УДК 519.63
ББК 22.193.22
Т 92

Тхабисимова Мария Муштафаровна
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики института физики и математики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: tembotowa.m@yandex.ru
Кайгермазов Арслан Ахматович
Кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики института физики и математики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: karslan@yandex.ru
Кудаева Фатимат Хусейновна
Кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики института физики и математики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: kfatimat@yandex.ru

Статистический анализ стохастической модели влагопереноса

(Рецензирована)

Аннотация. *Проводится статистический анализ стохастической модели влагопереноса. Для определения статистических показателей уравнение Адлера сводится к последовательному решению шести однотипных задач, решение которых осуществляется методом итерации с применением алгоритма прогонки. Полученные результаты счета по формулам метода прогонки устойчивы. На основе рассматриваемого в работе алгоритма разработана программа, реализованная в среде Turbo Pascal. Для приведенных в программе значений случайных функций и просчитан контрольный пример.*

Ключевые слова: *статистический анализ, математическое ожидание, корреляционная функция, среднеквадратичное отклонение, алгоритм прогонки, стохастическая модель.*

Tkhabisimova Mariya Mushtafarovna
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Informatics and Applied Mathematics, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: tembotowa.m@yandex.ru
Kaygermazov Arslan Akhmatovich
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Department of Informatics and Applied Mathematics, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: karslan@yandex.ru
Kudaeva Fatimat Khuseynovna
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Department of Informatics and Applied Mathematics, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: kfatimat@yandex.ru

Statistical analysis of the stochastic model of moisture transfer

Abstract. *In this work, we carry out the statistical analysis of the stochastic model of moisture transfer. To determine the statistical parameters, the Adler's equation comes down to a sequential solution of six one-type problems, solved by the iteration method using the sweep algorithm. The results of the calculation obtained by the formulas of the sweep method are stable. Based on the algorithm considered in the work, we developed a program implemented in the Turbo Pascal environment and calculated a test case for the values of random functions listed in the program.*

Keywords: *statistical analysis, mathematical expectation, correlation function, standard deviation, sweep algorithm, stochastic model.*

Введение

Теория случайных процессов и ее прикладные направления интенсивно развиваются в последние годы. Связано это с тем, что для описания некоторых стохастических процессов детерминированные математические модели явно недостаточны. В теории случайных процессов классические модели явлений часто предполагают определенность параметров, входящих в дифференциальные уравнения и граничные условия. Фактически эти параметры определяются в результате многомерных измерений или наблюдений и не всегда могут считаться детерминированными. Если процесс нестационарный, то очень часто изменение во времени одних параметров приводит к изменению остальных. Здесь существует корреляционная связь между входными параметрами математической модели. В этих условиях уместно поставить вопрос о вероятностных свойствах поведения математической модели в рамках корреляционной теории. Задача модифицированного уравнения влагопереноса должна быть рассмотрена в стохастических условиях в рамках корреляционной теории случайных процессов.

1. Численные алгоритмы решения модифицированного уравнения влагопереноса

Проблема определения математического ожидания и корреляционной функции решения уравнения Адлера сводится к последовательному решению шести однотипных задач вида:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right]+f(x,t),\\
&u_x(0,t)=\mu_1(t),\quad 0\le t\le T,\\
&u(l,t)=-\frac{1}{p}\int_0^l u(x,t)dx+\mu_2(t),\quad 0\le t\le T,\\
&u(x,0)=u_0(x),\quad 0\le t\le l.
\end{aligned}\tag{1}$$

Решение каждой из этих задач осуществляется методом итерации с применением алгоритма прогонки [1, 2]. Выбор метода итерации обусловлен тем, что матрицы сеточных уравнений, соответствующих нелокальным задачам, не являются трехдиагональными, поэтому применять непосредственно метод прогонки нельзя.

Метод итерации позволяет избавиться от нелокальности в граничном условии. При этом задача записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{s+1}u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k(x,t)\partial^{s+1}u}{\partial x}\right]+\eta(x,t)\frac{\partial^{s+1}u}{\partial x^2\partial t}+f(x,t),\\
&u_x^{s+1}(0,t)=\mu_1(t),\\
&u^{s+1}(l,t)=\frac{1}{p}\int_0^l u(x,t)dx+\mu_2(t),\quad 0\le t\le T,\\
&u^{s+1}(x,0)=u_0(x),\quad 0\le t\le l.
\end{aligned}\tag{2}$$

Перейдем непосредственно к построению алгоритма численного определения математического ожидания решения модифицированного уравнения.

Построим на прямоугольнике $[0\le x\le 1]$, $[0<t<T]$ сетку $\{xi=ih,\quad tj=j\tau,\quad \tau M=T\}$. Для удобства изложения алгоритма введем обозначения:

$$u^{s+1}(ih,j\tau)=W_t^j,\quad u^{s+1}\big(ih,(j+1)\tau\big)=W_t^{j+1}.$$

Решение задачи s-ой итерации запишем в следующем виде: $\overset{s}{W}$.

Заменим уравнение (2) его разностным аналогом:

$$\begin{aligned}
&\frac{W_t^{j+1}-W_t^j}{\tau}=\frac{1}{h}\left[\frac{W_{t+1}^j-W_t^j}{h}-k_{t-1}^j\frac{W_t^j-W_{t-1}^j}{h}\right]+\\
&+\frac{1}{h}\left[\frac{W_{t+1}^{j+1}-2W_t^{j+1}+W_{t-1}^{j+1}}{\tau^2}-\frac{W_{t+1}^{j+1}-2W_t^{j+1}+W_{t-1}^{j+1}}{\tau^2}\right]+f_1(ih,j\tau),\\
&i=1,2,...,n-1,\quad j=1,2,...,M-1.
\end{aligned}\tag{3}$$

Граничные и начальные условия примут вид:

$$\frac{W_t^{j+1}-W_0^{j-1}}{h}=\mu_1(j\tau),\qquad W_N^{j+1}=-\frac{1}{p(j\tau)}\int_0^l W^s dx+\mu_2(j\tau),\qquad W_t^0=u_0.\tag{4}$$

Здесь h, τ – шаги по координате и времени.

После несложных преобразований систему (2) можно переписать в виде:

$$W_t^{j+1} = W_t^j + \frac{\eta}{h^2}\left[\left(k_{t-1}^j - \frac{\eta}{\tau}\right)W_{t-1}^j + \left(\frac{2\eta}{\tau} - k_{t-1}^j - k_t^j\right)W_t^j + \left(k_t^j - \frac{\eta}{\tau}\right)W_{t-1}^j\right] + \\ + \frac{\eta}{h^2}\left(W_{t+1}^{j+1} - 2W_t^{j+1} + W_{j-1}^{j+1}\right) + \tau f(ih, l\tau), \quad i = 1,2,...,n-1, \quad j = 1,2,...,M-1. \tag{5}$$

Систему (5) можно переписать в трехдиагональной форме, удобной для применения алгоритма прогонки [3, 4]:

$$BW_{t+1}^{j+1} - CW_t^{j+1} + BW_{t-1}^{j+1} = F. \tag{6}$$

Здесь

$$B = \frac{\eta}{h^2}, \quad C = \frac{\eta}{h^2} + 1, \\ F = W_t^j + \frac{\tau}{h^2}\left[\left(k_{t-1}^j - \frac{\eta}{\tau}\right)W_{t-1}^j + \left(\frac{2\eta}{\tau} - k_{t-1}^j - k_t^j\right)W_t^j + \left(k_t^j - \frac{\eta}{\tau}\right)W_{t+1}^j\right] + \tau f(ih, l\tau). \tag{*}$$

На границах области и в начальный момент выполняются условия (3). Согласно алгоритму прогонки решение (6) ищется в виде [5, 6]:

$$W_t^{j+1} = U_{t+1}W_{t+1}^{j+1} + V_{t+1}, \quad i = 1,2,...,N-1, \quad j = 1,2,...,M-1. \tag{7}$$

Граничные условия представляются в форме:

$$W_0^{j+1} = \chi_1 W_1^{j+1} + v_1, \qquad W_t^{j+1} = \chi_1 W_1^{j+1} + v_2, \tag{8}$$

где

$$\chi_1 = 1, \quad v_1 = \mu_1(j,\tau)h, \\ \chi_2 = 0, \quad v_2 = -\frac{1}{p(j\tau)}\sum_{t=0}^{\tau}\frac{1}{h}W^s(ih) + \mu_2(j\tau), \\ h = \begin{cases} \dfrac{h}{2}, & i = 0, N, \\ h, & i = 1,2,..,N-1. \end{cases} \tag{9}$$

Подставляя представление (8) в (6) и используя формулы (9), можно получить следующие рекуррентные формулы для вычисления значения влажности на любом временном слое:

a)

$$U_{\mathrm{t}} = \chi_\tau, \quad V_t = v_\tau, \\ U_{t+1} = \frac{B}{C - BU_t}, \quad V_{it+1} = \frac{BV_i + F}{C - BU_i}, \quad i = 1,2,...,N-1;$$

b)

$$W_N = \frac{v_2 + \chi_2 V_N}{1 - \chi_2 U_N}, \quad W_t^{j+1} = U_{t+1}W_{t+1}^{j+1} + V_{t+1}, \quad i = N-1, N-2,...,1,0, \quad j = 1,2,...,M-1, \\ W_0^{j+1}\chi_1 W_1^{j+1} + v.$$

Счет по формулам метода прогонки устойчив, если [7] $B>0$ и $C\leq 2B$, что выполняется согласно формулам (*).

Здесь N, M – число разбиений по пространственной и временной координате, h, τ – соответствующие шаги. Заметим, что при последовательном решении однотипных уравнений и вычислении корреляционной функции достаточно вести счет для каждых двух временных слоев с интервалом τ, а не решать задачи для всех значений времени. Это обстоятельство позволяет существенно экономить время счета, оперативную память и постепенно продвигаться по времени до нужного значения T.

Наряду с математическим ожиданием решения $\overline{W}(x,t)$ вычисляется также среднеквадратическое отклонение значения влажности от ее среднего значения по формуле:

$$\sigma(x,t) = \sqrt{K(x,t;x,t)} .$$

Эта величина характеризует вероятность колебания влажности в окрестности ее среднего значения и является наряду с математическим ожиданием второй важнейшей характеристикой случайного процесса.

На основе рассматриваемого в работе алгоритма разработана программа, реализованная в среде Turbo Pascal, тест которой приводится в приложении. Для приведенных в программе значений случайных функций и просчитан контрольный пример.

2. Реализация алгоритмов решения задачи в среде Turbo Pascal

Значения исходных данных, входящих в стохастическую модель, ввиду отсутствия данных наблюдений выбирались произвольно.

$f(x,t)=x^2-2t-1$,

$\mu(t)=t$,

$\mu_2(t)=0$,

$p=(1^3+3l)/(3l^2+3)$,

$\kappa=1$,

$\eta=1$.

Точным решением (рис. 1) уравнения Аллера при этих значениях исходных данных является функция $u=x^2t+t$. Результатом работы программы являются десять значений математического ожидания влажности $y(x,\mathrm{t})$, зависящие от координаты x в определенный момент времени. Наличие источника влаги на правом конце участка, растущего со временем, приводит к росту математического ожидания влажности при изменении координаты от $x=0$ до $x=1$.

Точное решение задачи

u [0, 1] = 0
u [1, 1] = 0,0105
u [2, 1] = 0,042
u [3, 1] = 0,945
u [4, 1] = 0,168
u [5, 1] = 0,2625
u [6, 1] = 0,378
u [7, 1] = 0,5145
u [8, 1] = 0,672
u [9, 1] = 0,9345
u [10, 1] = 1,05

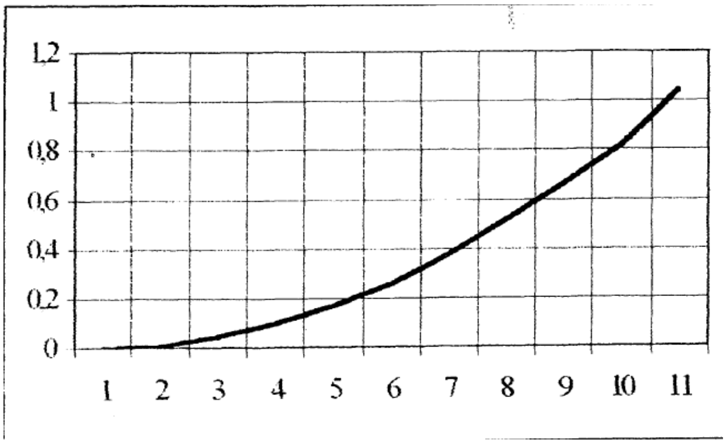
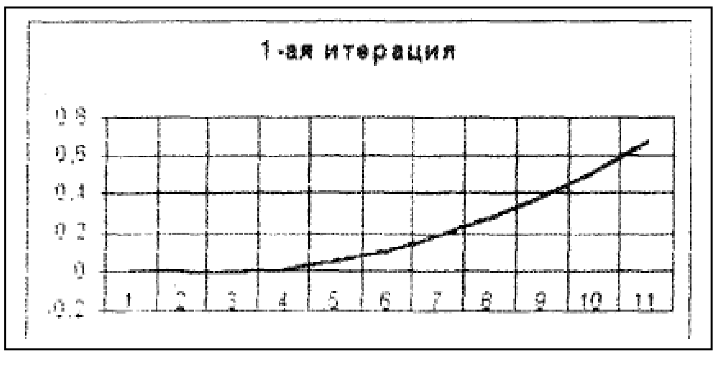


Рис. 1. Результаты работы программы

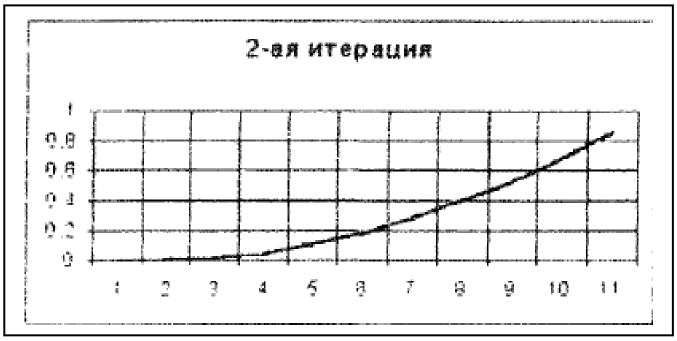
1-ая итерация

y [0, 1] = 0,0000000000
y [1, 1] = – 0,0038438108
y [2, 1] = – 0,0077280828
y [3, 1] = 0,0089157438
y [4, 1] = 0,0457088866
y [5, 1] = 0,1022630684
y [6, 1] = 0,1781764311
y [7, 1] = 0,2730293049
y [8, 1] = 0,3863797909
y [9, 1] = 0,5177591097
y [10, 1] = 0,666666667



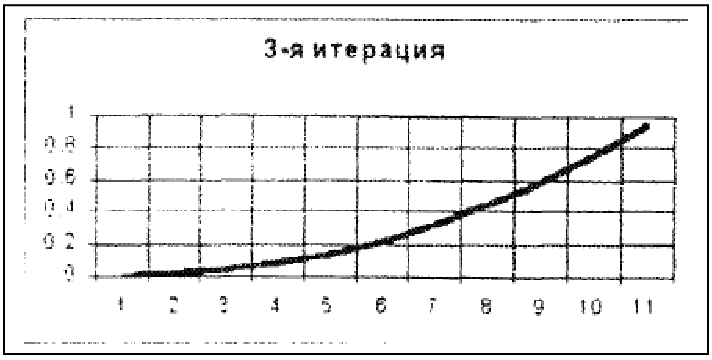
2-ая итерация

y [0, 1] = 0,0000000000
y [1, 1] = 0,0116635198
y [2, 1] = 0,0234498135
y [3, 1] = 0,0560923943
y [4, 1] =0,1093808874
y [5, 1] = 0,1831006513
y [6, 1] = 0,2770305179
y [7, 1] = 0,3909404650
y [8, 1] = 0,39094046501
y [9, 1] = 0,5245891943
y [10, 1] = 0,85006604



3-я итерация

y [0, 1] = 0,00000000000
y [1, 1] = 0,0188084856
y [2, 1] = 0,0378149554
y [3, 1] = 0,0778289241
y [4, 1] = 0,1387176109
y [5, 1] = 0,2203463759
y [6, 1] = 0,3225773040
y [7, 1] = 0,4452677524
y [8, 1] = 0,5882688493
y [9, 1] = 0,7514239269
y [10, 1] = 0,9345668725



Примечания:

1. Аллер М. Эффективный потенциал воды при высыхании почвы // Термодинамика почвенной влаги. Л.: Гидрометиздат. 1966. С. 325–360.
2. Культербаев Х.П., Шхануков М.Х. Прогноз уровня грунтовых вод в стохастических условиях // Отчет о НИР по теме «Прогнозирование уровневого и солевого режимов грунтовых вод в пово-грунтах». Кн. 5. КБГУ. 1977. 113 с.
3. Темботова М.М. Определение статистических свойств решения уравнения Аллера // Сборник научных работ КБГУ. Нальчик, 1999. С. 22–24.
4. Темботова М.М. Стохастическая модель одномерного неустановившегося движения грунтовых вод // Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики: сб. науч. тр. / Ин-т математики НАН Украины. Киев, 1997. С. 254–255.
5. Роде А.А. Основы учения о почвенной влаге. Л.: Гидрометиздат, 1965. 664 с.
6. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.
7. Янгарбер В.А. Сеточная схема для решения модифицированного уравнения влагопереноса // Доклады ВАСХНИЛ. 1966. № 8. С. 46–48.

References:

1. Aller M. Effective potential of water when the soil dries // Thermodynamics of soil moisture. L.: Hydrometizdat, 1966. P. 325–360.
2. Kulterbaev Kh.P., Shkhanukov M.Kh. Forecasting the groundwater level in stochastic conditions // Report on the research work on the topic “Forecasting the level and salt regime of groundwater in soils”. Book 5. Kabardino-Balkarian State University. 1977. 113 pp.
3. Tembotova M.M. Determination of the statistical properties of the solution of the equation of Aller // Collection of proceedings of KBSU. Nalchik, 1999. P. 22–24.
4. Tembotova M.M. Stochastic model of one-dimensional unsteady movement of groundwater // Nonlinear problems of differential equations and mathematical physics: collection of proceedings / Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. Kiev, 1997. P. 254–255.
5. Rode A.A. Fundamentals of the theory of soil moisture. L.: Hydrometizdat, 1965. 664 pp.
6. Samarsky A.A. Introduction to the theory of difference schemes. M.: Nauka, 1971. 553 pp.
7. Yangarber V.A. Grid scheme for solving the modified equation of moisture transfer // Reports of VASKhNIL. 1966. No. 8. P. 46–48.