УДК 514.76
ББК 22.1
Р 89

Рустанов А.Р.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и специальной социологии института социально-гуманитарного образования Московского педагогического государственного университета, Москва, e-mail: aligadzhi@yandex.ru

NC_{10}-многообразия класса R_3

(Рецензирована)

Аннотация. *Получено тождество римановой кривизны почти контактных метрических многообразий класса NC_{10}, названное третьим дополнительным тождеством кривизны NC_{10}-многообразия. На его основе выделен класс NC_{10}-многообразий и получено локальное строение выделенного класса NC_{10}-многообразий.*

Ключевые слова: *косимплектическая структура, интегрируемая структура, приближенно келерово многообразие, точнейше косимплектическая структура, тензор Римана-Кристоффеля, NC_{10}-многообразие класса R_3.*

Rustanov A.R.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Theoretical and Express Sociology of Institute of Social Arts Education of the Moscow Pedagogical State University, Moscow, e-mail: aligadzhi@yandex.ru

NC_{10}-manifolds of class R_3

Abstract*. In this paper we obtain the identity of the Riemannian curvature of almost contact metric manifolds of class NC_{10}, called the third additional curvature identity of the NC_{10}-manifold. On its basis, the class NC_{10}-manifolds is distinguished and a local structure of the distinguished class NC_{10}-manifolds is obtained.*

Keywords*: cosymplectic structure, integrable structure, approximately Kähler manifold, finitely cosymplectic structure, Riemann-Christoffel tensor, NC_{10}-manifold of class R_3*

0. Введение

В данной работе мы продолжаем изучение геометрии тензора римановой кривизны, начатое в работах [1] и [2]. Обращение в нуль отдельных элементов спектра тензора римановой кривизны является дополнительным дифференциально-геометрическим инвариантом второго порядка. Изучение геометрического смысла обращения в нуль одного из элементов спектра тензора римановой кривизны (в частности, $R^{\hat{a}}_{bcd}$) является одной из целей данной статьи.

Работа организована следующим образом. В параграфе 1 напоминаются необходимые для дальнейшего исследования сведения об NC_{10}-многообразиях, взятых из [1–3].

В параграфе 2 мы получаем третье дополнительное тождество тензора римановой кривизны NC_{10}-многообразия, на его основе выделим класс NC_{10}-многообразий и получим локальное строение выделенного класса. Основной результат сформулирован в теореме 2.4.

1. Определение почти контактных метрических многообразий класса NC_{10}

Пусть M – гладкое почти контактное метрическое многообразие (коротко, AC-многообразие) размерности $2n+1$, $X(M)$ – C^{∞}-модуль гладких векторных полей на многообразии M. В дальнейшем все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^{∞}.

Определение 1.1 [3]. AC-структура, характеризуемая тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y+\nabla_Y(\Phi)X=\xi\nabla_X(\eta)\Phi Y+\xi\nabla_Y(\eta)\Phi X+\eta(X)\nabla_{\Phi Y}\xi+\eta(Y)\nabla_{\Phi X}\xi,\quad X,Y\in X(M),\quad (1.1)$$

называется NC_{10} **-структурой**. AC-многообразие, снабженное NC_{10}-структурой, называется NC_{10} **-многообразием**.

Полная группа структурных уравнений NC_{10}-структуры на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид [3]:

$$\begin{aligned}
&1)\ d\omega=F_{ab}\omega^a\wedge\omega^b+F^{ab}\omega_a\wedge\omega_b;\\
&2)\ d\omega^a=-\theta^a_b\wedge\omega^b+C^{abc}\omega_b\wedge\omega_c+F^{ab}\omega_b\wedge\omega;\\
&3)\ d\omega_a=\theta^b_a\wedge\omega_b+C_{abc}\omega^b\wedge\omega^c+F_{ab}\omega^b\wedge\omega;\\
&4)\ d\theta^a_b+\theta^a_c\wedge\theta^c_b=\left(A^{ad}_{bc}-2C^{adh}C_{hbc}-F^{ad}F_{bc}\right)\omega^c\wedge\omega_d,
\end{aligned}\qquad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned}
&C^{abc}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat b,\hat c};\quad C_{abc}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat a}_{b,c};\quad C^{[abc]}=C^{abc};\quad C_{[abc]}=C_{abc};\quad \overline{C^{abc}}=C_{abc};\\
&F^{ab}=\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat a,\hat b};\quad F=-\sqrt{-1}\Phi^0_{a,b};\quad F^{ab}+F^{ba}=0;\quad F_{ab}+F_{ba}=0;\quad \overline{F^{ab}}=F_{ab};\\
&A^{ad}_{[bc]}=A^{[ad]}_{bc}=0;\quad F_{ad}C^{dbc}=F^{ad}C_{dbc}=0.
\end{aligned}\qquad (1.3)$$

Кроме того, имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&1)\ dF_{ab}-F_{cb}\theta^c_a-F_{ac}\theta^c_b=0;\\
&2)\ dF^{ab}+F^{cb}\theta^b_c+F^{ac}\theta^b_c=0;\\
&3)\ dC_{abc}-C_{dbc}\theta^d_a-C_{adc}\theta^d_b-C_{abd}\theta^d_c=C_{abcd}\omega^d;\\
&4)\ dC^{abc}+C^{dbc}\theta^a_d+C^{adc}\theta^b_d+C^{abd}\theta^c_d=C^{abcd}\omega_d;\\
&5)\ dA^{ad}_{bc}+A^{hd}_{bc}\theta^a_h+A^{ah}_{bc}\theta^d_h-A^{ad}_{hb}\theta^h_a-A^{ad}_{bh}\theta^h_c=A^{ad}_{bch}\omega^h+A^{adh}_{bc}\omega_h,
\end{aligned}\qquad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned}
&C_{a[bcd]}=F_{a[b}F_{cd]},\quad C^{a[bcd]}=F^{a[b}F^{cd]},\quad A^{ad}_{b[ch]}=A^{a[dh]}_{bc}=0,\quad A^{ad}_{b[c}C_{gf]d}=2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d},\\
&A^{a[d}_{bc}C^{gf]c}=2C^{ah[d}C_{hbc}C^{gf]c},\quad A^{ad}_{b[c}F_{|d|g]}=F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]},\quad A^{a[d}_{bc}F^{|c|g]}=F^{a[d}F_{bc}F^{|c|g]}.
\end{aligned}\qquad (1.5)$$

Тождество $F^{ad}C_{dbc}=0$ называется ***первым фундаментальным тождеством*** NC_{10}-структуры; тождество $A^{ad}_{b[c}C_{gf]d}=2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d}$ – ***вторым фундаментальным тождеством***; тождество $A^{ad}_{b[c}F_{|d|g]}=F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]}$ – ***третьим фундаментальным тождеством*** [1, 2].

Предложение 1.1 [3]. *NC_{10}-структура является: 1) точнейше косимплектической тогда и только тогда, когда второй структурный тензор равен нулю, то есть $F=0$; 2) структурой класса C_{10} тогда и только тогда, когда первый структурный тензор равен нулю, то есть $C^{abc}=C_{abc}=0$; 3) косимплектической структурой тогда и только тогда, когда $C^{abc}=C_{abc}=0,\ F^{ab}=F_{ab}=0$.*

2. Третье дополнительное тождество кривизны почти контактных метрических многообразий класса NC_{10}

Напомним [3], что существенные ненулевые компоненты тензора Римана-Кристоффеля на пространстве присоединенной G-структуры имеют вид:

$$1)\ R^{b}_{00a}=F_{ac}F^{cb};\qquad 2)\ R^{a}_{bc\hat{d}}=A^{ad}_{bc}-C^{adh}C_{hbc};$$
$$3)\ R^{a}_{\hat{b}cd}=2C^{abh}C_{hcd};\qquad 4)\ R^{\hat{a}}_{bcd}=C_{acdb}-F_{ab}F_{cd}. \tag{2.1}$$

Применим процедуру восстановления тождества [4, 5] к равенствам

$$R^{0}_{bcd}=C^{0}_{cdb}-F^{0}{}_{b}F_{cd}=0,\qquad R^{a}_{bcd}=C^{a}_{cdb}-F^{a}{}_{b}F_{cd}=0,\qquad R^{\hat{a}}_{bcd}=C^{\hat{a}}_{cdb}-F^{\hat{a}}{}_{b}F_{cd}.$$

Таким образом, $R^{i}_{bcd}=C^{i}_{cdb}-F^{i}{}_{b}F_{cd}$, а значит, в каждой точке

$$p\in M\ R(\varepsilon_c,\varepsilon_d)\varepsilon_b=\nabla_{\varepsilon_b}(C)(\varepsilon_c,\varepsilon_d)-F(\varepsilon_b)\langle\varepsilon_c,F(\varepsilon_d)\rangle.$$

Поскольку векторы $\{\varepsilon_a\}$ образуют базис подпространства $\left(D^{\sqrt{-1}}_{\Phi}\right)_p$, это соотношение равносильно тождеству

$$R(X,Y)Z=\nabla_Z(C)(X,Y)-F(Z)\langle X,F(Y)\rangle,\quad X,Y,Z\in D^{\sqrt{-1}}_{\Phi}.$$

Учитывая, что эндоморфизм $\pi=-\frac{1}{2}\left(\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi\right)$ является проектором модуля $X(M)$ на подмодуль $D^{\sqrt{-1}}_{\Phi}$, последнее тождество эквивалентно тождеству:

$$\begin{aligned}&R\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z-R\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z-R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z-R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z=\\&=\nabla_{\Phi^2Z}(C)\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)-\nabla_{\Phi^2Z}(C)(\Phi X,\Phi Y)-\nabla_{\Phi Z}(C)\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)-\\&-\nabla_{\Phi Z}(C)\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)-F\left(\Phi^2Z\right)\left\langle\Phi^2X,F\left(\Phi^2Y\right)\right\rangle+F\left(\Phi^2Z\right)\left\langle\Phi X,F(\Phi Y)\right\rangle+\\&+F(\Phi Z)\left\langle\Phi^2X,F(\Phi Y)\right\rangle+F(\Phi Z)\left\langle\Phi X,F\left(\Phi^2Y\right)\right\rangle,\quad\forall X,Y,Z\in X(M).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Назовем тождество (2.2) ***третьим дополнительным тождеством*** тензора римановой кривизны AC-многообразия класса NC_{10}.

Определение 2.1. AC-многообразие назовем многообразием класса R_3, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет условию

$$R\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z=R\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z+R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z+R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z,\quad\forall X,Y,Z\in X(M).$$

Теорема 2.1. *NC_{10}-многообразие является многообразием класса R_3 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $R^{\hat{d}}_{abc}=0$.*

Доказательство. Пусть NC_{10}-многообразие является многообразием класса R_3. Тогда, согласно определению 2.1, имеет место тождество

$$R\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z=R\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z+R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z+R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z,\quad\forall X,Y,Z\in X(M),$$

которое на пространстве присоединенной G-структуры перепишется в виде

$$R^{i}_{jkl}\Phi^{j}_{h}\Phi^{h}_{r}\Phi^{k}_{m}\Phi^{m}_{p}\Phi^{l}_{s}\Phi^{s}_{q}=R^{i}_{jkl}\Phi^{j}_{r}\Phi^{k}_{m}\Phi^{m}_{p}\Phi^{l}_{q}+R^{i}_{jkl}\Phi^{j}_{r}\Phi^{k}_{p}\Phi^{l}_{s}\Phi^{s}_{q}+R^{i}_{jkl}\Phi^{j}_{h}\Phi^{h}_{r}\Phi^{k}_{p}\Phi^{l}_{q}=0. \tag{2.3}$$

С учетом (2.1) и вида матрицы Ф, получим $4R^{\hat{a}}_{bcd}+4R^{a}_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}=0$, то есть $R^{\hat{a}}_{bcd}=0,\ R^{a}_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}=0$.

Обратно, пусть для NC_{10}-многообразия $R^{\hat{a}}_{bcd}=0$. Поскольку для NC_{10}-многообразия имеют место равенства $R^{a}_{bcd}=0$ и $R^{0}_{bcd}=0$, то, применяя процедуру восстановления тождества к равенствам $R^{i}_{bcd}=0$, получим

$$R\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z=R\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z+R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z+R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z,\quad\forall X,Y,Z\in X(M).\ \blacksquare$$

Из определения 2.1 и (2.3) непосредственно следует следующая теорема.

Теорема 2.2. NC_{10}*-многообразие является многообразием класса* R_3 *тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_{\Phi^2 Z}(C)(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) - \nabla_{\Phi^2 Z}(C)(\Phi X, \Phi Y) - \nabla_{\Phi Z}(C)(\Phi^2 X, \Phi Y) - \nabla_{\Phi Z}(C)(\Phi X, \Phi^2 Y) - \\ - F(\Phi^2 Z)\langle \Phi^2 X, F(\Phi^2 Y)\rangle + F(\Phi^2 Z)\langle \Phi X, F(\Phi Y)\rangle + F(\Phi Z)\langle \Phi^2 X, F(\Phi Y)\rangle + \\ + F(\Phi Z)\langle \Phi X, F(\Phi^2 Y)\rangle = 0, \quad \forall X, Y, Z \in X(M).$$

Теорема 2.3. NC_{10}*-многообразие является многообразием класса* R_3 *тогда и только тогда, когда оно является точнейше косимплектическим многообразием.*

Доказательство. Согласно теореме 2.1, NC_{10}-многообразие является многообразием класса R_3 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $R^{\hat{a}}_{bcd} = 0$, которое с учетом (2.1) примет вид:

$$C_{acdb} = F_{ab} F_{cd}\,.$$

Продифференцировав внешним образом первое фундаментальное тождество NC_{10}-структуры, получим:

$$F^{ah} C_{hcdb} = 0\,. \tag{2.4}$$

Свернем соотношение $C_{acdb} = F_{ab} F_{cd}$ с объектом F^{ha}, тогда с учетом (2.4) $0 = F^{ha} C_{acdb} = F^{ha} F_{ab} F_{cd}$, то есть $F^{ha} F_{ab} F_{cd} = 0$.

Полученное равенство свернем по индексам h и b, тогда имеем $\left(\sum_{a,b} |F_{ab}|^2\right) F_{cd} = 0$.

Это произведение равно нулю тогда и только тогда, когда $F_{ab} = 0$, то есть, согласно предложения 1.1, NC_{10}-многообразие класса R_3 является точнейше косимплектическим многообразием. ■

Как известно [4], точнейше косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую, тогда теорему 2.3 можно сформулировать в форме.

Теорема 2.4. NC_{10}-многообразие класса R_3 локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие M односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

Примечания:

1. Рустанов А.Р., Харитонова С.В. NC_{10}-многообразия класса R_1 // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2016. Вып. 2 (181). С. 48–54. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Рустанов А.Р. NC_{10}-многообразия класса R_2 // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2016. Вып. 4 (191). С. 43–48. URL: http://vestnik.adygnet.ru
3. Рустанов А.Р. Многообразия класса NC_{10} // Преподаватель XXI век. 2014. № 3. С. 209–218.
4. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. 2-е изд., доп. Одесса: Печатный дом, 2013. 458 с.
5. Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р. Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий // Математический сборник. 2002. Т. 193, № 8. С. 71–100.

References:

1. Rustanov A.R., Kharitonova S.V. Class R_1 NC_{10}-variety // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2016. Iss. 2 (181). P. 48–54. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Rustanov A.*R.* On NC_{10}-manifolds of class R_2 // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2016. Iss. 4 (191). P. 43–48. URL: http://vestnik.adygnet.ru
3. Rustanov A.R. Varieties of NC_{10} class // Teacher XXI century. 2014. No. 3. P. 209–218.
4. Kirichenko V.F. Differential-geometric structures on manifolds. Second edition, enlarged. Odessa: Printing House, 2013. 458 pp.
5. Kirichenko V.F., Rustanov A.R. Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds // Mathematical Collection. 2002. Vol. 193, No. 8. P. 71–100.