УДК 514.76
ББК 22.1
Р 89

Рустанов А.Р.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и специальной социологии Института социально-гуманитарного образования Московского педагогического государственного университета, Москва, e-mail: aligadzhi@yandex.ru
Харитонова С.В.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии и компьютерных наук Оренбургского государственного университета, Оренбург, e-mail: hcb@yandex.ru
Казакова О.Н.
Кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии и компьютерных наук Оренбургского государственного университета, Оренбург, e-mail: olnikka@yandex.ru

NC_{10}-многообразия класса R_4

(Рецензирована)

Аннотация. *Получены четвертое и пятое тождества римановой кривизны почти контактных метрических многообразий класса NC_{10}. На основе этих тождеств выделены классы NC_{10}-многообразий и получены локальные строения выделенных классов NC_{10}-многообразий. Получено строение тензора Φ-голоморфной секционной кривизны NC_{10}-многообразия и изучены свойства этого тензора.*

Ключевые слова: *косимплектическая структура, тензор Φ-голоморфной секционной кривизны, приближенно келерово многообразие, точнейше косимплектическая структура, тензор Римана-Кристоффеля, NC_{10}-многообразие класса R_4.*

Rustanov A.R.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Theoretical and Express Sociology of Institute of Social Arts Education of the Moscow Pedagogical State University, Moscow, e-mail: aligadzhi@yandex.ru
Kharitonova S.V.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Geometry and Computer Science Department, Orenburg State University, Orenburg, e-mail: hcb@yandex.ru
Kazakova O.N.
Candidate of Pedagogy, Associate Professor of Geometry and Computer Science Department, Orenburg State University, Orenburg, e-mail: olnikka@yandex.ru

NC_{10}-manifolds of class R_4

Abstract. *In this paper we obtain the fourth and fifth identities of the Riemannian curvature of almost contact metric manifolds of the class NC_{10} On their basis, the classes NC_{10}-manifolds are distinguished and local structures of the distinguished classes NC_{10}-manifolds are obtained. The structure of the tensor Φ-holomorphic sectional curvature NC_{10}-manifold is obtained and the properties of this tensor are studied.*

Keywords: *cosymplectic structure, tensor of the Φ-holomorphic sectional curvature, approximately Kähler manifold, finitely cosymplectic structure, Riemann-Christoffel tensor, NC_{10}-manifold of class R_4.*

Введение

В работе [1] был введен в рассмотрение новый класс почти контактных метрических многообразий, обобщающий косимплектические и точнейше косимплектические многообразия. Этот класс был назван классом NC_{10}. В статьях [2, 3] мы изучали геометрию тензора римановой кривизны NC_{10}-многообразий. Представляет интерес изучение геометрического смысла обращения в нуль одного из элементов спектра тензора римановой кривизны, являющегося дополнительным дифференциально-геометрическим инвариантом второго порядка. В частности, были выделены классы R_1, R_2, R_3 NC_{10}-многообразий и получена их локальная характеризация. В данной работе мы завершаем изучение геометрии тензора римановой кривизны NC_{10}-многообразий. Основным методом исследования является метод присоединенной G-структуры в сочетании с методом инвариантного исчисления Кошуля.

Работа организована следующим образом. В параграфе 1 напоминаются необходимые для дальнейшего исследования сведения об NC_{10}-многообразиях, получено аналитическое выражение тензора Ф-голоморфной секционной кривизны и изучены свойства этого тензора.

В параграфе 2 получено четвертое дополнительное тождество тензора римановой кривизны NC_{10}-многообразия, на его основе выделяем класс R_4 NC_{10}-многообразий. Доказано, что NC_{10}-многообразие класса R_4 с нулевым тензором Ф-голоморфной секционной кривизны является C_{10}-многообразием.

В параграфе 3 получено пятое тождество римановой кривизны, являющееся следствием четвертого тождества. На основе этого тождества выделили класс R_5 NC_{10}-многообразий и доказали, что этот класс многообразий совпадает с классом C_{10}-многообразий.

1. Тензор Ф-голоморфной секционной кривизны почти контактных метрических многообразий класса NC_{10}

Пусть M – гладкое почти контактное метрическое многообразие размерности $2n+1$, $\mathbf{X}(M)$ – C^∞-модуль гладких векторных полей на многообразии M. В дальнейшем все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Определение 1.1 [1]. AC-структура, характеризуемая тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y+\nabla_Y(\Phi)X=\xi\nabla_X(\eta)\Phi Y+\xi\nabla_Y(\eta)\Phi X+\eta(X)\nabla_{\Phi Y}\xi+\eta(Y)\nabla_{\Phi X}\xi,\quad X,Y\in\mathbf{X}(M), \tag{1.1}$$

называется ***NC_{10}-структурой***. AC-многообразие, снабженное NC_{10}-структурой, называется ***NC_{10}-многообразием***.

Полная группа структурных уравнений NC_{10}-структуры на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид [3]:

$$\begin{aligned}
&1)\ d\omega=F_{ab}\omega^a\wedge\omega^b+F^{ab}\omega_a\wedge\omega_b;\\
&2)\ d\omega^a=-\theta^a_b\wedge\omega^b+C^{abc}\omega_b\wedge\omega_c+F^{ab}\omega_b\wedge\omega;\\
&3)\ d\omega_a=\theta^b_a\wedge\omega_b+C_{abc}\omega^b\wedge\omega^c+F_{ab}\omega^b\wedge\omega;\\
&4)\ d\theta^a_b+\theta^a_c\wedge\theta^c_b=\left(A^{ad}_{bc}-2C^{adh}C_{hbc}-F^{ad}F_{bc}\right)\omega^c\wedge\omega_d,
\end{aligned}\tag{1.2}$$

где

$$F_{ab}=-\sqrt{-1}\Phi^0_{a,b};\quad F^{ab}=\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat a,\hat b};\quad F_{ab}+F_{ba}=0;\quad F^{ab}+F^{ba}=0;\quad \overline{F^{ab}}=F_{ab};$$

$$C_{abc}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat a}_{b,c};\quad C^{abc}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{a}_{\hat b,\hat c};\quad C_{abc}=C_{[abc]};\quad C^{abc}=C^{[abc]};$$

$$\overline{C^{abc}}=C_{abc};\quad A^{ad}_{[bc]}=A^{[ad]}_{bc}=0;\quad F_{ad}C^{dbc}=F^{ad}C_{dbc}=0. \tag{1.3}$$

При этом справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&1)\ dF_{ab}-F_{cb}\theta^c_a-F_{ac}\theta^c_b=0;\\
&2)\ dF^{ab}+F^{cb}\theta^a_c+F^{ac}\theta^b_c=0;\\
&3)\ dC_{abc}-C_{dbc}\theta^d_a-C_{adc}\theta^d_b-C_{abd}\theta^d_c=C_{abcd}\omega^d;\\
&4)\ dC^{abc}+C^{cbd}\theta^a_d+C^{adc}\theta^b_d+C^{abd}\theta^c_d=C^{abcd}\omega_d;\\
&5)\ dA^{ad}_{bc}+A^{hd}_{bc}\theta^a_h+A^{ah}_{bc}\theta^d_h-A^{ad}_{hc}\theta^h_b-A^{ad}_{bh}\theta^h_c=A^{ad}_{bch}\omega^h+A^{adh}_{bc}\omega_h,
\end{aligned}\tag{1.4}$$

где

$$\begin{gathered}
C_{a[bcd]}=F_{a[b}F_{cd]};\quad C^{a[bcd]}=F^{a[b}F^{cd]};\quad A^{ad}_{b[ch]}=A^{a[dh]}_{bc}=0;\\
A^{ad}_{b[c}C_{gf]d}=2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d};\quad A^{a[d}_{bc}C^{gf]c}=2C_{hbc}C^{ah[d}C^{gf]c};\\
A^{ad}_{b[c}F_{|d|g]}=F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]};\quad A^{a[d}_{bc}F^{|c|g]}=F_{bc}F^{a[d}F^{|c|g]}.
\end{gathered}\tag{1.5}$$

Тождество $F^{ad}C_{dbc}=0$ называется ***первым фундаментальным тождеством*** *NC_{10}*-структуры; тождество $A^{ad}_{b[c}C_{gf]d}=2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d}$ – ***вторым фундаментальным тождеством***; тождество $A^{ad}_{b[c}F_{|d|g]}=F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]}$ – ***третьим фундаментальным тождеством*** [2, 3].

Предложение 1.1 [1]. *NC_{10}-структура является: 1) точнейше косимплектической тогда и только тогда, когда второй структурный тензор равен нулю, то есть $F=0$;*

2) структурой класса C_{10} тогда и только тогда, когда первый структурный тензор равен нулю, то есть $C^{abc}=C_{abc}=0$; 3) косимплектической структурой тогда и только тогда, когда $C^{abc}=C_{abc}=0$, $F^{ab}=F_{ab}=0$.

Согласно (1.4:5), система ***функций*** $\{A^{ad}_{bc}\}$, глобально определенная на пространстве присоединенной G-структуры, симметричная по верхним и нижним индексам, образует чистый тензор на M^{2n+1}, называемый ***тензором Ф-голоморфной секционной кривизны*** [4]. Тензор $A:\mathbf{X}(M)\times\mathbf{X}(M)\times\mathbf{X}(M)\to\mathbf{X}(M)$ задается формулой

$$A(X,Y,Z)=A^{ad}_{bc}X^bY^cZ_d\varepsilon_a+A^{\hat{a}\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}Z_{\hat{d}}\varepsilon_{\hat{a}}\,. \tag{1.6}$$

Теорема 1.1. *Тензор Ф-голоморфной секционной кривизны NC_{10}-многообразия обладает свойствами:*

$$\begin{aligned}
&1)\ A(\Phi X,Y,Z)=A(X,\Phi Y,Z)=-A(X,Y,\Phi Z)=\Phi\circ A(X,Y,Z);\\
&2)\ A(X,Y,Z)=A(Y,X,Z);\\
&3)\ \eta\circ A(X,Y,Z)=0;\\
&4)\ A(\xi,Y,Z)=A(X,Y,\xi)=0,\quad \forall X,Y,Z\in\mathbf{X}(M)\,.
\end{aligned}\tag{1.7}$$

Доказательство. 1) В самом деле,

$$A(\Phi X,Y,Z)=A^{ad}_{bc}(\Phi X)^bY^cZ_d\varepsilon_a+A^{\hat{a}\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}(\Phi X)^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}Z_{\hat{d}}\varepsilon_{\hat{a}}=\sqrt{-1}A^{ad}_{bc}X^bY^cZ_d\varepsilon_a-$$

$$-\sqrt{-1}A^{\hat{a}\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}Z_{\hat{d}}\varepsilon_{\hat{a}}=-A^{ad}_{bc}X^bY^c(\Phi Z)_d\varepsilon_a-A^{\hat{a}\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}(\Phi Z)_{\hat{d}}\varepsilon_{\hat{a}}=-A(X,Y,\Phi Z)$$

и

$$\Phi\circ A(X,Y,Z)=\Phi\left(A^{ad}_{bc}X^bY^cZ_d\varepsilon_a+A^{\hat{a}\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}Z_{\hat{d}}\varepsilon_{\hat{a}}\right)=A^{ad}_{bc}X^bY^cZ_d\Phi(\varepsilon)_a+A^{\hat{a}\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}Z_{\hat{d}}\Phi(\varepsilon_{\hat{a}})=$$

$$=\sqrt{-1}A^{ad}_{bc}X^bY^cZ_d\varepsilon_a-\sqrt{-1}A^{\hat{a}\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}Z_{\hat{d}}\varepsilon_{\hat{a}}=A(\Phi X,Y,Z),\quad \forall X,Y,Z\in\mathbf{X}(M).$$

2) Поскольку $A^{ad}_{[bc]}=0$, то

$$A(X,Y,Z)=A^{ad}_{bc}X^bY^cZ_d\varepsilon_a+A^{\hat{a}\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}Z_{\hat{d}}\varepsilon_{\hat{a}}=$$

$$=A^{ad}_{cb}X^bY^cZ_d\varepsilon_a+A^{\hat{a}\hat{d}}_{\hat{c}\hat{b}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}Z_{\hat{d}}\varepsilon_{\hat{a}}=A(Y,X,Z),\quad \forall X,Y,Z\in\mathbf{X}(M).$$

3) Так как $\eta(\varepsilon_a)=\eta_a=0$ и $\eta(\varepsilon_{\hat{a}})=\eta_{\hat{a}}=0$, то

$$\eta\circ A(X,Y,Z)=\eta\left(A^{ad}_{bc}X^bY^cZ_d\varepsilon_a+A^{\hat{a}\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}Z_{\hat{d}}\varepsilon_{\hat{a}}\right)=A^{ad}_{bc}X^bY^cZ_d\eta(\varepsilon)_a+$$

$$+A^{\hat{a}\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}Z_{\hat{d}}\eta(\varepsilon_{\hat{a}})=A^{ad}_{bc}X^bY^cZ_d\eta_a+A^{\hat{a}\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}Z_{\hat{d}}\eta_{\hat{a}}=0,\quad \forall X,Y,Z\in\mathbf{X}(M)\,.$$

4) С учетом равенств $\xi^a=\xi^{\hat{a}}=0$ имеем:

$$A(\xi,Y,Z)=A^{ad}_{bc}\xi^bY^cZ_d\varepsilon_a+A^{\hat{a}\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}\xi^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}Z_{\hat{d}}\varepsilon_{\hat{a}}=0$$

и

$$A(X,Y,\xi)=A^{ad}_{bc}X^bY^c\xi_d\varepsilon_a+A^{\hat{a}\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}\xi_{\hat{d}}\varepsilon_{\hat{a}}=0,\quad \forall X,Y,Z\in\mathbf{X}(\mathrm{M})\,. \blacksquare$$

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1.2 [1]. *NC_{10}-многообразие M является многообразием точечно постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны* **c** *тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры тензор A^{ad}_{bc} имеет вид $A^{ad}_{bc}=\dfrac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$, где $\tilde{\delta}^{ad}_{bc}=\delta^a_b\delta^d_c+\delta^d_b\delta^a_c$.*

Применим процедуру восстановления тождества [4, 5] к равенствам:

$$A^{0d}_{bc}=\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{0d}_{bc}=\frac{1}{2}\left(\delta^0_b\delta^d_c+\delta^d_b\delta^0_c\right)=0;\qquad A^{ad}_{bc}=\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}=\frac{1}{2}\left(\delta^a_b\delta^d_c+\delta^d_b\delta^a_c\right);$$

$$A^{\hat{a}d}_{bc} = \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{\hat{a}d}_{bc} = \frac{1}{2}\left(\delta^{\hat{a}}_{b}\delta^{d}_{c} + \delta^{d}_{b}\delta^{\hat{a}}_{c}\right) = 0,$$

то есть $A^{id}_{bc} = \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{id}_{bc} = \frac{1}{2}\left(\delta^{i}_{b}\delta^{d}_{c} + \delta^{d}_{b}\delta^{i}_{c}\right)$. С учетом (1.6) последнее равенство запишем в виде: $A\left(\varepsilon_b, \varepsilon_c, \varepsilon_{\hat{d}}\right) = \frac{c}{2}\left(\varepsilon_b\left\langle \varepsilon_c, \varepsilon_{\hat{d}}\right\rangle + \varepsilon_c\left\langle \varepsilon_b, \varepsilon_{\hat{d}}\right\rangle\right)$. Поскольку векторы $\{\varepsilon_a\}$, $\{\varepsilon_{\hat{b}}\}$ образуют базисы подпространств $D^{\sqrt{-1}}_{\Phi}$ и $D^{-\sqrt{-1}}_{\Phi}$ соответственно, а проекторами модуля $\mathbf{X}(M)$ на подмодули $D^{\sqrt{-1}}_{\Phi}$ и $D^{-\sqrt{-1}}_{\Phi}$ являются эндоморфизмы $\pi = -\frac{1}{2}\left(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$ и $\bar{\pi} = -\frac{1}{2}\left(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$, то последнее равенство запишется в виде:

$$A\left(\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X, \Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y, -\Phi^2 Z + \sqrt{-1}\Phi Z\right) =$$
$$= \frac{c}{2}\{\left(\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X\right)\left\langle\Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y, -\Phi^2 Z + \sqrt{-1}\Phi Z\right\rangle +$$
$$+ \left(\Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y\right)\left\langle\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X, -\Phi^2 Z + \sqrt{-1}\Phi Z\right\rangle\}, \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M).$$

Расписывая полученное равенство по линейности и выделяя действительную и мнимую части, получим эквивалентное тождество:

$$A(\Phi^2 X, \Phi^2 Y, \Phi^2 Z) + A(\Phi^2 X, \Phi Y, \Phi Z) + A(\Phi X, \Phi^2 Y, \Phi Z) - A(\Phi X, \Phi Y, \Phi^2 Z) =$$
$$= \frac{c}{2}\{\Phi^2 X\left\langle\Phi^2 Y, \Phi^2 Z\right\rangle + \Phi^2 X\left\langle\Phi Y, \Phi Z\right\rangle + \Phi X\left\langle\Phi^2 Y, \Phi Z\right\rangle - \Phi X\left\langle\Phi Y, \Phi^2 Z\right\rangle +$$
$$+ \Phi^2 Y\left\langle\Phi^2 X, \Phi^2 Z\right\rangle + \Phi^2 Y\left\langle\Phi X, \Phi Z\right\rangle + \Phi Y\left\langle\Phi^2 X, \Phi Z\right\rangle - \Phi Y\left\langle\Phi X, \Phi^2 Z\right\rangle\}, \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M).$$

С учетом теоремы 1.1 и равенств $\left\langle\Phi X, \Phi Y\right\rangle = \left\langle X, Y\right\rangle - \eta(X)\eta(Y)$, $\Phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$ и $\Omega(X, Y) = \left\langle X, \Phi Y\right\rangle$ последнее тождество можно записать в виде:

$$A(X, Y, Z) = \frac{c}{2}\{\Phi^2 X\left\langle\Phi Y, \Phi Z\right\rangle + \Phi^2 X\left\langle\Phi Y, \Phi Z\right\rangle - \Phi X\Omega(Y, Z) - \Phi Y\Omega(X, Z)\}, \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M).$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3. *Тензор Ф-голоморфной секционной кривизны NC_{10}-многообразия имеет вид:*

$$A(X, Y, Z) = \frac{c}{2}\{\Phi^2 X\left\langle\Phi Y, \Phi Z\right\rangle + \Phi^2 X\left\langle\Phi Y, \Phi Z\right\rangle - \Phi X\Omega(Y, Z) - \Phi Y\Omega(X, Z)\}, \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M).$$

2. Четвертое дополнительное тождество кривизны почти контактных метрических многообразий класса NC_{10}

Напомним [1], что существенные ненулевые компоненты тензора Римана-Кристоффеля на пространстве присоединенной G-структуры имеют вид:

1) $R^{b}_{00a} = F_{ac}F^{cb}$;

2) $R^{a}_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} - C^{adh}C_{hbc}$;

3) $R^{a}_{\hat{b}cd} = 2C^{abh}C_{hcd}$;

4) $R^{\hat{a}}_{bcd} = C_{acdb} - F_{ab}F_{cd}$. (2.1)

Применим процедуру восстановления тождества [4, 5] к равенствам

$$R^{0}_{bc\hat{d}} = A^{0d}_{bc} - C^{0dh}C_{hbc} = 0, \quad R^{a}_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} - C^{adh}C_{hbc}, \quad R^{\hat{a}}_{bc\hat{d}} = A^{\hat{a}d}_{bc} - C^{\hat{a}dh}C_{hbc} = 0.$$

Таким образом, $R^{i}_{bc\hat{d}} = A^{id}_{bc} - C^{idh}C_{hbc} = A^{id}_{bc} - C^{i}_{bc,\hat{d}}$, а значит, в каждой точке $p \in M$ $R\left(\varepsilon_c, \varepsilon_{\hat{d}}\right)\varepsilon_b = A\left(\varepsilon_b, \varepsilon_c, \varepsilon_{\hat{d}}\right) + \nabla_{\varepsilon_{\hat{d}}}(C)\left(\varepsilon_b, \varepsilon_c\right)$. Поскольку векторы $\{\varepsilon_a\}, \{\varepsilon_{\hat{b}}\}$ образуют базисы подпространств $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$ и $D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}$ соответственно, а проекторами модуля $\mathbf{X}(M)$ на подмодули $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$ и $D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}$ являются эндоморфизмы $\pi = -\frac{1}{2}\left(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$ и $\bar{\pi} = -\frac{1}{2}\left(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$, то последнее равенство запишется в виде:

$$R\left(\Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y, -\Phi^2 Z + \sqrt{-1}\Phi Z\right)\left(\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X\right) =$$
$$= A\left(\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X, \Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y, -\Phi^2 Z + \sqrt{-1}\Phi Z\right) +$$
$$+ \nabla_{-\Phi^2 Z + \sqrt{-1}\Phi Z}(C)\left(\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X, \Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y\right), \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M).$$

Расписывая полученное равенство по линейности и выделяя действительную и мнимую части, получим эквивалентное тождество:

$$R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z + R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z + R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z =$$
$$= A(\Phi^2 X, \Phi^2 Y, \Phi^2 Z) + A(\Phi^2 X, \Phi Y, \Phi Z) + A(\Phi X, \Phi^2 Y, \Phi Z) - A(\Phi X, \Phi Y, \Phi^2 Z) +$$
$$+ \nabla_{\Phi^2 Z}(C)\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right) - \nabla_{\Phi^2 Z}(C)\left(\Phi X, \Phi Y\right) + \nabla_{\Phi Z}(C)\left(\Phi^2 X, \Phi Y\right) +$$
$$+ \nabla_{\Phi Z}(C)\left(\Phi X, \Phi^2 Y\right), \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M).$$

С учетом теоремы 1.1 и теоремы 2.1 [3] последнее тождество примет вид:

$$R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z + R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z + R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z =$$
$$= -4A(X, Y, Z) + \nabla_{\Phi^2 Z}(C)\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right) - \nabla_{\Phi^2 Z}(C)\left(\Phi X, \Phi Y\right) +$$
$$+ \nabla_{\Phi Z}(C)\left(\Phi^2 X, \Phi Y\right) + \nabla_{\Phi Z}(C)\left(\Phi X, \Phi^2 Y\right), \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M). \qquad (2.2)$$

Назовем тождество (2.2) ***четвертым дополнительным тождеством*** тензора римановой кривизны AC-многообразия класса NC_{10}.

Определение 2.1. AC-многообразие назовем многообразием класса R_4, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет условию:

$$R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z + R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z + R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M).$$

Теорема 2.1. *NC_{10}-многообразие является многообразием класса R_4 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры* $R^a_{bc\hat{d}} = 0$.

Доказательство. Пусть NC_{10}-многообразие является многообразием класса R_4. Тогда, согласно определению 2.1, имеет место тождество

$$R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z + R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z + R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M),$$

которое на пространстве присоединенной G-структуры перепишется в виде:

$$R^i_{jkl}\Phi^j_h\Phi^h_r\Phi^k_m\Phi^m_p\Phi^l_s\Phi^s_q + R^i_{jkl}\Phi^j_r\Phi^k_m\Phi^m_p\Phi^l_q - R^i_{jkl}\Phi^j_r\Phi^k_p\Phi^l_s + R^i_{jkl}\Phi^j_h\Phi^h_r\Phi^k_p\Phi^l_q = 0.$$

С учетом (2.1) и вида матрицы Φ получим $4R^a_{bc\hat{d}} + 4R^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}d} = 0$, то есть $R^a_{bc\hat{d}} = 0$, $R^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}d} = 0$.

Обратно, пусть для NC_{10}-многообразия $R^a_{bc\hat{d}} = 0$. Поскольку для NC_{10}-многообразия имеют место равенства $R^{\hat{a}}_{bc\hat{d}} = 0$ и $R^0_{bc\hat{d}} = 0$, то применяя процедуру восстановления тождества к равенствам $R^i_{bc\hat{d}} = 0$, получим:

$$R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z + R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z +$$
$$+ R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M). \ \blacksquare$$

Из определения 2.1 и (2.2) непосредственно следует следующая теорема.

Теорема 2.2. *Тензор Φ-голоморфной секционной кривизны NC_{10}-многообразия класса R_4 имеет вид*

$$A(X,Y,Z)=\frac{1}{4}\{\nabla_{\Phi^2 Z}(C)(\Phi^2 X,\Phi^2 Y)-\nabla_{\Phi^2 Z}(C)(\Phi X,\Phi Y)+$$
$$+\nabla_{\Phi Z}(C)(\Phi^2 X,\Phi Y)+\nabla_{\Phi Z}(C)(\Phi X,\Phi^2 Y)\},\quad \forall X,Y,Z\in \mathbf{X}(M).$$

Теорема 2.3. *NC_{10}-многообразие класса R_4 с нулевым тензором Ф-голоморфной секционной кривизны является многообразием класса C_{10}.*

Доказательство. Согласно теореме 2.1, NC_{10}-многообразие является многообразием класса R_4 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $R^a_{bc\hat{d}}=0$ с учетом (2.1) примет вид:

$$A^{ad}_{bc}=C^{adh}C_{hbc}. \qquad (2.3)$$

Если многообразие имеет нулевой тензор Ф-голоморфной секционной кривизны, то $C^{adh}C_{hbc}=0$. Сворачивая последнее равенство сначала по индексам a и b, затем по индексам c и d, получим $\sum\limits_{abc}|C_{abc}|^2=C^{abc}C_{abc}=0$, то есть $C_{abc}=0$, то есть многообразие, согласно предложению 1.1, является многообразием класса C_{10}. ■

Пусть $M^{2n+1}-NC_{10}$-многообразие класса R_4 с нулевым тензором Ф-голоморфной секционной кривизны. Третье фундаментальное тождество с учетом (2.3) запишется в виде: $C^{adh}C_{hb[c}F_{|d|g]}=F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]}$. Полученное тождество с учетом первого фундаментального тождества запишется в форме $F^{ad}F_{bc}F_{dg}=F^{ad}F_{bg}F_{dc}$. Свернем это равенство по индексам a и b, тогда получим: $F^{ad}F_{ac}F_{dg}=F^{ad}F_{ag}F_{dc}$. В правой части переобозначим немые индексы a и d, тогда $F^{ad}F_{ac}F_{dg}=F^{da}F_{dg}F_{ac}=-F^{ad}F_{ac}F_{dg}$, то есть $F_{ca}F^{ad}F_{dg}=0$, то есть $\langle F^2(\varepsilon_c),F(\varepsilon_g)\rangle=0$. В силу свойств второго структурного тензора (см. предложение 4 [1]) $\langle F^3(\varepsilon_c),\varepsilon_g\rangle=0$ и в силу невырожденности метрики получим $F=0$. Значит, согласно предложению 1, многообразие является плоским косимплектическим. Учитывая локальное строение косимплектических многообразий [4], теорему 2.3 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.4. *NC_{10}-многообразие класса R_4 с нулевым тензором Ф- голоморфной секционной кривизны локально эквивалентно произведению плоского келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

Поскольку всякое полное односвязное келерово многообразие нулевой голоморфной секционной кривизны изометрично комплексному евклидову пространству C^n, снабженному стандартной эрмитовой метрикой $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle=ds^2$, в каноническом атласе задаваемой соотношением $ds^2=\sum_{a=1}^n dz^a d\bar{z}^a$, то, подытожив вышеизложенное, сформулируем следующую теорему.

Теорема 2.5. *NC_{10}-многообразие класса R_4 с нулевым тензором Ф-голоморфной секционной кривизны локально эквивалентно произведению комплексного евклидова пространства C^n на вещественную прямую, снабженной канонической косимплектической структурой.*

3. Пятое дополнительное тождество кривизны почти контактных метрических многообразий класса NC_{10}

Как известно [4], тензор Римана-Кристоффеля обладает тождеством Риччи, то есть $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$, которое на пространстве присоединенной G-структуры примет вид: $R^a_{bc\hat{d}}+R^a_{c\hat{d}b}+R^a_{\hat{d}bc}=0$. Из последнего равенства следует, что из равенства $R^a_{bc\hat{d}}=0$ следует равенство $R^a_{\hat{d}bc}=0$. Поэтому представляет интерес исследовать геометрический смысл равенства нулю компоненты $R^a_{\hat{d}bc}$.

Применив процедуру восстановления тождества ([4, 5]) к равенствам $R^0_{\hat{d}bc}=0$,

$R^{a}_{\hat{d}bc} = 2C^{abh}C_{hbc}$, $R^{\hat{a}}_{\hat{d}bc} = 0$, получим:

$$R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z + R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z + R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z =$$
$$= 2\{\nabla_{\Phi^2 Z}(C)(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) - \nabla_{\Phi^2 Z}(C)(\Phi X, \Phi Y) + \nabla_{\Phi Z}(C)(\Phi^2 X, \Phi Y) +$$
$$+ \nabla_{\Phi Z}(C)(\Phi X, \Phi^2 Y)\}, \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M). \tag{3.1}$$

Назовем тождество (3.1) ***пятым дополнительным тождеством*** тензора римановой кривизны AC-многообразия класса NC_{10}.

Определение 3.1. AC-многообразие назовем многообразием класса R_5, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет условию:

$$R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z + R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z +$$
$$+ R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M).$$

Из определения 3.1 и (3.1) вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.1. *NC_{10}-многообразие является многообразием класса R_5 тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_{\Phi^2 Z}(C)(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) - \nabla_{\Phi^2 Z}(C)(\Phi X, \Phi Y) +$$
$$+ \nabla_{\Phi Z}(C)(\Phi^2 X, \Phi Y) + \nabla_{\Phi Z}(C)(\Phi X, \Phi^2 Y) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M).$$

Теорема 3.2. *NC_{10}-многообразие является многообразием класса R_5 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры* $R^{a}_{\hat{d}bc} = 0$.

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.1, и мы опустим его.

Теорема 3.3. *NC_{10}-многообразие является многообразием класса R_5 тогда и только тогда, когда многообразие является C_{10}-многообразием.*

Доказательство. Из (2.1:3) и теоремы 3.3 следует, что NC_{10}-многообразие является многообразием класса R_5 тогда и только тогда, когда $C^{abh}C_{hcd} = 0$. Свертывая последнее равенство сначала по индексам a и d, затем по индексам c и b, получим $\sum_{abc} |C_{abc}| = C^{abc}C_{abc} = 0$, то есть $C_{abc} = 0$, то есть многообразие, согласно предложению 1.1, является многообразием класса C_{10}. Поскольку для AC-многообразия класса C_{10} $C_{abc} = 0$, оно является, согласно теореме 3.3, многообразием класса R_5. ■

Примечания:

1. Рустанов А.Р. Многообразия класса NC_{10} // Преподаватель XXI век. 2014. № 3. С. 209–218.
2. Рустанов А.Р., Харитонова С.В. NC_{10}-многообразия класса R_1 // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2016. Вып. 2 (181). С. 48–54. URL: http://vestnik.adygnet.ru
3. Рустанов А.Р. NC_{10}-многообразия класса R_2 // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2016. Вып. 4 (191). С. 43–48. URL: http://vestnik.adygnet.ru
4. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. 2-е изд., доп. Одесса: Печатный дом, 2013. 458 с.
5. Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р. Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий // Математический сборник. 2002. Т. 193, № 8. С. 71–100.

References:

1. Rustanov A.R. Varieties of NC_{10} class // Teacher XXI Century. 2014. No. 3. P. 209–218.
2. Rustanov A.R., Kharitonova S.V. Class R_1 NC_{10}-variety // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2016. Iss. 2 (181). P. 48–54. URL: http://vestnik.adygnet.ru
3. Rustanov A.R. On NC_{10}-manifolds of class R_2 // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2016. Iss. 4 (191). P. 43–48. URL: http://vestnik.adygnet.ru
4. Kirichenko V.F. Differential-geometric structures on manifolds. 2nd ed., enlarged. Odessa: Printing House, 2013. 458 pp.
5. Kirichenko V.F., Rustanov A.R. Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds // Mathematical Collection. 2002. Vol. 193, No. 8. P. 71–100.