^{A_j})_+ \ge \mathcal{I}_+^{A_j} - \frac{\varepsilon}{2^j}, \ (\sigma_{\nu(j)}^{A_j})_- \ge \mathcal{I}_-^{A_j} - \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Рассмотрим пару последовательностей

$$p'_\nu := \bigcup_{j=1}^{N_\nu} p_\nu^{A_j}, \ n'_\nu := \bigcup_{j=1}^{N_\nu} n_\nu^{A_j},$$

где натуральное N_ν выбрано из условия: $p_\nu^{A_j} = n_\nu^{A_j} = \varnothing$ для любого $j > N_\nu$. Для выбранного $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{\nu(j)\le N_\nu} \mu_J^+(A_j) - \varepsilon \le v_J(p'_\nu) = \sum_{j=1}^{N_\nu} v_J(p_\nu^{A_j}) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_J^+(A_j),$$

$$\sum_{\nu(j)\le N_\nu} \mu_J^-(A_j) - \varepsilon \le v_J(n'_\nu) = \sum_{j=1}^{N_\nu} v_J(n_\nu^{A_j}) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_J^-(A_j).$$

В силу счетной аддитивности мер μ_J^+ и μ_J^- имеем

$$\lim_{\nu\to\infty} v_J(p'_\nu) = \mu_J^+(A), \quad \lim_{\nu\to\infty} v_J(n'_\nu) = \mu_J^-(A).$$

Это означает, что пара последовательностей p'_ν, n'_ν является исчерпывающей множество A по проекции π_J. При этом

$$\sum_{\nu(j)\le N_\nu} \mathcal{I}_+^{A_j} - \varepsilon \le (\sigma'_\nu)_+ = \sum_{j=1}^{N_\nu} (\sigma_\nu^{A_j})_+ \le \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{I}_+^{A_j},$$

$$\sum_{\nu(j)\le N_\nu} \mathcal{I}_-^{A_j} - \varepsilon \le (\sigma'_\nu)_- = \sum_{j=1}^{N_\nu} (\sigma_\nu^{A_j})_- \le \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{I}_-^{A_j}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{I}_+^{A} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{I}_+^{A_j}, \quad \mathcal{I}_-^{A} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{I}_-^{A_j}, \quad \mathcal{I}^{A} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{I}^{A_j}. \quad \blacksquare$$

5.3. Замечания. Во-первых, пусть $E \in \Sigma_J$, $f \in \mathcal{I}_J(E)$ и f ограничена на E. Непосредственно из определения интеграла по проекции следует, что $\mathcal{I}_J(E) \subseteq \mathcal{I}_J(\mathrm{int}_J\, E)$, где $\mathrm{int}_J\, E$ – π_J-внутренность E. Значит, $f \in \mathcal{I}_J(\mathrm{int}_J\, E)$ и при этом

$$\int_E f(x)dx_J = \int_{\mathrm{int}_J E} f(x)dx_J.$$

Во-вторых, по критерию интегрируемости по проекции функция $f \in \mathcal{I}_J(E)$ принадлежит $\mathcal{I}_J(E_m)$ для любой π_J-компоненты E_m множества E. Из соотношения

$$\mathrm{int}_J\, E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$$

[2, предложение 3] по свойству счетной аддитивности интеграла по проекции вытекает, что

$$\int_E f(x)dx_J = \int_{\mathrm{int}_J E} f(x)dx_J = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{E_m} f(x)dx_J.$$

Из этого соотношения вытекает, например, что интеграл по частично симплексированному листу Мебиуса $\mathcal{M}$ [1, п. 3.6] по проекции $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2)$ распадается в сумму трех поверхностных интегралов по графикам U_1, U_2, U_3 функций ψ_1, ψ_2 и ψ_3 соответственно.

Примечания:

1. Шишкин А.Б. Алгебраическое ориентирование множеств. I. Симплексирование // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2016. Вып. 3 (186). С. 28–38. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Шишкин А.Б. Алгебраическое ориентирование множеств. II. Мера по проекции // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2016. Вып. 4 (191). С. 28–42. URL: http://vestnik.adygnet.ru
3. Шишкин А.Б. Интегрирование на ориентированном множестве по проекции // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2012. Вып. 1 (98). С. 11–19. URL: http://vestnik.adygnet.ru
4. Brown A.B. A Proof of the Lebesgue Condition for Riemann Integrability // The American Mathematical Monthly. 1936. No. 43 (7). С. 396–398.

References:

1. Shishkin A.B. Algebraic orientation of sets (ordering sets). I. Simplexing // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2016. Iss. 3 (186). P. 28–38. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Shishkin A.B. Algebraic orientation of sets (ordering sets). II. Measure for a projection // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2016. Iss. 4 (191). P. 28–41. URL: http://vestnik.adygnet.ru
3. Shishkin A.B. Integration on the focused set on a projection // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2012. Iss. 1 (98). P. 11–19. URL: http://vestnik.adygnet.ru
4. Brown A.B. A Proof of the Lebesgue Condition for Riemann Integrability // The American Mathematical Monthly. 1936. No. 43 (7). С. 396–398.