УДК 519.1
ББК 22.174.2
Б 18

Байчорова Асият Нерчуковна
Старший преподаватель кафедры математики Северо-Кавказской государственной гуманитарно-технологической академии, Черкесск, тел. (8782) 293582, e-mail: kochkarova-asya@mail.ru
Кочкаров Ахмат Магомедович
Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математики Северо-Кавказской государственной гуманитарно-технологической академии, Черкесск, тел. (8782) 293582, e-mail: ah-mat_kochkarov@mail.ru

Математическая модель развития структур предфрактальными деревьями*

(Рецензирована)

Аннотация. *В работе исследуются свойства центроида. Использование центроида и его свойств позволяет продуктивно подойти к вопросам перечисления деревьев, а также исследовать развитие простейших предфрактальных деревьев.*
Ключевые слова: *центроид, деревья, предфрактальные графы, объединения, участники.*

Baychorova Asiyat Nerchukovna
Senior Lecturer of Department of Mathematics, the North Caucasus State Academy of Humanities and Technology, Cherkessk, ph. (8782) 293582, e-mail: kochkarova-asya@mail.ru
Kochkarov Akhmat Magomedovich
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Mathematics, the North Caucasus State Academy of Humanities and Technology, Cherkessk, ph. (8782) 293582, e-mail: ah-mat_kochkarov@mail.ru

Mathematical model of development of structures of prefractal graphs by trees

Abstract. *This work examines the properties of a centrode. Use of a centrode and its properties allows us to productively approach issues of transfer of trees and also to investigate development of the simplest prefractal trees.*
Keywords: *centrodes, trees, prefractal columns, associations, participants.*

Введение

Рассмотрим одну любопытную процедуру, применяемую к данному дереву с целью определения центра дерева и его радиуса. Иногда ее называют процедурой обрезания висячих вершин, и она напоминает работу садовника, удаляющего сухие ветки с деревьев.

Процедура осуществляется пошагово и заключается в следующем: на первом шаге из данного дерева удаляются все его висячие вершины вместе с инцидентными им ребрами. На втором шаге уже из оставшегося дерева снова удаляются висячие вершины и т.д. Так как каждый шаг такой процедуры будет продуктивен вследствие того, что в любом дереве имеются по крайней мере две висячие вершины, то в результате за конечное число шагов от данного дерева останется либо одна вершина, либо одно ребро с двумя смежными вершинами. Нетрудно показать, что оставшаяся вершина или пара вершин и являются центром дерева. При этом в случае с одной вершиной значение радиуса дерева совпадет с числом шагов описанной процедуры, а в случае, когда на конечном этапе из дерева остается «ребро», для получения значения радиуса данного дерева к числу шагов необходимо прибавить единицу.

Однако в дереве существует вершина (или две вершины), являющаяся оптимальной сразу по нескольким критериям. Эта вершина является своеобразным «центром тяжести» дерева. В теории графов она получила название центроида. Исследованию свойств центроида и посвящена данная статья. Помимо этого использование центроида и его свойств позволяет продуктивно подойти к вопросам перечисления деревьев, а также исследовать развитие простейших предфрактальных деревьев [1].

* *Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-07-00231а.*

Постановка задачи

Рассмотрим некоторую сферу деятельности, например, определенную экономическую нишу (рынок), в которой функционирует k организаций (участников), структуры которых представляют собой центроидные корневые деревья [2–4]:

$$T_1(X_1,U_1),T_2(X_2,U_2),\ldots,T_k(X_k,U_k).$$

В этих деревьях центроид или одна из вершин центроида, в случае равновесного [5] предфрактального [6] дерева, выполняет роль центра управления, что вполне естественно, если структура каждого оптимизирована на минимальный баланс (или минимальный момент для дерева масс) своего дерева. В ходе конкурентной борьбы или из других соображений различные участники рынка могут объединяться в одну структуру, обеспечивая тем самым «развитие» своих структур.

Будем считать, что развитие данного рынка состоит из отдельных (дискретных) этапов объединения участников по следующим правилам:

1) каждый этап представляет собой объединение только двух участников, имеющих собственную структуру;

2) при этом объединение их структур происходит в соответствии с рассмотренной процедурой центроидного [7] объединения предфрактальных деревьев.

Второе правило вполне естественно, так как в этом случае объединение двух участников производится оптимальным образом, минимизируя баланс или момент новой объединенной структуры. Было бы странным, если бы объединение двух компаний происходило не через главные офисы, а через периферийные филиалы. В соответствии с принципом центроидного поглощения центром управления новой структуры становится центроид участника предфрактального дерева, которое представлено бóльшим количеством вершин (или бóльшей массой). Если количество вершин (или массы) участников объединения одинаково, то будем считать, что центром управления объединенной структуры (или корнем объединенного предфрактального дерева) становится любая из вершин, принадлежащая центроидам участников.

Через $k-1$ этапов получим единую структуру, представленную объединенным предфрактальным деревом $T(X,U)$, в котором $X=X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_k$ и $|X|=|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_k|$.

Для предфрактального дерева масс последнее соотношение будет в виде:

$$m(T)=m(T_1)+m(T_2)+\ldots+m(T_k).$$

Определение 1. Сценарием центроидного развития данных k предфрактальных деревьев будем называть любую последовательность $k-1$ этапов центроидного объединения этих предфрактальных деревьев [7].

Предположим, что все k участников представлены центроидными корневыми предфрактальными деревьями. Упорядочим участников, пронумеровав их в порядке возрастания числа вершин (или масс) соответствующих предфрактальных деревьев, то есть

$$|X_1|\le|X_2|\le\ldots\le|X_k|, \tag{1}$$

или для предфрактальных деревьев масс

$$m(T_1)\le m(T_2)\le\ldots\le m(T_k).$$

Нас будет интересовать вопрос, при каких значениях

$$\{|X_1|,|X_2|,\ldots,|X_k|\}\quad\text{или}\quad\{m(T_1),m(T_2),\ldots,m(T_k)\}$$

существует сценарий, при котором центроид данного участника может стать в результате реализации этого сценария корнем объединенного предфрактального дерева $T(X,U)$. Достаточно очевидно, что для первого участника, представленного предфрактальным деревом

$T_1(X_1,U_1)$, такого сценария не существует, если в (1) первое неравенство – строгое, так как при первом же объединении с его участником центроид этого дерева в соответствии с законом поглощения потеряет свое лидирующее положение.

С другой стороны, для последнего участника, представленного предфрактальным деревом $T_k(X_k,U_k)$ такой сценарий существует всегда, например, если он или объединенная структура, в которую влился этот участник, будет участвовать в каждом этапе объединения (то есть вести себя достаточно активно). При таком сценарии центроид k-го участника в соответствии с законом поглощения может оставаться в роли центроида после каждого этапа объединения вплоть до окончательного. Более того, если

$$|X_k| > \frac{|X|}{2},$$

центроид k-го участника при любом сценарии становится центроидом объединенного предфрактального дерева $T(X,U)$. Все это, безусловно, напоминает процессы, происходящие в акционерных обществах. Если существует акционер, владеющий пакетом, превышающим 50% акций, то никакой другой, даже объединившись со всеми остальными акционерами, не сможет получить контрольный пакет акций.

Итак, рассмотрим вопрос о принципиальной возможности стать лидером у k-го участника, где $1 \le l \le k-1$. Для k-го участника, как мы выяснили, такая возможность есть всегда.

Лемма 1. *Для того чтобы существовал сценарий, при котором центроид k-го участника стал центроидом результирующего предфрактального дерева $T(X,U)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{j} |X_i| \ge |X_{j+1}|, \forall j \ge l.$$

Доказательство. В этом результирующем предфрактальном дереве $T(X,U)$ выделим поддерево, вершинами которого являются центры управления (или корни соответствующих предфрактальных деревьев) участников. Ребрами такого предфрактального дерева будут ребра, появившиеся в результате поэтапного центроидного объединения участников. Таким образом, получим вершинное предфрактальное дерево с $k-1$ ребром, каждое из которых соответствует определенному этапу объединения. На рисунке 1 оно представлено утолщенными ребрами. Каждой вершине u_i предфрактального дерева центроидов присвоим массу $m(u_i) = |X_i|$ или $m(u_i) = m(T_i)$, равную числу вершин $k-1$ участка или его массе, как бы полагая, что вся масса сконцентрирована в его центроиде.

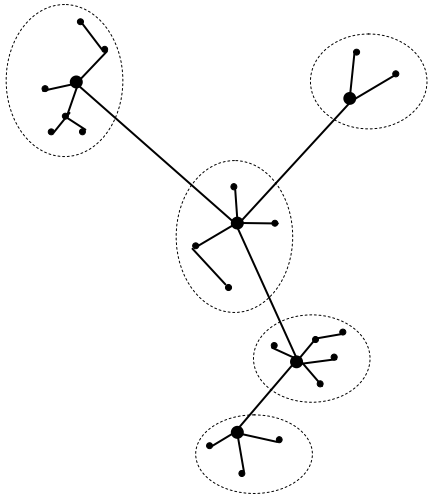

Рис. 1. Вершинное предфрактальное дерево с $k-1$ ребром

Полученное предфрактальное дерево масс будем называть предфрактальным деревом центроидов. Сразу обратим внимание на то, что не любое предфрактальное дерево масс, в свою очередь, может быть предфрактальным деревом центроидов. Так, на рисунке 2 представлен пример предфрактального дерева масс [8], не являющегося при этом предфрактальным деревом центроидов.

Действительно, возможны два варианта сценария развития событий. В первом сценарии сначала участник u объединяется с участником v и тогда центроидом промежуточного объединенного предфрактального дерева становится вершина u с массой, равной $m(u)+m(v)=4+2=6$, и дальнейшее объединение такого предфрактального дерева с вершиной w, в соответствии с законом центроидного объединения, соединяет ребром вершины u и w, а не w и v (рис. 2). Во втором – получим противоречие, если начнем с объединения участников v и w.

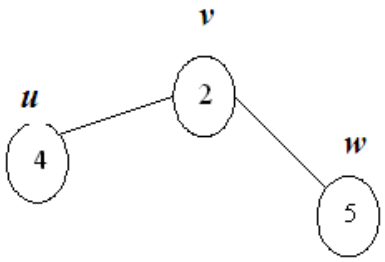

Рис. 2. Предфрактальное дерево масс, не являющееся предфрактальным деревом центроидов

Определение 2. Предфрактальное дерево масс является предфрактальным деревом центроидов, если существует сценарий объединения вершин, приводящий к данному предфрактальному дереву [9].

Определим критерий, при котором существует сценарий объединения, приводящий к данному предфрактальному дереву масс. Для этого введем ориентацию ребер: на каждом этапе объединения ребро, представляющее это объединение и соединяющее центроиды объединяющихся предфрактальных деревьев, будем ориентировать к центроиду, ставшему центроидом объединенного предфрактального дерева (рис. 3).

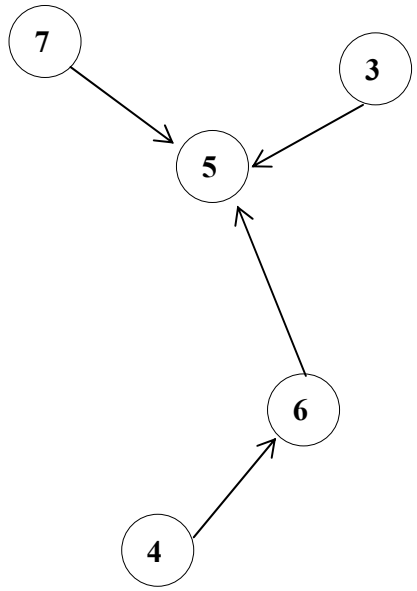

Рис. 3. Центроид объединенного предфрактального дерева

В результате получим ориентированное корневое предфрактальное дерево, обладающее следующим свойствами:

1) каждой вершине (за исключением центроида) инцидентно только одно выходящее

ребро, центроиду инцидентны только входящие ребра;

2) в любой простой цепи, заканчивающейся центроидом, упорядочение этапов объединения представлено ориентацией ребер этой цепи.

Теорема 1. *Предфрактальное дерево масс является деревом центроидов тогда и только тогда, если для любой его вершины и упорядоченного набора масс всех входящих ветвей в и вместе с массой самой и выполняется*

$$\sum_{i=1}^{j} m_i \geq m_{j+1} \; \forall l \leq j \leq p-1,$$

где $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_l \leq \ldots \leq m_p$, $p = \deg u$, $m_l = m(u)$,

$\{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}, m_{l+1}, \ldots, m_p\}$ *– упорядоченные массы входящих ветвей в вершину и.*

Доказательство. Если сценарий объединения разбить на сценарии для каждой вершины по входящим ветвям, то для каждой вершины существование сценария доказывается аналогично доказательству леммы 1.

Заключение

Таким образом, авторами было доказано, что в дереве существует вершина (или две вершины), являющаяся оптимальной сразу по нескольким критериям, которая является своеобразным «центром тяжести» дерева. Были исследованы свойства центроида, позволяющие продуктивно подойти к вопросам перечисления деревьев. А также была составлена математическая модель развития структур предфрактальными деревьями.

Примечания:

1. Кочкаров А.М., Кочкаров А.А., Никищенко С.П. Структурная динамика и исследование структурно-временных характеристик дискретных систем // Известия ТРТУ. Тематический выпуск «Перспективные системы и задачи управления». Таганрог: ТРТУ, 2006. № 3. С. 235–238.
2. Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А. Предфрактальные графы в проектировании и анализе сложных структур // Препринт. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2003. № 10. С. 1–21.
3. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. М.: Наука, 1990. 384 с.
4. Кочкаров А.М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз: РАН САО, 1998. 170 с.
5. Зинченко О.А., Шапошникова О.И., Шурыгина С.В. Сравнительный анализ эффективности приближенных алгоритмов для задачи об остовных деревьях // Гагаринские чтения 2000: тез. докл. науч. конф. М.: МАТИ, 2000. С. 15–16.
6. Уилсон Р. Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977. 207 с.
7. Белов Ю.А., Вовчок С.И. Уточнение свойств центроида дерева // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. № 24 (4). С. 410–414.
8. Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н. Теория графов. Алгоритмы обработки деревьев. Новосибирск: Наука, 1994. 361 с.
9. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 432 с.

References:

1. Kochkarov A.M., Kochkarov A.A., Nikishchenko S.P. Structural dynamics and the study of the structural and temporal characteristics of discrete systems // News of TRTU. Thematic issue “Perspective Systems and Management Problems”. Taganrog: TRTU, 2006. No. 3. P. 235–238.
2. Kochkarov A.A., Kochkarov R.A. Prefractal graphs in the design and analysis of complex structures // Preprint. M.: IPM of M.V. Keldysh RAS, 2003. No. 10. P. 1–21.
3. Lectures on graph theory / V.A. Emelichev, O.I. Melnikov, V.I. Sarvanov, R.I. Tyshkevich. M.: Nauka, 1990. 384 pp.
4. Kochkarov A.M. Recognition of fractal graphs. Algorithmic approach. Nizhny Arkhyz: RAS SAO, 1998. 170 pp.
5. Zinchenko O.A., Shaposhnikova O.I., Shurygina S.V. Comparative analysis of the efficiency of approximate algorithms for the problem of spanning trees // Gagarin Readings 2000: theses of reports of the scientific conf. M.: MATI, 2000. P. 15–16.
6. Wilson R. Introduction to graph theory. M.: Mir, 1977. 207 pp.
7. Belov Yu.A., Vovchok S.I. Tree centroid properties clarification // Modeling and analysis of information systems. 2017. No. 24 (4). P. 410–414.
8. Evstigneev V.A., Kasyanov V.N. Graph theory. Algorithms for tree processing. Novosibirsk: Nauka, 1994. 361 pp.
9. Christofides N. Graph Theory. Algorithmic approach. M.: Mir, 1978. 432 pp.