МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.925.5
ББК 22.161.6
Т 49

Тлячев Вячеслав Бесланович
Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593908, e-mail: stvb2006@rambler.ru
Ушхо Адам Дамирович
Кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593908, e-mail: uschho76@mail.ru
Ушхо Дамир Салихович
Кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593905, e-mail: damirubych@mail.ru

Об особых точках одной кубической системы, имеющей центр

(Рецензирована)

Аннотация. *Для определенного вида кубической дифференциальной системы показано, что она при выполнении некоторых коэффициентных условий не может иметь три центра и шесть седел. При этом доказано, что если система имеет девять особых точек в ограниченной части фазовой плоскости, то пять из них являются центрами, а четыре – седлами. Приведен пример такой системы.*
Ключевые слова: *кубическая система, особая точка, центр, седло, фазовая плоскость.*

Tlyachev Vyacheslav Beslanovich
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Physics Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593908, e-mail: tlyachev@adygnet.ru
Ushkho Adam Damirovich
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Theoretical Physics Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593908, e-mail: uschho76@mail.ru
Ushkho Damir Salikhovich
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics, Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593905, e-mail: damirubych@mail.ru

On the singular points of a cubic system with center

Abstract. *For a specific type of cubic differential system we find that, under special coefficient conditions, it cannot have three centers and six saddles. We prove that if the system has nine singular points in a limited part of the phase plane, then five of them are the centers, and four are saddles. An example of such a system is given.*
Keywords: *cubic system, singular point, center, saddle point, phase plane.*

Одним из необходимых и достаточных условий центра $(0;0)$ дифференциальной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + bx^3 + (c-\beta)x^2y + (3d-\gamma)xy^2 + fy^3 \equiv P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - ax^3 - (3b+\alpha)x^2y - (c+\beta)xy^2 - dy^3 \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $(P,Q)=1$, приведенных в работе [1], является условие

$$\alpha = \beta = \gamma = 0. \tag{2}$$

В работе [2], посвященной изучению бесконечно удаленных особых точек системы (1), удовлетворяющей условиям центра, приводится теорема 1, в которой утверждается, что система (1) при выполнении (2) может иметь в ограниченной части фазовой плоскости девять особых точек, в том числе пять центров и четыре седла или три центра и шесть седел.

Ниже будет показано, что система (1) при выполнении (2) не может иметь три центра и шесть седел.

Векторное поле, определяемое системой (1), симметрично относительно начала координат, так как $\frac{Q(-x,-y)}{P(-x,-y)} \equiv \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$. Поэтому особые точки системы (1) при выполнении (2) расположены на прямых, проходящих через начало координат $(0;0)$. Согласно [3] прямая, проходящая через три особые точки системы (1), является ее изоклиной.

Будем говорить, что на изоклине l системы (1) индуцировано направление m, если угловой коэффициент касательных к траекториям этой системы в точках их пересечения (быть может, касания) с l равен m.

Лемма 1. *Если прямая* l: $y-kx=0$ *– изоклина системы* (1)*, то траектории этой системы пересекают* l *в точках, отличных от особых точек, под прямым углом.*

Доказательство. Пусть на прямой l система (1) индуцирует направление m. Если $k=0$, то прямая $y=0$ – изоклина системы и ни при каком вещественном значении m не будет выполнено тождество $-x-ax^3-mbx^3 \equiv 0$. Следовательно, $m=\infty$, то есть $y=0$ – изоклина бесконечности. Аналогично, если $k=\infty$, то есть $x=0$ – изоклина системы (1), то тождество $dy^3-m(y+fy^3) \equiv 0$ выполнимо только при $m=0$ и $d=0$. В этом случае получается, что $x=0$ – изоклина нуля. Таким образом, при $k=0$ или $k=\infty$ утверждение леммы справедливо. Пусть $k \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$. Тогда имеет место тождество $Q(x,kx)-mP(x,kx) \equiv 0$, из которого следует равенство $m=-\frac{1}{k}$. Это означает, что траектории системы (1) пересекают прямую изоклину l под прямым углом. Лемма доказана.

Далее рассмотрим систему (1) при выполнении (2):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y+bx^3+cx^2y+3dxy^2+fy^3 \equiv \overline{P}(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x-ax^3-3bx^2y-cxy^2-dy^3 \equiv \overline{Q}(x,y). \end{cases} \tag{3}$$

Пусть на прямой $l_0: y-k_0x=0$ расположены три особые точки. По лемме 1 система (3) индуцирует на l_0 направление $m_0=-\frac{1}{k_0}$. Следуя [3], применим к системе (3) преобразование

$$\begin{cases} x=\overline{x}+\overline{y}, \\ y=-\dfrac{1}{k_0}\overline{y}. \end{cases} \tag{4}$$

Преобразование (4) переводит прямую l_0 в изоклину бесконечности системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \left[-k_0\overline{x}-\dfrac{\left(k_0^2+1\right)^2}{k_0}\overline{y}\right]\left[\mu+\overline{P_2}\left(\overline{x},\overline{y}\right)\right], \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = A\overline{x}+B\overline{y}+\overline{Q_3}\left(\overline{x},\overline{y}\right), \end{cases} \tag{5}$$

где $\mu \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$, $\overline{P_2}\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ $\left(\overline{Q_3}\left(\overline{x},\overline{y}\right)\right)$ – однородный многочлен второй (третьей) степени.

Совершим в системе (5) преобразование

$$\begin{cases} \widetilde{y} = -k_0\overline{x}-\dfrac{\left(k_0^2+1\right)}{k_0}\overline{y}, \\ \widetilde{x} = \overline{x}. \end{cases}$$

В результате этого система (5) трансформируется в систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{y}\left[\mu + \tilde{P}_2(\tilde{x}, \tilde{y})\right], \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = K\tilde{x} + N\tilde{y} + \tilde{Q}_3(\tilde{x}, \tilde{y}), \end{cases} \tag{6}$$

где $\mu \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$, $\tilde{P}_2(\tilde{x}, \tilde{y})$ $\left(\tilde{Q}_3(\tilde{x}, \tilde{y})\right)$ – однородный многочлен второй (третьей) степени. Так как по условию $(0;0)$ – центр, то $N=0$, $\mu K < 0$ [4].

Пусть $\mu > 0$, $K < 0$. Тогда посредством преобразования

$$\begin{cases} \tilde{x} = \dfrac{1}{\sqrt{-K}}\bar{\bar{x}}, \\ \tilde{y} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}\bar{\bar{y}} \end{cases}$$

придадим системе (6) вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\bar{\bar{x}}}{dt} = \bar{\bar{y}}\left[1 + \bar{\bar{P}}_2(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})\right], \\ \dfrac{d\,\bar{\bar{y}}}{dt} = -\bar{\bar{x}} + \bar{\bar{Q}}_3(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}), \end{cases} \tag{7}$$

где $\bar{\bar{P}}_2(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ $\left(\bar{\bar{Q}}_3(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})\right)$ – однородный многочлен второй (третьей) степени.

Тем самым доказана

Лемма 2. *Если система* (3) *имеет три особые точки на прямой, проходящей через начало координат, то существует аффинное преобразование переменных* x *и* y, *приводящее систему* (3) *к системе* (7).

Теорема 1. *Если система* (3) *имеет девять особых точек в ограниченной части фазовой плоскости, то пять из них являются центрами, а четыре – седлами.*

Доказательство. Не умаляя общности, рассматриваем систему (7). Особые точки системы (7) расположены тройками на четырех прямых, проходящих через точку $(0;0)$. Хотя бы на одной из них расположены только центры [5]. Поэтому, не умаляя общности, полагаем, что три центра системы (7) расположены на изоклине бесконечности $\bar{\bar{y}} = 0$. Согласно теореме 36 [6] на дуге изоклины бесконечности, не содержащей особых точек самой изоклины бесконечности, не могут быть рядом расположены две простые особые точки с одинаковыми индексами Пуанкаре [6]. Именно поэтому изоклина бесконечности

$$\bar{\bar{P}}_2(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) + 1 = 0 \tag{8}$$

является кривой второго порядка, которая пересекает прямую $\bar{\bar{y}} = 0$ в двух точках, симметричных относительно центра $(0;0)$. В силу симметрии векторного поля системы (7) относительно начала координат три особые точки системы (7) расположены в полуплоскости $y>0$ и столько же особых точек в полуплоскости $y<0$. Если кривая (8) распадается на две прямые, то они параллельны и пересекают ось абсцисс в точках, симметричных относительно точки $(0;0)$.

При этом из трех особых точек системы, расположенных в полуплоскости $y>0$, две расположены на одной прямой. Аналогично, из трех особых точек системы, расположенных в полуплоскости $y<0$, две расположены на другой прямой. Согласно упомянутой теореме 36 [6] одна из этих двух является центром, другая – седлом (система (3) имеет особые точки только типа «центр» и «седло», так как $\bar{P}'_x + \bar{Q}'_y \equiv 0$ [4]). Таким образом, система (3) имеет, по крайней мере, пять центров. Согласно [7] кубическая система имеет не более пяти центров, то есть система (7), а значит, и система (3) имеет пять центров и четыре седла.

Теорема доказана.

Пример 1. Система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y\left(1 - x^2 + 2xy - y^2\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{x^3}{25} + xy^2 - \dfrac{2}{3}y^3 \end{cases}$$

имеет девять особых точек, в том числе пять центров: $(-5;0)$, $(0;0)$, $(5;0)$, $(\beta;\beta+1)$, $(-\beta;-\beta-1)$; четыре седла: $(\beta;\beta-1)$, $(-\beta;1-\beta)$, $(\alpha;\alpha-1)$, $(-\alpha;1-\alpha)$, где $\alpha \in (0;1)$, $\beta \in (2;3)$. Векторное поле и траектории системы изображены на рисунке 1.

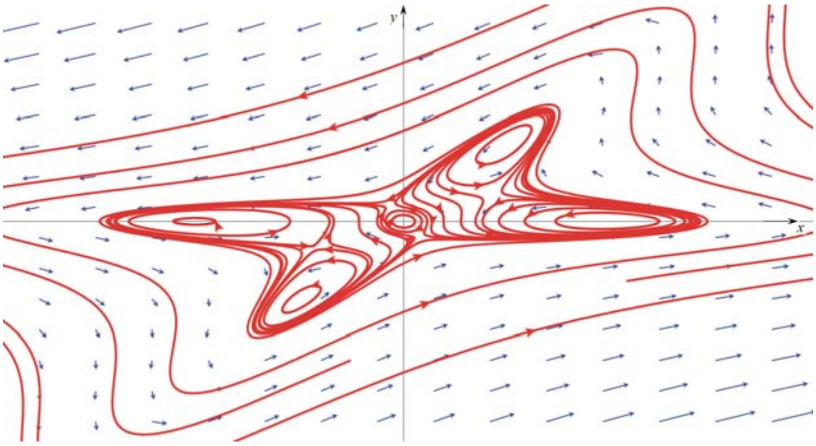

Рис. 1. Векторное поле и траектории системы из примера 1

Примечания:

1. Сахарников Н.А. Об условиях существования центра и фокуса // Прикладная математика и механика. 1950. Вып. 5. С. 513–526.
2. Хайрутдинов И.В. О бесконечно удаленных особых точках системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + bx^3 + (c-\beta)x^2y + (3d-\gamma)xy^2 + fy^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - ax^3 - (3b+\alpha)x^2y - (c+\beta)xy^2 - dy^3, \end{cases}$$
если $(0;0)$ – центр // Ученые записи Душанбинского пед. ин-та, 1963. Вып. 4. С. 53–58.
3. Ушхо Д.С. О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы // Труды ФОРА, 2003. № 8. С. 7–21. URL: http://fora.adygnet.ru
4. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука, 1966. 568 с.
5. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Полиномиальные векторные поля на плоскости. Избранные вопросы. Майкоп: АГУ, 2012. 326 с.
6. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука, 1967. 488 с.
7. Ушхо Д.С. О числе особых точек второй группы кубической системы // Дифференциальные уравнения, 1993. Т. 29, № 2. С. 240–245.

References:

1. Sakharnikov N.A. On the conditions of existence of the center and focus // Applied Mathematics and Mechanics. 1950. Iss. 5. P. 513–526.
2. Khayrutdinov I.V. On infinitely distant special points of the system of differential equations
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + bx^3 + (c-\beta)x^2y + (3d-\gamma)xy^2 + fy^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - ax^3 - (3b+\alpha)x^2y - (c+\beta)xy^2 - dy^3, \end{cases}$$
if $(0;0)$ is the center // Scientific Notes of Dushanbe Ped. Inst., 1963. Iss. 4. P. 53–58.
3. Ushkho D.S. On direct isoclines of the cubic differential system // Works of Physical Society of Adyghea Republic. 2003. No. 8. P. 7–21. URL: http://fora.adygnet.ru
4. Qualitative theory of second-order dynamical systems / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier. New York: John Wiley and Sons, 1973. 568 pp.
5. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. Polynomial vector fields on the plane. Selected issues. Maikop: ASU Publishing House, 2012. 326 pp.
6. Bifurcation theory of dynamical systems on the plane / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Mayer. M.: Nauka, 1967. 488 pp.
7. Ushkho D.S. About a number of special points of the second group of cubic system // Differential Equations. 1993. Vol. 29, No. 2. P. 240–245.