

Ф И З И К А P H Y S I C S

УДК 517.958
ББК 22.161.62
Б 72

Бобылев Юрий Владимирович

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, Тула, тел. (4872) 568915, e-mail: bobylev.yu@mail.ru

Грибков Александр Иванович

Кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей и теоретической физики Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, Тула, тел. (4872) 657829, e-mail: ks7a@yandex.ru

Романов Роман Васильевич

Кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей и теоретической физики Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, Тула, тел. (4872) 657829, e-mail: rom_rom_yas@mail.ru

К аналитической теории движения электролита в стационарном магнитном поле (Рецензирована)

Аннотация. Получено аналитическое решение, описывающее стационарное движение электролита в магнитном поле для случая декартовой геометрии системы с учетом взаимодействия свободной поверхности электролита с воздухом. Сравнение результатов теории и натурального эксперимента показало, что влияние воздуха на движение электролита оказывается весьма незначительным и для достижения большего согласия необходимо использовать методы численного моделирования при соответствующей более общей постановке задачи.

Ключевые слова: магнитное поле, электролит, аналитическая теория, математическое моделирование, натуральный эксперимент.

Bobylev Yuriy Vladimirovich

Doctor of Physics and Mathematics, Professor of General and Theoretical Physics Department, Tula State Pedagogical University named after Lev Tolstoy, Tula, ph. (4872) 568915, e-mail: bobylev.yu@mail.ru

Gribkov Aleksandr Ivanovich

Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of General and Theoretical Physics Department, Tula State Pedagogical University named after Lev Tolstoy, Tula, ph. (4872) 568915, e-mail: ks7a@yandex.ru

Romanov Roman Vasilyevich

Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of General and Theoretical Physics Department, Tula State Pedagogical University named after Lev Tolstoy, Tula, ph. (4872) 568915, e-mail: rom_rom_yas@mail.ru

On the analytical theory of the electrolyte motion in a stationary magnetic field

Abstract. We have obtained the analytical solution describing the stationary motion of electrolyte in magnetic field for a case of the Cartesian geometry of system taking into account interaction of a free surface of electrolyte with air. Comparison of the results of the theory and a field experiment shows that influence of air on the movement of electrolyte is very small and in order to achieve greater agreement it is necessary to use methods of numerical modeling with the corresponding more general statement of the problem.

Keywords: magnetic field, electrolyte, analytical theory, mathematic simulation, natural experiment.

1. В ряде предыдущих публикаций (например, [1, 2]) были описаны выполненные авторами натурные эксперименты по движению электролита в магнитном поле. Эти опыты представляют собой различные варианты демонстраций по движению заряженных частиц в магнитном поле и действию силы Лоренца в микромасштабе или силы Ампера в макромасштабе. С качественной точки зрения они имеют достаточно простое объяснение и могут быть использованы при изучении специальных углубленных курсов физики, например «Магнитная гидродинамика». Однако количественное описание данных опытов в наиболее общей по-

становке представляет собой весьма сложную задачу магнитной гидродинамики, и, насколько нам известно, в законченном виде практически нигде не приводится. Получение же, помимо численных, еще и аналитических решений возможно лишь при наложении ряда упрощающих предположений. Так, например, в [2] жидкость считалась несжимаемой, а ее движение – установившимся и изотермическим. Сравнение полученных в данной работе аналитических решений с результатами реального эксперимента показало, что расчетные величины во всех случаях оказались завышены на 50÷100%.

Заметим, что такие результаты, вообще говоря, следует признать вполне удовлетворительными, поскольку используемые для возможности получения аналитического решения упрощающие условия были достаточно сильными. Одним из таких условий, примененных в [2], явилось наличие у электролита свободной границы, что выразилось в постановке на ней соответствующих упрощенных граничных условий. Ясно, что поскольку реально мы имеем дело не со свободной поверхностью, а с границей электролит-воздух, то при использовании данного условия допускается определенная погрешность. Сколь значительной является эта погрешность, мы и предполагаем выяснить в настоящей работе. При этом для упрощения вычислений, в отличие от используемого в [2] соответствующего реальному эксперименту цилиндрически симметричного ламинарного вращения электролита, будем рассматривать движение электролита, обладающего декартовой симметрией, а именно, будем исходить из следующей модели.

2. Электролит толщиной b движется с постоянной скоростью \vec{v} в бесконечно протяженном (вдоль оси OY) желобе шириной $2a$, бесконечной высоты, помещенном во внешнее вертикальное магнитное поле с индукцией \vec{B} . Начало координат выберем на поверхности электролита (рис. 1). Считаем, что желоб при $Z < 0$ заполнен воздухом.

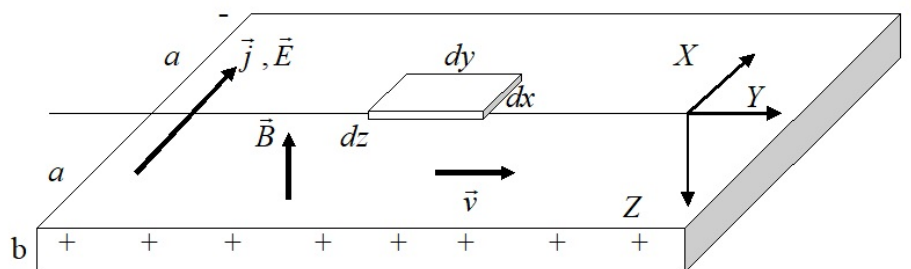


Рис. 1. Используемая модель эксперимента

Полагая, как и ранее, что электролит представляет собой несжимаемую жидкость, движение которой является установившимся ламинарным и изотермическим, выделим в нем элемент объема $dV = dxdydz$ (рис. 1) и составим его уравнение движения. Со стороны магнитного поля на данный элемент будет действовать сила Ампера (на рисунке не показана), величина которой

$$dF_A = \left[\vec{j}, \vec{B} \right] dV = jB dxdydz = \frac{IB}{lb} dxdydz. \quad (1)$$

На поверхности элемента со стороны окружающих слоев электролита будут действовать силы трения:

- на боковые поверхности

$$dF_1 = \eta_1 \left. \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} \right|_{x+dx} dS_1 - \eta_1 \left. \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} \right|_x dS_1 = \eta_1 \frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial x^2} dxdydz, \quad (2)$$

где η_1 – вязкость электролита, $v_{1y} = v_{1y}(x, z)$ – его скорость, а $dS_1 = dydz$ – площадь поверхности элемента, параллельная боковым стенкам желоба;

- на нижнюю и верхнюю поверхности

$$dF_2 = \eta_1 \left. \frac{\partial v_{1y}}{\partial z} \right|_{x+dx} dS_2 - \eta_1 \left. \frac{\partial v_{1y}}{\partial z} \right|_x dS_2 = \eta_1 \frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial z^2} dzdxdy, \quad (3)$$

где $dS_2 = dxdy$ – площадь элемента поверхности соприкасающихся слоев, параллельных дну.

При стационарном течении жидкости объемная сила (1) должна уравниваться поверхностными силами сопротивления (2) и (3). Приравнявая данные выражения, получаем следующее уравнение движения электролита:

$$\frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial z^2} = -k, \quad (4)$$

где

$$k = \frac{jB}{\eta_1} = \frac{IB}{\eta_1 lb}. \quad (5)$$

Знак «минус» в (4) учитывает тот факт, что скорость электролита убывает от оси OY по направлению к границам желоба, и поэтому частные производные, входящие в (2) и (3), оказываются отрицательными.

Поскольку стационарное движение слоев воздуха над электролитом совершается только вследствие действия сил трения, то оно будет подчиняться уравнению (4) с нулевой правой частью в силу отсутствия тока, так как в соответствии с (5) $k = 0$,

$$\frac{\partial^2 v_{2y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{2y}}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

Заметим, что уравнения движения (4) и (6) можно было бы получить, используя для этого более общий подход, исходя из уравнения Навье-Стокса, описывающего движение вязкой жидкости [3, с. 73]:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right) = \eta \Delta \vec{v} + \frac{d\vec{F}}{dV} - \nabla p, \quad (7)$$

где Δ – оператор Лапласа, \vec{v} – векторное поле скоростей, $d\vec{F}$ – векторное поле массовых сил (для электролита – силы Ампера (1)). Записав (7) в проекции на ось OY , с учетом отсутствия градиента давления, имеем:

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \eta \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + [\vec{j}, \vec{B}]_y.$$

Учитывая также, что $v_x = v_z = 0$ и $\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$, сразу получаем уравнения (4) и (6).

Уравнения движения (4) и (6) нужно дополнить граничными условиями, выражающими поведение частиц жидкости и воздуха на границах соответствующих областей пространства:

$$\begin{aligned} v_{1y}|_{x=\pm a} = 0, \quad v_{1y}|_{z=b} = 0, \quad v_{2y}|_{x=\pm a} = 0, \quad v_{2y}|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \\ v_{1y}|_{z=0} = v_{2y}|_{z=0}, \quad \eta_1 \frac{\partial v_{1y}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \eta_2 \frac{\partial v_{2y}}{\partial z} \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Смысл первых трех условий в (8) заключается в том, что как частицы жидкости, так и частицы воздуха прилипают к боковым стенкам и дну желоба и потому не движутся. Четвертое условие в (8) говорит о том, что далеко от поверхности электролита движение воздуха отсутствует, то есть его слои постепенно перестают увлекаться электролитом. Последние же два условия в (8) выражают равенство скоростей частиц электролита и воздуха, а также сил трения на поверхности контакта этих двух сред.

3. Таким образом, задачей является решение системы уравнений (4) и (6) с дополнительными условиями (8). Рассмотрим вначале уравнение (6), а также соответствующее однородное уравнение (4). Их решение можно искать в соответствии с общей схемой метода разделения переменных в виде произведения

$$v_{1,2y}(x, z) = f(x)g(z), \quad (9)$$

подстановка которого в эти уравнения и в первое и третье условия в (8) дает для функции $f(x)$ следующее дифференциальное уравнение и граничные условия:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda^2 f = 0, \quad f|_{x=\pm a} = 0. \quad (10)$$

Общее решение данного уравнения, как известно, дается выражением

$$f(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x), \quad (11)$$

подстановка которого в граничные условия в (10), с учетом симметрии задачи, позволяет определить константу разделения (собственные значения) $\lambda_n = \frac{\pi}{2a}(2n+1)$, а также собственные функции ($C_2=0$) $f_n(x) = \cos(\lambda_n x)$ (где $n=0,1,2,\dots$) граничной задачи (10).

Дальнейшая реализация метода разделения переменных заключается в представлении, в соответствие с (9), искомой функции в виде ряда по только что найденным собственным функциям:

$$v_{1,2}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{1,2}(z) \cos(\lambda_n x), \quad (12)$$

где $g_{1,2}(z)$ – функции, подлежащие дальнейшему определению. Подстановка (12) во второе и четвертое условия в (8) дает для этих функций граничные условия:

$$g_{1n}(z)|_{z=b} = 0, \quad g_{2n}(z)|_{z \rightarrow -\infty} = 0. \quad (13)$$

Поскольку уравнение движения электролита (4) является неоднородным, для определения функций $g_{1n}(z)$ нужно помимо разложений самих искомым функций (12) также разложить по собственным функциям $f_n(x) = \cos(\lambda_n x)$ и правую часть данного уравнения. Это разложение сводится фактически к разложению единицы:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\lambda_n x), \quad A_n = \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)}. \quad (14)$$

Подстановка (12) и (14) в (4) дает для определения $g_{1n}(z)$ следующее неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 g_{1n}}{dz^2} - \lambda_n^2 g_{1n} = -kA_n, \quad (15)$$

частное решение которого может быть найдено методом подбора по правой части

$$g_{1n}(z) = C_{3n} \exp(\lambda_n z) + C_{4n} \exp(-\lambda_n z) + k \frac{16}{\pi^3} a^2 \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \quad (16)$$

Аналогичное выражение получается и для функций $g_{2n}(z)$ при подстановке (12) в (6) и решении соответствующего однородного обыкновенного дифференциального уравнения

$$g_{2n}(z) = C_{5n} \exp(\lambda_n z) + C_{6n} \exp(-\lambda_n z), \quad (17)$$

Для определения постоянных $C_{3n}, C_{4n}, C_{5n}, C_{6n}$ в формулах (16) и (17), помимо граничных условий (13), нужно использовать условия сшивки решений (пятое и шестое условия в (8)), которые при подстановке в них формул (16) и (17) запишутся в таком виде:

$$C_{3n} + C_{4n} + k \frac{16}{\pi^3} a^2 \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = C_{5n} + C_{6n}, \quad \eta_1 [C_{3n} - C_{4n}] = \eta_2 [C_{5n} - C_{6n}]. \quad (18)$$

Опуская довольно громоздкую процедуру расчета постоянных $C_{3n}, C_{4n}, C_{5n}, C_{6n}$ с помощью граничных условий (13) и (18), приведем сразу окончательный результат:

$$C_{3n} = -\frac{C_{4n} \exp(-\lambda_n b) + 1}{\exp(\lambda_n b)}, \quad C_{5n} = \frac{\eta_1 [ch(\lambda_n b) - 1]}{\eta_1 ch(\lambda_n b) + \eta_2 ch(\lambda_n b)}, \quad (19)$$

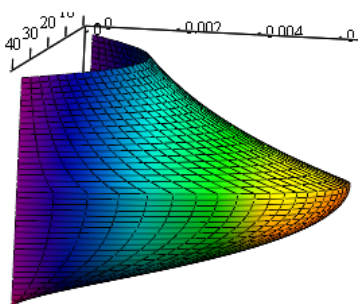
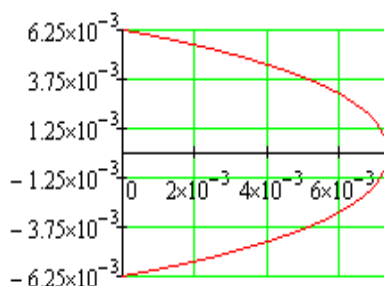
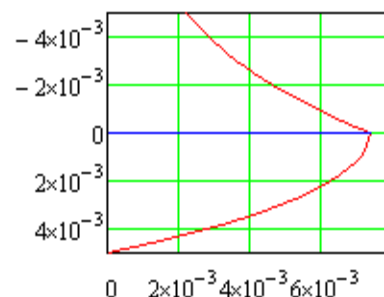
$$C_{4n} = -\frac{1}{2} \frac{\eta_1 + \eta_2 [\exp(\lambda_n b) - 1]}{\eta_1 ch(\lambda_n b) + \eta_2 ch(\lambda_n b)}, \quad C_{6n} = 0.$$

Здесь $ch(\lambda_n b)$ – гиперболические косинусы. Сами же решения уравнений движения электролита и воздуха (12) с учетом (16) и (17) запишутся в виде:

$$v_{1y}(x, z) = k \frac{16}{\pi^3} a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} [C_{3n} \exp(\lambda_n z) + C_{4n} \exp(-\lambda_n z) + 1] \cos(\lambda_n x),$$

$$v_{2y}(x, z) = k \frac{16}{\pi^3} a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} C_{5n} \exp(\lambda_n z) \cos(\lambda_n x).$$
(20)

4. Расчеты и построения сечений графиков функций (20) проводились в приложении PTC MathCad, и их примеры приведены на представленных ниже рисунках. На рисунке 2 представлен трехмерный график зависимости $v_{1,2y} = v_{1,2y}(x, z)$, а на рисунках 3 и 4 – сечения этого графика горизонтальной (по границе раздела воздух-электролит) и вертикальной (по оси желоба) плоскостями соответственно.

Рис. 2 Зависимость $v_y(x, z)$ Рис. 3 Зависимость $v_y(x, 0)$ Рис. 4. Зависимость $v_y(0, z)$

Анализ данных расчетов относительно степени влияния воздуха на движение электролита показал, что его действие оказывается весьма незначительным. Так, разница в скорости электролита на оси желоба по сравнению с вакуумной границей составила всего около 3%. Такой результат дает основание полагать, что учет трения электролита о воздух при его вращательном движении в магнитном поле [2] также лишь незначительно приблизит аналитические решения к результатам реального эксперимента.

Для достижения же большей корреляции результатов теоретического описания и натурального эксперимента, скорее всего, нужно использовать численные решения уравнений магнитной гидродинамики в наиболее общей постановке рассматриваемой задачи.

Примечания:

1. Бобылев Ю.В., Грибков А.И., Романов Р.В. Демонстрация и моделирование движения заряженных частиц в магнитном и электрическом полях // Информационно-коммуникационные технологии преподавателя физики и преподавателя технологии: сб. материалов Десятой Всерос. науч.-практ. конф. / отв. ред. Е.А. Смирнова. Коломна: Гос. социально-гуманит. ун-т, 2017. С. 11–14.
2. Бобылев Ю.В., Грибков А.И., Романов Р.В. Натурный эксперимент по вращению электролита в электрическом и магнитном полях и его аналитическое описание // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2018. Вып. 1 (216). С. 59–65. URL: <http://vestnik.adygnet.ru>
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов: в 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 5-е изд., стер. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 736 с. URL: <http://bookre.org/reader?file=451221&pg=76>

References:

1. Bobylev Yu.V., Gribkov A.I., Romanov R.V. Demonstration and modeling of the motion of charged particles in magnetic and electric fields // Information-communication technologies of the teacher of physics and the teacher of technology: coll. of proceedings of the Tenth Russian scient. and pract. conf. / the executive editor is E.A. Smirnova. Kolomna: the State Social and Humanitarian University, No. 2017. P. 11–14.
2. Bobylev Yu.V., Gribkov A.I., Romanov R.V. Field experiment on the rotation of the electrolyte in the electric and magnetic fields and its analytical description // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2018. Iss. 1 (216). P. 59–65. URL: <http://vestnik.adygnet.ru>
3. Landau L.D., Lifshitz E.M. Theoretical physics: a manual for higher schools: in 10 vol. Vol. VI. Hydrodynamics. 5th ed., ster. M.: FIZMATLIT, 2001. 736 pp. URL: <http://bookre.org/reader?file=451221&pg=76>