УДК 517.925.5
ББК 22.161.1
С 78

Сташ Айдамир Хазретович
Кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593905, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

О некоторых свойствах гиперчастот решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков

(Рецензирована)

Аннотация. *Установлено, что полные гиперчастоты, рассматриваемые как функционалы на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений выше третьего порядка с непрерывными ограниченными на полуоси коэффициентами, не являются остаточными (то есть могут меняться при изменении решения на конечном отрезке). Кроме того, при любом наперед заданном* $n>3$ *приводится пример линейного однородного дифференциального уравнения* n *-го порядка, для некоторого решения которого полная и векторная гиперчастоты не совпадают.*

Ключевые слова: *линейное дифференциальное уравнение, колеблемость решений, число нулей функции, полная частота, векторная частота.*

Stash Aydamir Khazretovich
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593905, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

On some properties of hyper frequencies of decisions for linear differential equations of the highest orders

Abstract. *We have established that the full hyper frequencies considered as functionalities on a set of solutions of the linear uniform differential equations above the third order with the continuous coefficients limited on a semiaxis are not residual (that is can change at changing solution on a final piece). Besides, at any beforehand set* $n>3$, *an example of the linear uniform differential equation of n order, for some solution of which full and vector hyper frequencies do not coincide, is given.*

Keywords: *linear differential equation, fluctuation of solutions, number of zero function, full frequency, vector frequency.*

Введение

Ляпуновские характеристики колеблемости дифференциальных уравнений и систем впервые были введены И.Н. Сергеевым в работах [1–3]. Важным свойством этих характеристик, призванным облегчить их исследование, является остаточность [4], то есть инвариантность относительно изменения решения на любом конечном отрезке. Векторные гиперчастоты любых решений, как оказалось [3], всегда совпадают с их показателями блуждаемости, которые являются остаточными. Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все характеристики колеблемости равны нулю, так как эти решения не имеют нулей, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (как и все нижние) частоты равны между собой [5]. Следовательно, на множестве решений уравнений первого и второго порядков наблюдается остаточность всех характеристик колеблемости. В [6] доказано отсутствие свойства остаточности у полных гиперчастот решений дифференциальных уравнений третьего порядка, а в [7] приводится пример линейного уравнения третьего порядка, для некоторого решения которого полная и векторная гиперчастоты не совпадают. Про существование аналогичного примера дифференциального уравнения, а также про остаточность полных частот гиперкорней на множестве решений дифференциальных уравнений выше третьего порядка не было ничего известно. Этим вопросам и посвящена настоящая работа.

Для заданного натурального n обозначим через E^n множество линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(t)\dot{y}+a_n(t)y=0, \qquad t\in R^+\equiv[0;\infty),$$

с ограниченной непрерывной строкой коэффициентов

$$a \equiv (a_1, \dots, a_n) \colon R^+ \to R^n$$

(каждую такую строку будем отождествлять с соответствующим уравнением). Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in E^n$ обозначим через $S_*(a)$ и положим

$$S^n \equiv \bigcup_{a \in E^n} S_*(a).$$

Определение 1 [2, 3]**.** Для каждого решения $y \in S_*(a)$ уравнения $a \in E^n$, чисел $t > s \geq 0$ и вектора $m \equiv (m_1, m_2, \dots, m_n) \in R^n$ обозначим $\nu^*(y, m, t, s)$ количество гиперкорней скалярного произведения

$$\langle \psi y(\tau), m \rangle = m_1 y(\tau) + m_2 \dot{y}(\tau) + \dots + m_n y^{(n-1)}(\tau) \qquad \left(\psi y \equiv \left(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}\right)\right)$$

на промежутке $(s, t]$, где в процессе подсчета этого количества:

– каждый некратный корень берется ровно один раз;

– любой кратный корень берется бесконечно много раз независимо от его фактической кратности (другими словами, как только хотя бы в одной точке $\tau_0 \in (s, t]$ выполнены одновременно оба равенства

$$\langle \psi y(\tau_0), m \rangle = \langle \psi \dot{y}(\tau_0), m \rangle = 0,$$

так сразу величина $\nu^*(y, m, t, s)$ считается равной бесконечности, а в противном случае она равна числу нулей функции $\langle \psi y, m \rangle$ на промежутке $(s, t]$).

Далее определим гиперчастоты решений дифференциальных уравнений.

Определение 2 [2, 3]**.** Каждому решению $y \in S_*(a)$ уравнения $a \in E^n$ поставим в соответствие нижние (верхние) полную и векторную частоты гиперкорней

$$\check{\sigma}^*(y) = \inf_{m \in R^n} \varliminf_{t \to \infty} \frac{\pi}{t} \nu^*(y, m, t, 0) \qquad \left(\hat{\sigma}^*(y) = \inf_{m \in R^n} \varlimsup_{t \to \infty} \frac{\pi}{t} \nu^*(y, m, t, 0)\right),$$

$$\check{\zeta}^*(y) = \varliminf_{t \to \infty} \inf_{m \in R^n} \frac{\pi}{t} \nu^*(y, m, t, 0) \qquad \left(\hat{\zeta}^*(y) = \varlimsup_{t \to \infty} \inf_{m \in R^n} \frac{\pi}{t} \nu^*(y, m, t, 0)\right).$$

В случае совпадения полной или векторной верхней частоты гиперкорней решения y с одноименной нижней будем называть ее точной и обозначать $\zeta^*(y)$ или $\sigma^*(y)$.

Определение 3 [4]**.** Для заданных множеств M и $F = \{f : R^+ \to M\}$ назовем функционал $\lambda : F \to R$ остаточным, если для любых функций $f, g \in F$, удовлетворяющих хотя бы при одном $t_0 \in R^+$ условию $f(t) = g(t)$, $t \geq t_0$, имеет место равенство $\lambda(f) = \lambda(g)$.

Замечание. Из определений 1 и 2 следует, что для любого решения $y \in S_*(a)$ произвольного уравнения $a \in E^n$ справедливы цепочки соотношений

$$\hat{\zeta}^*(y) \leq \hat{\sigma}^*(y), \qquad \check{\zeta}^*(y) \leq \check{\sigma}^*(y), \qquad \check{\zeta}^*(y) \leq \hat{\zeta}^*(y), \qquad \check{\sigma}^*(y) \leq \hat{\sigma}^*(y).$$

Формулировка и доказательство результатов

Имеют место следующие

Теорема 1. *Для любого натурального* $n \geq 4$ *найдется уравнение* $c \in E^n$, *некоторое решение* $z \in S_*(c)$ *которого удовлетворяет неравенству* $\zeta^*(z) < \sigma^*(z)$.

Теорема 2. *При любом натуральном* $n \geq 4$ *функционалы* $\hat{\sigma}^*, \check{\sigma}^* : S^n \to R$ *не являются остаточными.*

Доказательство теоремы 1.

1. Для заданного натурального k выберем автономное уравнение $a \in E^{k+3}$ с фундаментальной системой $n = k + 3$ решений

$$\sin t,\ 1,\ \cos t,\ e^t,\ e^{2t},\ldots,\ e^{kt}. \tag{1}$$

По выбранной линейно независимой системе из n функций

$$y_1=\sin 3t,\quad y_2=e^{-t}(\cos t+1),\quad y_3=\cos 3t,\quad y_4=e^t,\quad y_5=e^{2t},\ldots,\quad y_{k+3}=e^{kt} \tag{2}$$

на всей числовой оси восстановим линейное однородное уравнение $b\in E^{k+3}$ вида

$$\frac{1}{\Delta(t)}\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{k+3} & y \\ \dot y_1 & \cdots & \dot y_{k+3} & \dot y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_{k+3}^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}=0,$$

решениями которого они являются (см. [8]). Раскладывая определитель по элементам последнего столбца, убеждаемся, что коэффициенты построенного уравнения являются ограниченными функциями на R^+.

Выберем такие числа τ_1 и τ_2, что $2\pi<\tau_1<\tau_2$. В соответствии с теоремой 3 из работы [9] построим на участке $[\tau_1,\tau_2]$ уравнение $c\in E^{k+3}$ (с гладкими коэффициентами), переводящее набор (1) решений, заданных на отрезке $[0,\tau_1]$, в набор (2) решений, заданных на луче $[\tau_2,+\infty)$: слева от отрезка $[\tau_1,\tau_2]$ уравнение $c\in E^{k+3}$ совпадает с уравнением $a\in E^{k+3}$, а справа – с уравнением $b\in E^{k+3}$. Здесь первое решение начального набора переходит в первое решение конечного решения, второе – во второе, а третье – в третье и т.д. Обозначим полученные кусочно составленные решения этого уравнения через $z_1,z_2,z_3\in S_*(c)$ соответственно.

2. а) При $k=1$ для вектора $m_1=(9,0,1,0)$ и решения $z=z_1-\dfrac{8\sqrt2}{9}z_2+z_3\in S_*(c)$ имеем представление

$$\langle \psi z(t),m_1\rangle=8\sin t+8\cos t-8\sqrt2,\quad t\in[0,\tau_1].$$

Отсюда, в силу равенств $\langle \psi z(\pi/4),m_1\rangle=\langle \psi\dot z(\pi/4),m_1\rangle=0$, имеем $\nu^*(z,m_1,\tau_1,0)=\infty$.

б) Для любого вектора $m=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, непропорционального вектору m_1, при $t\in[\tau_2,+\infty)$ имеем

$$\langle \psi z(t),m\rangle=A_1\sin(3t+3t_1)+A_2e^{-t}\cos(t+t_2)+A_3e^{-t},$$

где $3t_1$, t_2 – вспомогательные углы, а числа A_1, A_2, A_3 удовлетворяют соотношениям

$$A_1^2=(\alpha_1-3\alpha_2-9\alpha_3+27\alpha_4)^2+(\alpha_1+3\alpha_2-9\alpha_3-27\alpha_4)^2\neq0,$$

$$A_2^2=\frac{128}{81}\left((\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_4)^2+(\alpha_2-2\alpha_3+2\alpha_4)^2\right),$$

$$A_3=\frac{-8\sqrt2}{9}(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4).$$

Поэтому, начиная с некоторого достаточно большого значения $t_3(m)$, на любом промежутке длины π последняя функция будет иметь ровно 3 нуля. Кроме того, согласно теореме 2 из [3], найдется вектор m_2, непропорциональный вектору m_1, для которого при любом $t\in R^+$ выполнено неравенство $\nu^*(z,m_2,t,0)<\infty$. Следовательно, для верхней полной частоты гиперкорней имеем

$$\hat\sigma^*(z)=\inf_{m\in R^n}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^*(z,m,t_3(m),0)+\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\pi}{t}\nu^*(z,m,t,t_3(m))\right)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\pi}{t}\left[\frac{3(t+t_1-t_3(m))}{\pi}\right]=3,$$

где $[s]$ – целая часть числа s. Для нижней полной частоты гиперкорней решения $z\in S_*(c)$ имеют место аналогичные равенства, поэтому $\check\sigma^*(z)=3$.

в) Далее, при $\alpha_1\to9$, $\alpha_2\to0$, $\alpha_3\to1$, $\alpha_4\to0$ имеем

$$A_1 \to 0, \quad A_2 \to \frac{8\sqrt{170}}{9}, \quad A_3 \to \frac{-80\sqrt{2}}{9},$$

откуда при любом $t>0$ найдется такое $m(t)$, что $\nu^*(z,m(t),t,0)=0$, а значит, выполнены равенства

$$\zeta^*(z)=\lim_{t\to\infty}\inf_{m\in R^n}\frac{\pi}{t}\nu^*(z,m,t,0)=0.$$

3. г) При $k>1$ для вектора $m_3=(18,18,11,2,1,0,\dots,0)$ и решения $z=z_1+\frac{4\sqrt{10}}{9}z_2+z_3\in S_*(c)$ имеем

$$\langle\psi z(t),m_3\rangle=-8\sin t+24\cos t+8\sqrt{10}=8\sqrt{10}\left(\sin(t+t_4)+1\right),\quad t\in[0,\tau_1].$$

Заметим, что все нули этой функции являются кратными и расстояние между ними равно 2π. Поэтому найдется нуль этой функции, принадлежащий промежутку $(0,\tau_1]$. Следовательно, для рассматриваемой функции выполняется $\nu^*(z,m_3,\tau_1,0)=\infty$.

д) На участке $[\tau_2,+\infty)$ для любого вектора $m=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,0,\dots,0)$, непропорционального вектору m_1, имеем

$$\langle\psi z(t),m\rangle=B_1\sin(3t+3t_5)+B_2e^{-t}\cos(t+t_6)+B_3e^{-t},\qquad B_1\neq 0,$$

где $3t_5$, t_6 – вспомогательные углы, а числа B_1, B_2, B_3 определяются из равенств

$$B_1^2=\left(\beta_1-3\beta_2-9\beta_3+27\beta_4+81\beta_5\right)^2+\left(\beta_1+3\beta_2-9\beta_3-27\beta_4+81\beta_5\right)^2,$$

$$B_2^2=\frac{160}{81}\left(\left(\beta_1-\beta_2+2\beta_4-4\beta_5\right)^2+\left(\beta_2-2\beta_3+2\beta_4\right)^2\right),$$

$$B_3=\frac{4\sqrt{10}}{9}\left(\beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4+\beta_5\right).$$

Поэтому рассуждения, проводимые в п. 2. б) настоящего доказательства, приводят к равенствам

$$\hat{\sigma}^*(z)=\breve{\sigma}^*(z)=3.$$

е) При $\beta_1\to 18,\ \beta_2\to 18,\ \beta_3\to 11,\ \beta_4\to 2,\ \beta_5\to 1$ имеем

$$B_1\to 0,\quad B_2\to 0,\quad B_3\to\frac{40\sqrt{10}}{9},$$

откуда следует (см. рассуждения в п. 2. в)) $\zeta^*(z)=0$.

Теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2.

1. Пусть $k=1$. Обратимся к доказательству теоремы 1 и выберем решения

$$z=z_1-\frac{8\sqrt{2}}{9}z_2+z_3\in S_*(c),\qquad y=y_1-\frac{8\sqrt{2}}{9}y_2+y_3\in S_*(b),$$

совпадающие друг с другом на луче $[\tau_2,+\infty)$. Для вектора $m_1=(9,0,1,0)$ и указанных решений имеем представления

$$\langle\psi y(t),m_1\rangle=-\frac{8\sqrt{2}}{9}e^{-t}\left(2\sin t+9\cos t+10\right)<0,\quad t\in R^+,$$

$$\langle\psi z(t),m_1\rangle=\begin{cases}8\sin t+8\cos t-8\sqrt{2}, & t\in[0,\tau_1],\\ \langle\psi y(t),m_1\rangle, & t\in[\tau_2,+\infty).\end{cases}$$

Отсюда для выбранного решения y выполняются очевидные равенства

$$\hat{\sigma}^*(y)=\breve{\sigma}^*(y)=0, \tag{3}$$

а из п. 2 в) доказательства теоремы 1 следует, что для решения z имеем

$$\widehat{\sigma}^{*}(z)=\breve{\sigma}^{*}(z)=3. \qquad (4)$$

Несовпадение друг с другом величин (3) и (4) означает неостаточность рассматриваемых частот в случае $k=1$.

2. При $k>1$ для вектора $m_3=(18,18,11,2,1,0,\ldots,0)$ и решений

$$y=y_1+\frac{4\sqrt{10}}{9}y_2+y_3, \qquad z=z_1+\frac{4\sqrt{10}}{9}z_2+z_3$$

соответственно уравнений $b,c\in E^{k+3}$, построенных в доказательстве теоремы 1, выполнены

$$\langle \psi y(t),m_3\rangle=\frac{40\sqrt{10}}{9}e^{-t}>0, \quad t\in R^{+},$$

$$\langle \psi z(t),m_3\rangle=\begin{cases}8\sqrt{10}\left(\sin(t+t_4)+1\right), & t\in[0,\tau_1],\\ \langle \psi y(t),m_3\rangle, & t\in[\tau_2,+\infty).\end{cases}$$

Поэтому справедливы следующие соотношения:

$$0=\widehat{\sigma}^{*}(y)=\breve{\sigma}^{*}(y)\neq\widehat{\sigma}^{*}(z)=\breve{\sigma}^{*}(z)=3.$$

Последнее неравенство завершает доказательство теоремы 2 в случае $k>1$.

Теорема 2 полностью доказана.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

Примечания:

1. Сергеев И.Н. Определения и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
2. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1577.
3. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математический сборник. 2013. Т. 204. С. 119–138.
4. Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.
5. Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 21–26.
6. Сташ А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у полных гиперчастот решений дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2017. № 2. С. 65–68.
7. Сташ А.Х. Пример несовпадения полной и векторной частот гиперкорней решения дифференциального уравнения третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2016. Вып. 4 (191). С. 49–52. URL: http://vestnik.adygnet.ru
8. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.
9. Сергеев И.Н. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 3. С. 25–33.

References:

1. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of the linear equation // Works of Seminar of I.G. Petrovsky. 2006. Iss. 25. P. 249–294.
2. Sergeev I.N. Determination of full frequencies of solutions of the linear equation // Differential Equations. 2008. Vol. 44, No. 11. P. 1577.
3. Sergeev I.N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems // Mathematical Collection. 2013. Vol. 204, No. 1. P. 119–138.
4. Sergeev I.N. On the theory of Lyapunov indices of linear systems of differential equations // Works of the Seminar of I.G. Petrovsky. 1983. Iss. 9. P. 111–166.
5. Sergeev I.N. Unsteadiness and roaming of solutions of the second order differential equation // Bulletin of Moscow University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. 2011. No. 6. P. 21–26.
6. Stash A.Kh. The absence of residual property for total hyper-frequencies of solutions to third order differential equations // Bulletin of Moscow University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. 2017. No. 2. P. 65–68.
7. Stash A.Kh. Example of discrepancy of the complete and vector frequencies of hyper roots of solutions of the third order differential equation // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2016. Iss. 4 (191). P. 49–52. URL: http://vestnik.adygnet.ru
8. Filippov A.F. Introduction in the theory of differential equations. M.: Editorial URSS, 2004. 240 pp.
9. Sergeev I.N. On control of solutions of the linear differential equation // Bulletin of the Moscow University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. 2009. No. 3. P. 25–33.