УДК 517.926
ББК 22.161.1
С 78

Сташ А.Х.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593905, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

О некоторых свойствах полных и векторных гиперчастот решений двумерной дифференциальной системы

(Рецензирована)

Аннотация. *Установлено, что полные гиперчастоты, рассматриваемые как функционалы на множестве решений линейных однородных двумерных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными на полуоси коэффициентами, не являются остаточными (то есть могут меняться при изменении решения на конечном отрезке). Кроме того, приводится пример двумерной дифференциальной системы, для некоторого решения которой полная и векторная гиперчастоты не совпадают.*

Ключевые слова: *линейная дифференциальная система, колеблемость решений, число нулей функции, полная частота, векторная частота.*

Stash A.Kh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593905, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

On some properties of total and vector hyper frequencies of two-dimensional differential system solutions

Abstract. *The paper shows that total hyper frequencies considered as functionals on a set of solutions to linear homogeneous two-dimensional differential systems with continuous coefficients limited on a semiaxis are not residual (i.e. they can change with changing solution on a final interval). Besides, an example is given of two-dimensional differential system for some solution of which total and vector hyper frequencies do not coincide.*

Keywords: *linear differential system, variability of solutions, number of function zeroes, total frequency, vector frequency.*

Введение

Ляпуновские характеристики колеблемости дифференциальных уравнений и систем впервые были введены И.Н. Сергеевым в работах [1–3]. Важным свойством этих характеристик, призванным облегчить их исследование, является остаточность [4], то есть инвариантность относительно изменения решения на любом конечном отрезке. Векторные гиперчастоты любых решений, как оказалось [3], всегда совпадают с их показателями блуждаемости, которые являются остаточными. Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все характеристики колеблемости равны нулю, так как эти решения не имеют нулей, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (как и все нижние) частоты равны между собой [5]. Следовательно, на множестве решений уравнений первого и второго порядков наблюдается остаточность всех характеристик колеблемости. В [6] доказано отсутствие свойства остаточности у полных гиперчастот решений дифференциальных уравнений третьего порядка, а в [7] приводится пример линейного уравнения третьего порядка, для некоторого решения которого полная и векторная гиперчастоты не совпадают. О существовании аналогичного примера для двумерных систем, а также об остаточности полных частот гиперкорней для множества решений линейной однородной двумерной системы не было ничего известно. Этим вопросам и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим множество M^n линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in R^n,\ t \in R^+ \equiv [0,+\infty),$$

каждая из которых отождествляется со своей ограниченной непрерывной оператор-функцией $A:[0,+\infty)\to End\, R^n$. Множество всех ненулевых решений системы $A\in M^n$ обозначим через $S_*(A)$ и положим $S^n\equiv\bigcup\limits_{A\in M^n}S_*(A)$.

Определение 1 [2, 3]**.** Для решения $x\in S_*(A)$ какой-либо системы $A\in M^n$, чисел $t>s\ge 0$ и вектора $m\in R^n$ обозначим через $\nu^*(x,m,t,s)$ количество гиперкорней скалярного произведения $\langle x(\tau),m\rangle$ на промежутке $(s,t]$, где в процессе подсчета этого количества:

a) каждый некратный корень берется ровно один раз;

b) любой кратный корень берется бесконечно много раз независимо от его фактической кратности (другими словами, как только хотя бы в одной точке $\tau_0\in(s,t]$ выполнены одновременно оба равенства $\langle x(\tau_0),m\rangle=\langle\dot x(\tau_0),m\rangle=0$, так сразу величина $\nu^*(x,m,t,s)$ считается равной бесконечности, а в противном случае она равна числу нулей функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(s,t]$).

Определение 2 [2, 3]**.** Каждому решению $x\in S_*(A)$ системы $A\in M^n$ поставим в соответствие верхнюю (нижнюю) полную и векторную гиперчастоты или частоты гиперкорней:

$$\hat\sigma^*(x)\equiv\inf_{m\in R^n}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^*(x,m,t,0)\qquad\left(\breve\sigma^*(x)\equiv\inf_{m\in R^n}\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^*(x,m,t,0)\right),$$

$$\hat\zeta^*(x)\equiv\varlimsup_{t\to+\infty}\inf_{m\in R^n}\frac{\pi}{t}\nu^*(x,m,t,0)\qquad\left(\breve\zeta^*(x)\equiv\varliminf_{t\to+\infty}\inf_{m\in R^n}\frac{\pi}{t}\nu^*(x,m,t,0)\right).$$

В случае совпадения полной или векторной верхней частоты гиперкорней решения x с одноименной нижней будем называть ее точной и обозначать $\sigma(x)$ или $\zeta(x)$ соответственно.

Определение 3 [4]**.** Для заданных множеств M и $F=\{f:R^+\to M\}$ назовем функционал $\lambda:F\to R$ остаточным, если для любых функций $f,g\in F$, удовлетворяющих хотя бы при одном $t_0\in R^+$ условию $f(t)=g(t),\quad t\ge t_0$, имеет место равенство $\lambda(f)=\lambda(g)$.

Формулировка и доказательство результатов

Теорема 1. Существует система $A\in M^2$, некоторое решение $z\in S_*(A)$ которой удовлетворяет неравенству $\zeta(z)<\sigma(z)$.

Теорема 2. Каждый из функционалов $\hat\sigma^*,\breve\sigma^*:S^2\to R^+$ не является остаточным.

Доказательство теоремы 1.

1. Зададим 2π периодическую непрерывно-дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, возрастающую на отрезке $[0,\pi]$, убывающую на участке $[\pi,2\pi]$ и принимающую на концах отрезков значения

$$\varphi(0)=\varphi(2\pi)=0,\quad\varphi(\pi)=\pi,\quad\dot\varphi(0)=\dot\varphi(\pi)=\dot\varphi(2\pi)=0.$$

Далее определим последовательность $0{,}1>\varepsilon_1>\varepsilon_2>\ldots>$ положительных чисел, стремящуюся к нулю, и составим матрицы второго порядка

$$X(t,\varepsilon_{i-1})=\left(x^1(t,\varepsilon_{i-1}),\ \ x^2(t,\varepsilon_{i-1})\right),\quad t\in[(2i-2)\pi,\ 2\pi i],\quad i\in N,\quad \varepsilon_0\equiv 0,$$

где

$$x^1(t,\varepsilon_{i-1}) = \begin{pmatrix} \cos((1-\varepsilon_{i-1})\varphi(t)) \\ \sin((1-\varepsilon_{i-1})\varphi(t)) \end{pmatrix}, \quad x^2(t,\varepsilon_{i-1}) = \begin{pmatrix} -\sin((1-\varepsilon_{i-1})\varphi(t)) \\ \cos((1-\varepsilon_{i-1})\varphi(t)) \end{pmatrix}.$$

Из определения функции $\varphi(t)$ следует непрерывная дифференцируемость элементов матрицы $X(t,\varepsilon_{i-1})$ по t на R^+, а значит, эта матрица является фундаментальной для системы

$$A(t) = \dot{X}(t,\varepsilon_{i-1})X^{-1}(t,\varepsilon_{i-1}) = \begin{pmatrix} 0 & -(1-\varepsilon_{i-1})\dot{\varphi}(t) \\ (1-\varepsilon_{i-1})\dot{\varphi}(t) & 0 \end{pmatrix} \in M^2.$$

2. Для вектора $m^1 = (0,1)$ скалярное произведение $\left\langle x^1(t,\varepsilon_{i-1}), m^1 \right\rangle$ удовлетворяет равенствам

$$\left\langle x^1(\pi,\varepsilon_{i-1}), m^1 \right\rangle = \left\langle \dot{x}^1(\pi,\varepsilon_{i-1}), m^1 \right\rangle = \left\langle x^1(2\pi,\varepsilon_{i-1}), m^1 \right\rangle = \left\langle \dot{x}^1(2\pi,\varepsilon_{i-1}), m^1 \right\rangle = 0,$$

поэтому $\nu^*(x^1, m^1, 2\pi, 0) = \infty$.

Для любого вектора $m^2 = (\alpha,\beta)$, неколлинеарного вектору m^1 при $t \in (2\pi, +\infty)$, имеем

$$\left\langle x^1(t,\varepsilon_{i-1}), m^2 \right\rangle = A\sin((1-\varepsilon_{i-1})\varphi(t) + t_0),$$

где $A = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, t_0 – вспомогательный угол. Поэтому, начиная с некоторого достаточно большого $t_1(m^2)$, на любом промежутке длины π ровно один раз решение $x^1(t,\varepsilon_{i-1})$ будет ортогонально вектору m^2, то есть скалярное произведение $\left\langle x^1(t,\varepsilon_{i-1}), m^2 \right\rangle$ будет иметь один нуль. Кроме того, согласно теореме 2 из [2], найдется вектор m^3, неколлинеарный вектору m^1, для которого при любом $t \ge 0$ выполнено неравенство $\nu^*(x^1, m^2, t, 0) < \infty$. Следовательно, для верхней полной частоты гиперкорней имеем

$$\hat{\sigma}^*(x^1) \equiv \inf_{m\in R^n}\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^*(x^1, m, t_1(m^2), 0) + \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\pi}{t}\nu^*(x^1, m, t, t_1(m^2)) \right) =$$

$$= \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\pi}{t}\left[\frac{(1-\varepsilon_{i-1})\varphi(t) + t_0 - t_1(m^2)}{\pi} \right] = 1,$$

где $[s]$ – целая часть числа s. Для нижней полной гиперчастоты рассматриваемого решения x^1 имеют место аналогичные равенства. Следовательно, установлено равенство

$$\sigma^*(x^1) = 1. \tag{1}$$

3. Далее, если $\alpha \to 0,\ \beta \to 1$, то при любом $t > 0$ найдется такой вектор $m^2(t)$, что $\nu^*(x^1, m^2(t), t, 0) = 0$, а значит, выполнены равенства

$$\hat{\zeta}^*(x^1) = \breve{\zeta}^*(x^1) = \lim_{t\to+\infty}\inf_{m\in R^n}\frac{\pi}{t}\nu^*(x^1, m, t, 0) = 0. \tag{2}$$

Таким образом, равенства (1) и (2) дают необходимое неравенство $\sigma^*(x^1) > \zeta^*(x^1)$.

Теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2.

1. Рассмотрим решение $x^1(t,\varepsilon_{i-1}),\ i \in N,\ \varepsilon_0 = 0$, построенной в п. 1 доказательства теоремы 1 системы $A \in M^2$. Далее выберем решение

$$z(t,\varepsilon_{i-1})=\begin{pmatrix}\cos((1-\varepsilon_{i-1})\varphi(t))\\ \sin((1-\varepsilon_{i-1})\varphi(t))\end{pmatrix},\quad i\in N,\quad \varepsilon_0=0{,}1\,,$$

системы

$$B(t)=\begin{pmatrix}0 & -(1-\varepsilon_{i-1})\dot\varphi(t)\\ (1-\varepsilon_{i-1})\dot\varphi(t) & 0\end{pmatrix}\in M^2,\quad i\in N,\quad \varepsilon_0=0{,}1,$$

совпадающее с $x^1(t,\varepsilon_{i-1})$ на луче $[2\pi,\,+\infty)$. Вектор m^1 и решение $z(t,\varepsilon_{i-1})$ при любом $t>0$ ни разу не будут ортогональными, поэтому справедливо равенство $\nu^*(z,m^1,t,0)=0$. Откуда находим

$$\widehat{\sigma}^*(z)=\breve{\sigma}^*(z)=0\,. \tag{3}$$

Несовпадение друг с другом величин (1) и (3) означает, что полные гиперчастоты $\widehat{\sigma}^*,\breve{\sigma}^*:S^2\to R^+$ не являются остаточными.

Теорема 2 доказана полностью.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

Примечания:

1. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
2. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 6. С. 908.
3. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 1. С. 119–138.
4. Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.
5. Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 21–26.
6. Сташ А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у полных гиперчастот решений дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2017. № 2. С. 65–68.
7. Сташ А.Х. Пример несовпадения полной и векторной частот гиперкорней решения дифференциального уравнения третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2016. Вып. 4 (191). С. 49–52. URL: http://vestnik.adygnet.ru

References:

1. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of the linear equation // Works of Seminar of I.G. Petrovsky. 2006. Iss. 25. P. 249–294.
2. Sergeev I.N. Determination of full frequencies of solutions of a linear system // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 6. P. 908.
3. Sergeev I.N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems // Mathematical Collection. 2013. Vol. 204, No. 1. P. 119–138.
4. Sergeev I.N. On the theory of Lyapunov indices of linear systems of differential equations // Works of the Seminar of I.G. Petrovsky. 1983. Iss. 9. P. 111–166.
5. Sergeev I.N. Unsteadiness and roaming of solutions of the second order differential equation // Bulletin of Moscow University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. 2011. No. 6. P. 21–26.
6. Stash A.Kh. The absence of residual property for total hyper-frequencies of solutions to third order differential equations // Bulletin of Moscow University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. 2017. No. 2. P. 65–68.
7. Stash A.Kh. Example of discrepancy of the complete and vector frequencies of hyper roots of solutions of the third order differential equation // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2016. Iss. 4 (191). P. 49–52. URL: http://vestnik.adygnet.ru