УДК 517.956.6
ББК 22.161.626
Б 20

Балкизов Жираслан Анатольевич
Кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела уравнений смешанного типа института прикладной математики и автоматизации, филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Нальчик, тел. (8866) 2426611, e-mail: Giraslan@yandex.ru

Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка с условием производной от смещения в области гиперболичности

(Рецензирована)

Аннотация. *Исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка с волновым оператором в области гиперболичности, когда в качестве граничного условия задана линейная комбинация с переменными коэффициентами производных от значений искомой функции на обеих характеристиках. Доказаны теоремы о существовании и единственности регулярного решения исследуемой задачи. В случае, когда коэффициенты, входящие в исследуемую задачу, являются постоянными действительными числами, решение выписано в явном виде.*

Ключевые слова*: краевая задача со смещением, уравнение смешанного параболо-гиперболического типа, существование и единственность решения задачи.*

Balkizov Zhiraslan Anatolyevich
Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher of the Department of Mixed Type Equations of Institute of Applied Mathematics and Automation, Branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Nalchik, ph. (8866) 2426611, e-mail: Giraslan@yandex.ru

On one boundary-value problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type of the second order under condition of a displacement derivative in the field of hyperbolicity

Abstract*. In this paper we investigate a boundary-value problem with a displacement for a nonhomogeneous equation of a mixed parabolic-hyperbolic type of the second order with a wave operator in the hyperbolic part of domain, where a linear combination with variable coefficients of the derivatives of the values of the desired function on both characteristics is given as the boundary condition. Theorems on the existence and uniqueness of a regular solution of the problem are proved. In the case when the coefficients entering the problem under investigation are constant real numbers, the solution is written out in explicit form.*

Keywords*: boundary-value problem with displacement, equation of mixed parabolic-hyperbolic type, existence and uniqueness of the solution of the problem.*

Введение

В монографии [1] отмечено, что проблема поиска корректных краевых задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях, когда поверхность параболического вырождения является пространственно ориентированной, приводит к краевым задачам со смещением. Впервые задача со смещением в гиперболической части области для уравнения Лаврентьева-Бицадзе была сформулирована и исследована в работе [2]. В работах [3], [4] были введены понятие краевой задачи со смещением и исследован ряд нелокальных краевых задач с разными смещениями для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. В отличие от задачи Трикоми в задачах со смещением задается нелокальное условие, связывающее значение искомого решения или его производной, вообще говоря, дробного порядка, в трех точках, две из которых лежат на граничных характеристиках из разных семейств, а третья – на линии вырождения уравнения.

Частными случаями задач со смещением являются такие нелокальные задачи, как задача Бицадзе-Самарского, задача Дезина, задача Карлемана, задача Стеклова, задача Франкля и т.д. В настоящее время исследованию краевых задач со смещением для различных типов и различных порядков уравнений уделяют внимание много авторов. В первую очередь это связано с применением их при исследовании задач биологической синергетики, трансзвуковой газовой динамики. Подобные граничные условия возникают также при изучении вопросов

тепло- и массообмена в капиллярно-пористых средах, при математическом моделировании задач газовой динамики и нелокальных физических процессов, при изучении процессов размножения клеток, в теории распространения электромагнитного поля в неоднородной среде [5–7]. Достаточно полная библиография научных работ, посвященных исследованиям краевых задач со смещениями, приведена в монографиях [1, 8–9], а также в диссертациях [10–11].

В данной работе исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка с волновым оператором в области гиперболичности, когда в качестве граничного условия задана линейная комбинация с переменными коэффициентами производных от значений искомой функции на обеих характеристиках. Доказаны теоремы о существовании и единственности регулярного решения исследуемой задачи. В случае, когда коэффициенты, входящие в исследуемую задачу, являются постоянными действительными числами, решение выписано в явном виде. Среди работ, близко примыкающих к исследуемой, отметим работы [12–14].

Постановка задачи

На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$f = \begin{cases} u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \\ u_{xx} - u_{y}, & y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $f = f(x,y)$ – заданная функция, $u = u(x,y)$ – искомая функция.

Уравнение (1) при $y > 0$ совпадает с уравнением теплопроводности

$$u_{xx} - u_{y} = f, \tag{2}$$

а при $y < 0$ совпадает с неоднородным волновым уравнением

$$u_{xx} - u_{yy} = f. \tag{3}$$

Уравнение (1) рассматривается в области Ω, ограниченной характеристиками $AC: x + y = 0$ и $CB: x - y = r$ уравнения (3) при $y < 0$, выходящими из точки $C = (r/2, -r/2)$ и проходящими через точки $A = (0,0)$ и $B = (r,0)$, соответственно, а также прямоугольником с вершинами в точках A, B, $A_0 = (0,h)$, $B_0 = (r,h)$, $h > 0$, при $y > 0$. Обозначим $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $J = \{(x,0): 0 < x < r\}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$ и будем считать, что $f \in C(\overline{\Omega})$.

Регулярным в области Ω *решением* уравнения (1) назовем функцию $u = u(x,y)$ из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1) \cap C_x^2(\Omega_2)$, u_x, $u_y \in L_1(J)$, удовлетворяющую уравнению (1).

В работе исследуется следующая задача.

Задача 1. *Найти регулярное в области* Ω *решение* $u = u(x,y)$ *уравнения* (1) *из класса* $C^1(\overline{\Omega}_1)$, *удовлетворяющее условиям:*

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(r,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y < h, \tag{4}$$

$$\alpha(x)\frac{d}{dx}u[\theta_0(x)] + \beta(x)\frac{d}{dx}u[\theta_r(x)] = \psi(x), \quad 0 \le x \le r, \tag{5}$$

где $\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}; -\frac{x}{2}\right)$, $\theta_r(x) = \left(\frac{x+r}{2}; \frac{x-r}{2}\right)$ – *аффиксы точек пересечения характеристик уравнения* (3)*, выходящих из точки* $(x,0)$ *с характеристиками* AC *и* BC *соответственно;* $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y) \in C[0,h]$; $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\psi(x) \in C^1[0,r] \cap C^2]0,r[$ – *заданные функции, причем* $\alpha^2(x) + \beta^2(x) \ne 0$.

Теорема единственности

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть относительно коэффициентов* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *выполнено одно из следующих условий:*

$$\beta(x)\neq 0 \quad и \quad \left[\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right]'\geq 0 \qquad \forall\, x\in[0,r], \tag{6}$$

$$\alpha(x)\neq 0 \quad и \quad \left[\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right]'\leq 0 \qquad \forall\, x\in[0,r], \tag{7}$$

Тогда задача 1 *не может иметь более одного регулярного в области* Ω *решения*.

Доказательство. Пусть существует решение задачи 1 и пусть

$$u(x,0)=\tau(x), \quad 0\leq x\leq r; \quad u_y(x,0)=\nu(x), \quad 0<x<r. \tag{8}$$

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y\to+0$, с учетом обозначений (8) получим первое фундаментальное соотношения между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из параболической части Ω_2 области Ω на линию $y=0$:

$$\nu(x)=\tau''(x)+f(x,0), \tag{9}$$

а из (4) с учетом (8) при предельном переходе при $y\to+0$ имеем

$$\tau(0)=\varphi_1(0), \quad \tau(r)=\varphi_2(0). \tag{10}$$

Найдем теперь фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_1 области Ω на линию изменения типа $y=0$.

Решение задачи (8) для уравнения (3) в области Ω_1 дается по формуле Даламбера [15, с. 59]:

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu(s)ds+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}\int\limits_{x-y+t}^{x+y-t}f(s,t)ds\,dt. \tag{11}$$

Из формулы (11) находим:

$$\frac{d}{dx}u[\theta_0(x)]=\frac{1}{2}\left(\tau'(x)-\nu(x)+\int\limits_{-x/2}^{0}f(x+t,t)dt\right),$$

$$\frac{d}{dx}u[\theta_r(x)]=\frac{1}{2}\left(\tau'(x)+\nu(x)-\int\limits_{(x-r)/2}^{0}f(x-t,t)dt\right),$$

при подстановке которых в условие (5) приходим к равенству:

$$[\beta(x)+\alpha(x)]\tau'(x)+[\beta(x)-\alpha(x)]\nu(x)=2\psi(x)-\alpha(x)\int\limits_{-x/2}^{0}f(x+t,t)dt+\beta(x)\int\limits_{(x-r)/2}^{0}f(x-t,t)dt. \tag{12}$$

Формула (12) и есть искомое фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_1 области Ω на линию изменения типа $y=0$.

При $\alpha(x)\equiv\beta(x)$ $\forall\, x\in[0,r]$ из (12) приходим к равенству

$$\tau'(x)=\frac{\psi(x)}{\alpha(x)}-\frac{1}{2}\int\limits_{-x/2}^{0}f(x+t,t)dt+\frac{1}{2}\int\limits_{(x-r)/2}^{0}f(x-t,t)dt,$$

откуда с учетом (9), (10) находим

$$\tau(x)=\varphi_1(0)+\int\limits_{0}^{x}\frac{\psi(t)}{\alpha(t)}dt-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{-t/2}^{0}f(t+s,s)dsdt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{(t-r)/2}^{0}f(t-s,s)dsdt, \tag{13}$$

причем должно быть выполнено условие согласования

$$\int\limits_{0}^{r}\frac{\psi(t)}{\alpha(t)}dt-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{r}\int\limits_{-t/2}^{0}f(t+s,s)dsdt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{r}\int\limits_{(t-r)/2}^{0}f(t-s,s)dsdt=\varphi_2(0)-\varphi_1(0).$$

Из (13) и (9) заключаем, что

$$\nu(x)=\left[\frac{\psi(x)}{\alpha(x)}\right]'-\frac{1}{4}f[\theta_0(x)]-\frac{1}{4}f[\theta_r(x)]+f(x,0). \tag{14}$$

Если $\alpha(x)\equiv-\beta(x)\ \ \forall\ x\in[0,r]$, то из соотношений (9), (10) и (12) имеем:

$$\tau(x)=\left(1-\frac{x}{r}\right)\varphi_1(0)+\frac{x}{r}\varphi_2(0)+\frac{x}{r}\int_0^r(r-t)f(t,0)dt-\int_0^x(x-t)f(t,0)dt+$$

$$+\frac{x}{r}\int_0^r(r-t)\frac{\psi(t)}{\alpha(t)}dt-\int_0^x(x-t)\frac{\psi(t)}{\alpha(t)}dt-\frac{x}{2r}\int_0^r(r-t)\int_{-t/2}^0 f(t+s,s)ds\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)\int_{-t/2}^0 f(t+s,s)ds\,dt-\frac{x}{2r}\int_0^r(r-t)\int_{(t-r)/2}^0 f(t-s,s)ds\,dt+\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)\int_{(t-r)/2}^0 f(t-s,s)ds\,dt, \tag{15}$$

$$\nu(x)=-\frac{\psi(x)}{\alpha(x)}+\frac{1}{2}\int_{-x/2}^0 f(x+t,t)dt+\frac{1}{2}\int_{(x-r)/2}^0 f(x-t,t)dt. \tag{16}$$

Если же $\alpha(x)\neq\pm\beta(x)$, то из (12) приходим к равенству:

$$\nu(x)=\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\tau'(x)-\frac{2\psi(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}+\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\int_{-x/2}^0 f(x+t,t)dt-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\int_{(x-r)/2}^0 f(x-t,t)dt. \tag{17}$$

Рассмотрим однородную задачу, соответствующую задаче 1, то есть положим $\varphi_i(y)\equiv 0,\ \left(i=\overline{1,3}\right)\ \forall\ y\in[0,h];\ \ \psi(x)\equiv 0,\ \forall\ x\in[0,r];\ \ f(x,y)\equiv 0\ \ \forall(x,y)\in\overline{\Omega}$. При $\alpha(x)\equiv\pm\beta(x)$ из равенств (13), (14), (15) и (16) сразу следует, что $\tau(x)=\nu(x)\equiv 0\ \ \ \forall\ x\in[0,r]$.

Пусть теперь $\alpha(x)\neq\pm\beta(x)$. Рассмотрим интеграл

$$J^*=\int_0^r\tau(x)\nu(x)dx.$$

Из соотношения (9) с учетом (10) получаем, что

$$J^*=\int_0^r\tau(x)\tau''(x)dx=-\int_0^r[\tau'(x)]^2\,dx\le 0, \tag{18}$$

а из (17) при условии (6) имеем

$$J^*=\int_0^r\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\tau(x)\tau'(x)dx=\int_0^r\left[\frac{\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right]^2\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)'\tau^2(x)dx\ge 0 \tag{19}$$

или

$$J^*=\int_0^r\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\tau(x)\tau'(x)dx=-\int_0^r\left[\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right]^2\left(\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)'\tau^2(x)dx\ge 0 \tag{20}$$

при условии (7).

Из неравенств (18) и (19) (или из (18) и (20)) вытекает равенство $J^*=0$, которое, как следует из (18) и (10), может иметь место в том и только в том случае, когда $\tau(x)\equiv 0$. При этом из (9) и (17) видно, что и $\nu(x)\equiv 0$.

Таким образом, показано, что при выполнении условий (6) или (7) теоремы 1 функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ будут тождественно равны нулю для соответствующей задаче 1 однородной задачи. При этом из формулы (11) сразу следует, что $u(x,y)\equiv 0$ в области $\overline{\Omega}_1$. А в области Ω_2 приходим к задаче нахождения решения однородного уравнения (2), удовлетворяющего однородному начальному условию $u(x,0)=\tau(x)\ \ (0\le x\le r)$ и однородным граничным условиям $u(0,y)=0$, $u(r,y)=0\ \ (0\le y\le h)$, которая, как известно, имеет только тривиальное

решение $u(x,y)\equiv 0 \ \ \forall (x,y)\in \overline{\Omega}_2$. Таким образом, решение $u(x,y)$ однородной задачи, соответствующей исследуемой задаче 1, тождественно равно нулю во всей области $\overline{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

Теорема существования

Справедлива

Теорема 2. *Пусть относительно коэффициентов* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *выполнено одно из условий* (6) *или* (7). *Тогда решение задачи* 1 *существует*.

Доказательство. Выше по формулам (13), (14), (15), (16) были найдены значения функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ при $\alpha(x)\equiv\pm\beta(x)$ $(0\le x\le r)$. Пусть теперь $\alpha(x)\ne\pm\beta(x)$ $(0\le x\le r)$. Из соотношений (9) и (17) приходим к задаче нахождения решения уравнения

$$\tau''(x)-\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\tau'(x)=-f(x,0)-\frac{2\psi(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}+$$

$$+\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\int\limits_{-x/2}^{0}f(x+t,t)dt-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\int\limits_{(x-r)/2}^{0}f(x-t,t)dt\,, \qquad (21)$$

удовлетворяющего условиям (10).

Решение задачи (21), (10) эквивалентно решению интегрального уравнения вида

$$\tau(x)+\int\limits_0^r K(x,t)\tau(t)dt=\frac{r-x}{r}\varphi_1(0)+\frac{x}{r}\varphi_2(0)+\int\limits_0^x(x-t)F(t)dt-\frac{x}{r}\int\limits_0^r(r-t)F(t)dt\,, \qquad (22)$$

где

$$K(x,t)=\frac{1}{r}\begin{cases}x\left[p(t)-(r-t)p'(t)\right], & 0\le x\le t,\\ (x-r)\left[t\,p(t)\right]', & t\le x\le r;\end{cases}\qquad p(x)=\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)};$$

$$F(x)=\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\int\limits_{-x/2}^{0}f(x+t,t)dt-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\int\limits_{(x-r)/2}^{0}f(x-t,t)dt-f(x,0)-\frac{2\psi(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}.$$

Из свойств заданных функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_i(y)$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$ и $f(x,y)$ заключаем, что уравнение (22) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром $K(x,t)\in L_2([0,r]\times[0,r])$ и с правой частью $F(x)$ из класса $C^1[0,r]$. Однозначная и безусловная разрешимость уравнения (22) вытекает из единственности решения задачи 1, причем решение $\tau=\tau(x)$ будет принадлежать классу $C[0,r]\cap C^2(0,r)$. По найденному значению $\tau=\tau(x)$ из (9) или (17) можно найти и функцию $\nu=\nu(x)$.

В случае, когда $\alpha(x)=\alpha=\text{const}$, $\beta(x)=\beta=\text{const}$, решение задачи (21), (10) выписывается в явном виде по формуле:

$$\tau(x)=\frac{e^{px}-e^{pr}}{1-e^{pr}}\varphi_1(0)+\frac{1-e^{px}}{1-e^{pr}}\varphi_2(0)+\frac{2}{\beta-\alpha}\int\limits_0^r G(x,t)\psi(t)dt-\int\limits_0^r G(x,t)f(t,0)dt+$$

$$+\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\int\limits_0^r G(x,t)\int\limits_{-t/2}^{0}f(t+s,s)dsdt-\frac{\beta}{\alpha-\beta}\int\limits_0^r G(x,t)\int\limits_{(t-r)/2}^{0}f(t-s,s)dsdt\,,$$

где

$$G(x,t)=\frac{1}{p\left(1-e^{pr}\right)}\begin{cases}\left(1-e^{px}\right)\left(1-e^{p(r-t)}\right), & 0\le x<t,\\ \left(1-e^{-pt}\right)\left(e^{pr}-e^{px}\right), & t<x\le r,\end{cases}\qquad p=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.$$

После того как функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ найдены, решение задачи 1 в области Ω_1 определяется как решение задачи (8) для уравнения (3) и выписывается по формуле (11), а в об-

ласти Ω_2 приходим к задаче нахождения регулярного решения первой краевой задачи для уравнения (2) с граничными условиями (4) и начальным условием $u(x,0)=\tau(x)$, решение которой выписано, например, в [5, с. 268].

Примечания:

1. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
2. Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на линии перехода // Ученые записки Казанского университета. 1962. Т. 122, кн. 3. С. 3–16.
3. Нахушев А.М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Доклады академии наук СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 736–739.
4. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
5. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
6. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Иностр. лит., 1961. 208 с.
7. Франкль Ф.И. Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева-Бицадзе // Вестник ЛГУ. Сер. Математика, механика и астрономия. Т. 6, № 11. С. 3–7.
8. Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: Изд-во Самарского филиала Саратовского ун-та, 1992. 162 с.
9. Нахушева З.А. Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: КБНЦ РАН, 2011. 196 с.
10. Нахушев А.М. К теории линейных краевых задач для гиперболических и смешанных уравнений второго порядка: дис. … д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1970. 172 с.
11. Жегалов В.И. Исследование краевых задач со смещением для уравнений смешанного типа: дис. … д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1988. 272 с.
12. Репин О.А. Нелокальная краевая задача для параболо-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 1. С. 173–176.
13. Килбас А.А., Репин О.А. Задача со смещением для параболо-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 799–805.
14. Мирсабуров М., Чориева С.Т. О задаче с тремя вариантами смещений для уравнения смешанного типа // Известия ВУЗов. Математика. 2016. № 4. С. 32–45.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

References:

1. Nakhushev A.M. Problems with displacement for partial differential equations. M.: Nauka, 2006. 287 pp.
2. Zhegalov V.I. A boundary-value problem for an equation of mixed type with boundary conditions on both characteristics and with discontinuities on the transition curve // Scientific Notes of Kazan University. 1962. Vol. 122, Book 3. P. 3–16.
3. Nakhushev A.M. A new boundary value problem for a certain degenerate hyperbolic equation // Reports of the USSR Akad. of sciences. 1969. Vol. 187, No. 4. P. 736–739.
4. Nakhushev A.M. Certain boundary value problems for hyperbolic equations and equations of mixed type // Differential Equations. 1969. Vol. 5, No. 1. P. 44–59.
5. Nakhushev A.M. Equations of Mathematical Biology. M.: Vyssh. Shk. 1995. 301 pp.
6. Bers L. Mathematical problems of subsonic and transonic gas dynamics. M.: Foreign Literature, 1961. 208 pp.
7. Frankl F.I. Two gas-dynamic applications of the boundary value problem of Lavrentiev-Bitsadze // Bulletin of Leningrad State University. Ser. Mathematics, Mechanics and Astronomy. Vol. 6, No. 11. P. 3–7.
8. Repin O.A. Boundary-value boundary-value problems for hyperbolic and mixed-type equations. Samara: Publishing House of the Samara Branch of the Saratov University, 1992. 162 pp.
9. Nakhusheva Z.A. Nonlocal boundary-value problems for basic and mixed types of differential equations. Nalchik: KBSC RAS, 2011. 196 pp.
10. Nakhushev A.M. To the theory of linear boundary value problems for hyperbolic and mixed second-order equations: Diss. for the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree. Novosibirsk, 1970. 172 pp.
11. Zhegalov V.I. Investigation of boundary-value problems with displacement for equations of mixed type: Diss. for the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree. Novosibirsk, 1988. 272 pp.
12. Repin O.A. A nonlocal boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a characteristic line of change of type // Differential Equations. 1992. Vol. 28, No. 1. P. 173–176.
13. Kilbas A.A., Repin O.A. A problem with a shift for a parabolic-hyperbolic equation // Differential Equations. 1998. Vol. 34, No. 6. P. 799–805.
14. Mirsaburov M., Chorieva S.T. On a problem with three variants of displacements for an equation of mixed type // News of Hihger Schools. Mathematics. 2016. No. 4. P. 32–45.
15. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of mathematical physics. M.: Nauka, 1977. 736 pp.