УДК 512.647+517.373
ББК 22.143+22.161.12
К 59

Козлов Владимир Анатольевич
Кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики, математики и методики их преподавания Армавирского государственного педагогического университета, Армавир, e-mail: shagin196@yandex.ru
Паланджянц Левон Жирайрович
Кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и системного анализа инженерно-экономического факультета Майкопского государственного технологического университета, Майкоп, тел. (8772) 570353, e-mail: levonmgtu@rambler.ru

О структуре подалгебры полиномиальных мультипликативно интегрируемых матричных функций второго порядка. III

(*Рецензирована*)

Аннотация. *Рассматривается задача о полиномиальных криволинейных мультипликативных интегралах. Выявляется структура подалгебры мультипликативно интегрируемых матричных функций второго порядка. Исследование проводится по степеням полиномиальных кривых.*

Ключевые слова: *криволинейный мультипликативный интеграл, мультипликативная интегрируемость, матричные функции, подалгебра.*

Kozlov Vladimir Anatolyevich
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Department of Mathematics and Methodology of Teaching Armavir State Pedagogical University, Armavir, e-mail: shagin196@yandex.ru
Palandzhyants Levon Zhirayrovich
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Higher Mathematics and System Analysis Department, Engineering-Economics Faculty, Maikop State University of Technology, Maikop, ph. (8772) 570353, e-mail: levonmgtu@rambler.ru

On subalgebra structure of the polynomial multiplicatively integrated matrix functions of the second order. III

Abstract. *In this paper, we consider the problem on polynomial curvilinear multiplicative integrals and reveal the structure of subalgebra of the multiplicatively integrated matrix functions of the second order. The research is conducted by degrees of polynomial curves.*

Keywords: *curvilinear multiplicative integral, multiplicative integrability, matrix functions, subalgebra.*

Постановка задачи

Рассмотрим полиномиальный криволинейный мультипликативный интеграл

$$\overset{\frown}{\int_c} E + P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{1}$$

вдоль кривой с полиномиальной параметризацией $c:\ x = x_n(t),\quad y = y_m(t)$, $n,m \in N$, $t \in R$, $x, y \in R^2$; $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – непрерывные матричные функции второго порядка.

Обозначим множество полиномиальных мультипликативно интегрируемых функций через $M(P,Q)$.

Целью статьи является продолжение исследования по выявлению структуры множества $M(P,Q)$ при малых степенях подынтегральной матричной функции. Исследование будет проводиться индукцией по степеням полиномиальных кривых $c:\ x = x_n(t),\quad y = y_m(t)$, вдоль которых идет интегрирование. Отметим, что предыдущие по индукции случаи рассмотрены в работах [1, 2].

В данной статье ограничимся линейными относительно x и y подынтегральными матричными функциями:

$$P(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \cdot y,$$

$$Q(x,y)=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{pmatrix}\cdot y, \quad \alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_{ij}\delta_{ij}\in R, \quad i,j=1,2.$$

Вдоль кривой $c:\ x=x_n(t),\ y=y_m(t)$ криволинейный мультипликативный интеграл (1) превращается в обыкновенный мультипликативный интеграл

$$Y(t)=\overset{\frown}{\int} E+A(t)dt,$$

где $A(t)=\left(P(x_n(t),y_m(t))x_n'(t)+Q(x_n(t),y_m(t))y_m'(t)\right)$.

Отметим, что первообразная $Y(t)$ удовлетворяет уравнению $Y'=A(t)Y$.

Проведем исследование индукцией по степеням $\deg x_n(t)$, $\deg y_m(t)$ полиномиальных кривых $x=x_n(t),\ y=y_m(t)$.

Случай 5. Пусть $\deg x_n(t)=2$, $\deg y_m(t)=1$. Тогда $c:\begin{cases}x(t)=a_2t^2+a_1t+a_0,\\ y(t)=b_1t+b_0.\end{cases}$

Следовательно, $dx=(2a_2t+a_1)dt,\ dy=b_1dt$,

$$A(t)=(2(\alpha_{ij})a_2^2)t^3+(3(\alpha_{ij})a_1a_2+2(\beta_{ij})a_2b_1+(\gamma_{ij})a_2b_1)t^2+((\alpha_{ij})(a_1^2+2a_0a_2)+$$
$$+(\beta_{ij})(a_1b_1+2a_2b_0)+(\gamma_{ij})a_1b_1+(\delta_{ij})b_1^2)t+(\alpha_{ij})a_0a_1+(\beta_{ij})a_1b_0+(\gamma_{ij})a_0b_1+(\delta_{ij})b_0b_1, \quad i,j=1,2.$$

Вычислим след подынтегральной матричной функции:

$$SpA(t)=(2(\alpha_{11}+\alpha_{22})a_2^2)t^3+(3(\alpha_{11}+\alpha_{22})a_1a_2+2(\beta_{11}+\beta_{22})a_2b_1+(\gamma_{11}+\gamma_{22})a_2b_1)t^2+$$
$$+((\alpha_{11}+\alpha_{22})(a_1^2+2a_0a_2)+(\beta_{11}+\beta_{22})(a_1b_1+2a_0b_0)+(\gamma_{11}+\gamma_{22})a_1b_1+(\delta_{11}+\delta_{22})b_1^2)t+$$
$$+(\alpha_{11}+\alpha_{22})a_0a_1+(\beta_{11}+\beta_{22})a_1b_0+(\gamma_{11}+\gamma_{22})a_0b_1+(\delta_{11}+\delta_{22})b_0b_1=0.$$

Следовательно, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\alpha_{11}+\alpha_{22}=0,\\ 2(\beta_{11}+\beta_{22})a_2b_1+(\gamma_{11}+\gamma_{22})a_2b_1=0,\\ (\beta_{11}+\beta_{22})(a_1b_1+2a_0b_0)+(\gamma_{11}+\gamma_{22})a_1b_1+(\delta_{11}+\delta_{22})b_1^2=0,\\ (\beta_{11}+\beta_{22})a_1b_0+(\gamma_{11}+\gamma_{22})a_0b_1+(\delta_{11}+\delta_{22})b_0b_1=0.\end{cases} \tag{2}$$

Перейдем к решению уравнения $Y'=A(t)Y$, где

$$Y(t)=\begin{pmatrix}c_{11}t+d_{11} & c_{12}t+d_{12}\\ c_{21}t+d_{21} & c_{22}t+d_{22}\end{pmatrix}, \quad Y'(t)=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}.$$

Для краткости введем обозначения:

$e_{ij}=2\alpha_{ij}a_2^2$, $f_{ij}=3\alpha_{ij}a_1a_2+2\beta_{ij}a_2b_1+\gamma_{ij}a_2b_1$,

$g_{ij}=\alpha_{ij}(a_1^2+2a_1a_2)+\beta_{ij}(a_1b_1+2a_2b_0)+\gamma_{ij}a_1b_1+\delta_{ij}b_1^2$,

$h_{ij}=\alpha_{ij}a_0a_1+\beta_{ij}a_1b_0+\gamma_{ij}a_0b_1+\delta_{ij}b_0b_1, \quad i,j=1,2$.

Тогда $A(t)=(e_{ij})t^3+(f_{ij})t^2+(g_{ij})t+(h_{ij}), \quad i,j=1,2.$ (3)

Вычислим произведение $A(t)Y(t)$:

$$A(t)Y(t)=((e_{ij})t^3+(f_{ij})t^2+(g_{ij})t+(h_{ij}))\cdot(c_{ij}t+d_{ij})=(e_{i1}c_{1j}+e_{i2}c_{2j})t^4+(e_{i1}d_{1j}+e_{i2}d_{2j}+f_{i1}c_{1j}+$$
$$+f_{i2}c_{2j})t^3+(f_{i1}d_{1j}+f_{i2}d_{2j}+g_{i1}c_{1j}+g_{i2}c_{2j})t^2+(g_{i1}d_{1j}+g_{i2}d_{2j}+h_{i1}c_{1j}+h_{i2}c_{2j})t+h_{i1}d_{1j}+h_{i2}d_{2j}. \tag{4}$$

Приравнивая матрицы (4) и $Y'(t)=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}e_{i1}c_{1j}+e_{i2}c_{2j}=0,\\ e_{i1}d_{1j}+e_{i2}d_{2j}+f_{i1}c_{1j}+f_{i2}c_{2j}=0,\\ f_{i1}d_{1j}+f_{i2}d_{2j}+g_{i1}c_{1j}+g_{i2}c_{2j}=0,\\ g_{i1}d_{1j}+g_{i2}d_{2j}+h_{i1}c_{1j}+h_{i2}c_{2j}=0,\\ h_{i1}d_{1j}+h_{i2}d_{2j}=c_{ij}.\end{cases} \tag{5}$$

Решим систему (5) методом Гаусса. Вычисления показывают, что система (5) имеет ненулевые решения, когда ее ранг равен шести.

Таким образом, ненулевые решения уравнения $Y' = A(t)Y$ есть решения системы

$$\begin{cases} -c_{11} + h_{11}d_{11} + h_{12}d_{21} = 0, \\ -c_{12} + h_{11}d_{12} + h_{12}d_{22} = 0, \\ -c_{21} + h_{21}d_{11} + h_{22}d_{21} = 0, \\ -c_{22} + h_{21}d_{12} + h_{22}d_{22} = 0, \\ (e_{11}h_{11} + e_{12}h_{12})d_{11} + (e_{11}h_{12} + e_{12}h_{22})d_{21} = 0, \\ (e_{11}h_{11} + e_{12}h_{12})d_{12} + (e_{11}h_{12} + e_{12}h_{22})d_{22} = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

при выполнении условий:

$$\frac{e_{11}h_{11} + e_{12}h_{21}}{e_{21}h_{11} + e_{22}h_{21}} = \frac{e_{11}h_{12} + e_{12}h_{22}}{e_{21}h_{12} + e_{22}h_{22}}, \qquad \frac{e_{11}h_{11} + e_{12}h_{21}}{e_{11} + f_{11}h_{11} + f_{12}h_{21}} = \frac{e_{11}h_{12} + e_{12}h_{22}}{e_{12} + f_{11}h_{12} + f_{12}h_{22}},$$

$$\frac{e_{11}h_{11} + e_{12}h_{21}}{e_{21} + f_{21}h_{11} + f_{22}h_{21}} = \frac{e_{11}h_{12} + e_{12}h_{22}}{e_{22} + f_{21}h_{12} + f_{22}h_{22}}, \qquad \frac{e_{11}h_{11} + e_{12}h_{21}}{f_{21} + g_{11}h_{11} + g_{12}h_{21}} = \frac{e_{11}h_{12} + e_{12}h_{22}}{f_{12} + g_{11}h_{12} + g_{12}h_{22}},$$

$$\frac{e_{11}h_{11} + e_{12}h_{21}}{f_{21} + g_{21}h_{11} + g_{22}h_{21}} = \frac{e_{11}h_{12} + e_{12}h_{22}}{f_{12} + g_{11}h_{12} + g_{12}h_{22}}, \qquad \frac{e_{11}h_{11} + e_{12}h_{21}}{g_{12} + h_{11}^2 + h_{12}h_{21}} = \frac{e_{11}h_{12} + e_{12}h_{22}}{g_{12} + h_{11}h_{12} + h_{12}h_{22}},$$

$$\frac{e_{11}h_{11} + e_{12}h_{21}}{g_{21} + h_{11}h_{12} + h_{22}h_{21}} = \frac{e_{11}h_{12} + e_{12}h_{22}}{g_{12} + h_{11}h_{12} + h_{12}h_{22}}. \qquad (7)$$

Требование $SpA(t) = 0$ после элементарных преобразований будет иметь вид:

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0, \quad 2(\beta_{11} + \beta_{22}) + (\delta_{11} + \delta_{22}) = 0,$$

$$(\beta_{11} + \beta_{22})(-a_1b_1 + 2a_2b_0) + (\delta_{11} + \delta_{22})b_1^2 = 0, \quad (\beta_{11} + \beta_{22})(a_1b_0b_1 - a_0b_1^2 - a_2b_0^2) = 0. \qquad (8)$$

Если предположить, что $\beta_{11} + \beta_{22} = 0$, то $Sp(\alpha_{ij}) = Sp(\beta_{ij}) = Sp(\gamma_{ij}) = Sp(\delta_{ij}) = 0$.

Условия (7) и (8) являются определяющими отношениями в подалгебре $M(P,Q)$.

<u>Случай 6</u>. Пусть $\deg x_n(t) = 1$, $\deg y_m(t) = 2$. Тогда $c: \begin{cases} x(t) = a_1t + a_0, \\ y(t) = b_2t^2 + b_1t + b_0. \end{cases}$

Следовательно, $dx = adt_1$, $dy = (2b_2t + b_1)dt$,

$$A(t) = (2(\gamma_{ij})b_2^2)t^3 + (3(\delta_{ij})b_1b_2 + 2(\gamma_{ij})a_1b_2 + (\beta_{ij})a_1b_2)t^2 + ((\delta_{ij})(b_1^2 + 2b_0b_2) + (\gamma_{ij})(a_1b_1 + 2a_0b_2) +$$
$$+ (\beta_{ij})a_1b_1 + (\alpha_{ij})a_1^2)t + (\delta_{ij})b_0b_1 + (\gamma_{ij})a_0b_1 + (\beta_{ij})a_1b_0 + (\alpha_{ij})a_0a_1, \quad i,j = 1,2.$$

Условие $SpA(t) = 0$ примет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11} + \delta_{22} = 0, \\ 2(\gamma_{11} + \gamma_{22}) + (\beta_{11} + \beta_{22}) = 0, \\ (\gamma_{11} + \gamma_{22})(2a_0b_2 - a_1b_1) + (\alpha_{11} + \alpha_{22})a_1^2 = 0, \\ (\gamma_{11} + \gamma_{22})(a_0a_1b_1 - a_1^2b_0 - a_0^2b_2) = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Перейдем теперь к решению уравнения $Y' = A(t)Y$. Пусть как прежде

$$Y(t) = \begin{pmatrix} c_{11}t + d_{11} & c_{12}t + d_{12} \\ c_{21}t + d_{21} & c_{22}t + d_{22} \end{pmatrix}, \quad Y'(t) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Для краткости обозначим:

$e_{ij} = 2\delta_{ij}u_2^2$, $f_{ij} = 3\delta_{ij}b_1b_2 + 2\gamma_{ij}a_1b_2 + \beta_{ij}a_1b_2$,

$g_{ij} = \delta_{ij}(b_1^2 + 2b_0b_2) + \gamma_{ij}(a_1b_1 + 2a_0b_2) + \beta_{ij}a_1b_1 + \alpha_{ij}a_1^2$,

$h_{ij} = \delta_{ij}b_0b_1 + \gamma_{ij}a_0b_1 + \beta_{ij}a_1b_0 + \alpha_{ij}a_0a_1$, $i,j = 1,2$. (10)

Тогда $A(t)Y(t) = ((e_{ij})t^3 + (f_{ij})t^2 + (g_{ij})t + (h_{ij})) \cdot (c_{ij}t + d_{ij})$.

Следующие далее вычисления (в терминах $e_{ij}, f_{ij}, g_{ij}, h_{ij}$) совпадают с соответствующими вычислениями для случая 5.

Поэтому решениями уравнения $Y' = A(t)Y$ будут решения системы (6) при условиях (7) предыдущего случая ($\deg x_n(t) = 2$, $\deg y_m(t) = 1$), в которых приняты обозначения (10).

Системы (7) случая 5 и (9) данного случая в принятых обозначениях (10) являются определяющими отношениями в подалгебре $M(P,Q)$.

Случай 7. Пусть $\deg x_n(t) = 2$, $\deg y_m(t) = 2$. Тогда $c: \begin{cases} x(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0, \\ y(t) = b_2t^2 + b_1t + b_0. \end{cases}$

Следовательно, $dx = (2a_2t + a_1)dt$, $dy = (2b_2t + b_1)dt$,

$$A(t) = (2(\alpha_{ij})a_2^2 + 2(\beta_{ij})a_2b_2 + 2(\gamma_{ij})a_2b_2 + 2(\beta_{ij})b_2^2)t^3 + (3(\alpha_{ij})a_1a_2 + (\beta_{ij})(a_1b_2 + a_2b_1) +$$
$$+ (\gamma_{ij})(a_2b_1 + 2a_1b_2) + 3(\delta_{ij})b_1b_2)t^2 + ((\alpha_{ij})(a_1^2 + 2a_0a_2) + (\beta_{ij})(a_1b_1 + a_2b_o) + (\gamma_{ij})(a_1b_1 + 2a_0b_2) +$$
$$+ (\delta_{ij})(b_1^2 + b_0b_2))t + (\alpha_{ij})a_0a_1 + (\beta_{ij})a_1b_0 + (\gamma_{ij})a_0b_1 + (\delta_{ij})b_0b, \quad i,j = 1,2. \qquad (11)$$

Отметим, что условие $SpA(t) = 0$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} 2(\alpha_{11} + \alpha_{22})a_2^2 + 2((\beta_{11} + \beta_{22}) + (\gamma_{11} + \gamma_{22}))a_2b_2 + 2(\delta_{11} + \delta_{22})b_2^2 = 0, \\ 3(\alpha_{11} + \alpha_{22})a_1a_2 + (\beta_{11} + \beta_{22})(a_1b_2 + 2a_2b_1) + (\gamma_{11} + \gamma_{22})(a_2b_1 + 2a_1b_2) + 3(\delta_{11} + \delta_{22})b_1b_2 = 0, \\ (\alpha_{11} + \alpha_{22})(a_1^2 + 2a_0a_2) + (\beta_{11} + \beta_{22})(a_1b_1 + 2a_2b_0) + (\gamma_{11} + \gamma_{22})(a_1b_1 + 2a_0b_2) + (\delta_{11} + \delta_{22})(b_1^2 + 2b_0b_2) = 0, \\ (\alpha_{11} + \alpha_{22})a_0a_1 + (\beta_{11} + \beta_{22})a_1b_0 + (\gamma_{11} + \gamma_{22})a_0b_1 + (\delta_{11} + \delta_{22})b_0b_1 = 0. \end{cases}$$

Обозначим:

$$2(\alpha_{ij})a_2^2 + 2(\beta_{ij})a_2b_2 + 2(\gamma_{ij})a_2b_2 + 2(\beta_{ij})b_2^2 = e_{ij},$$
$$3(\alpha_{ij})a_1a_2 + (\beta_{ij})(a_1b_2 + a_2b_1) + (\gamma_{ij})(a_2b_1 + 2a_1b_2) + 3(\delta_{ij})b_1b_2 = f_{ij},$$
$$(\alpha_{ij})(a_1^2 + 2a_0a_2) + (\beta_{ij})(a_1b_1 + a_2b_o) + (\gamma_{ij})(a_1b_1 + 2a_0b_2) + (\delta_{ij})(b_1^2 + b_0b_2) = g_{ij},$$
$$(\alpha_{ij})a_0a_1 + (\beta_{ij})a_1b_0 + (\gamma_{ij})a_0b_1 + (\delta_{ij})b_0b_1 = h_{ij}, \quad i,j = 1,2. \qquad (12)$$

Тогда $A(t) = (e_{ij})t^3 + (f_{ij})t^2 + (g_{ij})t + (h_{ij})$, $\quad i,j = 1,2$.

Дальнейшие вычисления вновь (как и в случае 6) повторяют вычисления случая 5.

Тогда решениями уравнения $Y' = A(t)Y$ являются решения системы (6) случая 5 (в принятых в данном случае обозначениях (12)) при условии (7) случая 5.

Условия (7) и $SpA(t) = 0$ являются определяющими отношениями в подалгебре $M(P,Q)$.

Примечания:

1. Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж. О структуре подалгебры полиномиальных мультипликативно интегрируемых матричных функций второго порядка. I // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2017. Вып. 4 (211). С. 54–59. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж. О структуре подалгебры полиномиальных мультипликативно интегрируемых матричных функций второго порядка. II // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2018. Вып. 1 (216). С. 49–53. URL: http://vestnik.adygnet.ru

References:

1. Kozlov V.A., Palandzhyants L.Zh. On structure of subalgebra of second order polynomial multiplicatively integrated matrix functions. I // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2017. Iss. 4 (211). P. 54–59. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Kozlov V.A., Palandzhyants L.Zh. On structure of subalgebra of second order polynomial multiplicatively integrated matrix functions. II // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2018. Iss. 1 (216). P. 49–53. URL: http://vestnik.adygnet.ru