МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.917
ББК 22.161.6
У 95

Ушхо Дамир Салихович
Доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593905, e-mail: damirubych@mail.ru

Тлячев Вячеслав Бесланович
Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593908, e-mail: stvb2006@rambler.ru

Ушхо Адам Дамирович
Доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593908, e-mail: uschho76@mail.ru

Оценка сверху числа инвариантных прямых полиномиального векторного поля *n*-ой степени в одном случае

(Рецензирована)

Аннотация. *Доказано, что инвариантная прямая аффинно-преобразованной дифференциальной системы, правые части которой представляют собой полиномы n-ой степени, проходит через n состояний равновесия этой системы, два из которых являются внеузловыми точками. При этом, если система имеет две инвариантные прямые, проходящие через определенную внеузловую точку, то n – нечетно. Указаны условия, при которых система не имеет инвариантной прямой. Основной результат заключается в утверждении, что число s инвариантных прямых системы при выполнении определенных неравенств удовлетворяет условию* $s \le 2n+4$ $(n \ge 3)$, *причем эта оценка точная при* $n = 5$. *Все доказываемые утверждения сопровождаются примерами.*

Ключевые слова: *система полиномиальных дифференциальных уравнений на плоскости, инвариантная прямая, инвариантное множество, внеузловая точка.*

Ushkho Damir Salikhovich
Associate Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics, Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593905, e-mail: damirubych@mail.ru

Tlyachev Vyacheslav Beslanovich
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Physics Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593908, e-mail: tlyachev@adygnet.ru

Ushkho Adam Damirovich
Associate Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Theoretical Physics Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593908, e-mail: uschho76@mail.ru

An estimate from above of the number of invariant straight lines of *n*-th order polynomial vector field in one case

Abstract. *We prove that the invariant straight line of the affine-transformed differential system, the right parts of which are n-degree polynomials, passes through the n-th equilibrium of this system, two of which are out-of-node points. At the same time, if the system has two invariant straight lines passing through a certain out-of-node point, then n is odd. Conditions are identified under which the system has no invariant straight line. The main result is the assertion that the number s of invariant straight lines of the system, when certain inequalities are fulfiled, meets the condition* $s \le 2n+4$ $(n \ge 3)$, *provided that this estimate is accurate at* $n = 5$. *All assertions which are being proved are accompanied by examples.*

Keywords: *system of polynomial differential equations on a plane, invariant straight line, invariant set, out-of-node point.*

Введение

В качественной теории дифференциальных уравнений важное место отводится исследованию плоских полиномиальных векторных полей, обладающих инвариантными кривыми. Так, в работе [1] доказана теорема: если среди интегральных кривых дифференциального уравнения фазовых траекторий системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} P_i(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i(x,y) \equiv Q(x,y). \end{cases} \tag{1}$$

где $P_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} a_{rs}x^r y^s$, $Q_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} b_{rs}x^r y^s$, $(P,Q)=1$, содержится конечное число m попарно различных неприводимых над полем комплексных чисел алгебраических кривых, то $m \le (n^2+n+2)/2$. В работе [2] доказано, что система (1) при $n=3$ имеет не более восьми инвариантных прямых, и проведено полное качественное исследование этой системы в случае восьми инвариантных прямых. Статья [3] посвящена изучению системы (1) на предмет оценки сверху числа ее инвариантных прямых. Авторы [3] доказали, что число N инвариантных прямых системы (1) удовлетворяет неравенству $N \le 3n-1,\ n \in \mathrm{N}$. Нижегородские математики Долов М.В. и Чистякова С.А. в работах [4–6] показали, что система (1) при $n=4$ с вырожденной бесконечностью имеет не более девяти инвариантных прямых. Ранее польский математик И. Сокульский (Sokulski I.) [7] доказал, что система (1) при $n=4$ имеет не более девяти вещественных инвариантных прямых.

Наличие инвариантных кривых у системы (1) не только облегчает ее полное качественное исследование, но и позволяет обнаружить новые свойства.

Здесь уместно отметить, что наличие достаточного количества инвариантных кривых системы (1) дает возможность записать ее общий интеграл в так называемой форме Дарбу [8], не прибегая к квадратурам. Из результатов работы [9] следует, что система (1) при $n=3$ не имеет изолированных периодических решений в случае наличия у этой системы не менее пяти инвариантных прямых. В статье [10] доказано, что существуют системы (1) при $n=3$, имеющие предельный цикл и четыре инвариантные прямые. В случае существования предельного цикла у таких систем он расположен внутри параллелограмма, образованного четырьмя инвариантными прямыми. Как установлено в работе [11], система (1) при $n=2$ не имеет предельных циклов, если из ее траекторий состоят инвариантная прямая и особая точка второй группы типа «фокус».

В настоящей работе изучается вопрос о числе инвариантных прямых системы (1) в предположении, что она имеет два инвариантных множества $M_{n-1}^{k_1}(k_1)$ и $M_{n-1}^{k_2}(k_2)$ $(k_1,k_2 \in R,\ k_1 \ne k_2)$. Она является продолжением исследования, проведенного в работе [12]. Множество $M_s^k(k)$, состоящее из s и только s параллельных между собой инвариантных прямых с угловым коэффициентом k системы (1), назовем инвариантным множеством.

В работе [12] доказана лемма 1, согласно которой систему (1), имеющую два инвариантных множества $M_{n-1}^{k_1}(k_1)$, $M_{n-1}^{k_2}(k_2)$, где $k_1,k_2 \in R$, $k_1 \ne k_2$, можно привести с помощью аффинного преобразования переменных x и y к системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{n-2})(Ax+By+C) \equiv P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-\beta_1)\cdot\ldots\cdot(y-\beta_{n-2})(Mx+Ny+L) \equiv Q_n(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

$$0<\alpha_1<\ldots<\alpha_{n-2},\quad 0<\beta_1<\ldots<\beta_{n-2},\quad BM \ne 0.$$

В дальнейшем будем считать, что выполнены условия

$$AN - BM \neq 0,\ |A| + |N| > 0,\ BM \neq 0,\quad 0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-2},\quad 0 < \beta_1 < \ldots < \beta_{n-2},$$

и каждый раз это не будем оговаривать.

Очевидно, что система (2) имеет два инвариантных множества $M_{n-1}^{0}(0)$ и $M_{n-1}^{\infty}(\infty)$.

Основные результаты

Следуя работе [12], назовем состояние равновесия U узловой точкой, если через U проходят две инвариантные прямые из множества $M_{n-1}^{0}(0) \cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$. Состояние равновесия, не являющееся узловой точкой, будем называть внеузловой точкой. Если внеузловая точка расположена на инвариантной прямой, принадлежащей множеству $M_{n-1}^{0}(0)$ $\left(M_{n-1}^{\infty}(\infty)\right)$, то ее будем обозначать $V^0\left(V^{\infty}\right)$. Внеузловую точку, через которую не проходит инвариантная прямая из множества $M_{n-1}^{0}(0) \cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$, будем обозначать символом V.

Лемма 1. *Пусть* $l: y - kx - b = 0$ *– инвариантная прямая системы* (2) *и* $l \notin M_{n-1}^{0}(0) \cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$. *Тогда* l *пересекает главные изоклины этой системы*

$$L^0:\ Mx + Ny + L = 0 \quad \textit{и} \quad L^{\infty}:\ Ax + By + C = 0.$$

Доказательство. Так как l – инвариантная прямая системы (2), то имеет место равенство

$$\begin{gathered} y(y-\beta_1)\cdot\ldots\cdot(y-\beta_{n-2})(Mx+Ny+L) \equiv \\ \equiv kx(x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{n-2})(Ax+By+C) + (y-kx-b)R_{n-1}(x,y), \end{gathered} \tag{3}$$

где $R_{n-1}(x,y)$ – многочлен степени, не выше $n-1$.

Предположим, что $L^0 \parallel l$. Тогда при $y = kx + b$ в левой части равенства (3) получим многочлен степени $n-1$ относительно x, а в правой части – многочлен степени n, так как $l \cap L^{\infty} \neq \phi$. Если предположить, что $L^{\infty} \parallel l$, то при $y = kx + b$ в левой части (3) будем иметь многочлен степени n относительно x, а в правой части – многочлен степени $n-1$. В том и другом случае приходим к невыполнимому тождественному равенству.

Лемма доказана.

Пример 1. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-2)(Nx + By - N - B), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-2)(Bx + Ny - N - B), \end{cases}$$

где $|N| \neq |B|$, имеет две пересекающиеся инвариантные прямые $l_1: y - x = 0$, $l_2: y + x - 2 = 0$, не принадлежащие множеству

$$M_2^0(0) \cup M_2^{\infty}(\infty) = \{x = 0, x - 2 = 0, y = 0, y - 2 = 0\}.$$

При этом l_1 и l_2 пересекаются во внеузловой точке $(1;1)$.

Лемма 2. *Если через точку* $N = L^0 \cap L^{\infty}$ *системы* (2) *проходит инвариантная прямая* $l \in M_{n-1}^{0}(0) \cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$, *то эта система не имеет инвариантной прямой* $\bar{l}$, *не принадлежащей множеству* $M_{n-1}^{0}(0) \cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$ *и проходящей через* N.

Доказательство. Для определенности полагаем, что $l \in M_{n-1}^{0}(0)$ (если $l \in M_{n-1}^{\infty}(\infty)$, то рассуждаем аналогично). Предположим, что система (2) наряду с l имеет инвариантную прямую $\bar{l}$, не принадлежащую множеству $M_{n-1}^{0}(0) \cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$ и проходящую через N. Так как $\bar{l}$ пересекает все $n-1$ инвариантных прямых множества $M_{n-1}^{\infty}(\infty)$ и проходит через точку N, которой не инцидентна ни одна инвариантная прямая множества $M_{n-1}^{\infty}(\infty)$, то на $\bar{l}$ расположены n состояний равновесия системы (2).

С другой стороны, состояние равновесия N является особой точкой кратности $r=2$ изоклины нуля $Q_n(x,y)=0$ системы (2). По теореме 21 [13] прямая $\bar{l}$ пересекает изоклину $Q_n(x,y)=0$ не более чем в $n-1$ точках. Следовательно, система (2) имеет на прямой $\bar{l}$ не более $n-1$ состояний равновесия.

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 3. *Пусть инвариантная прямая l системы* (2)*, не принадлежащая множеству $M_{n-1}^{0}(0)\cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$, проходит через внеузловую точку $V^0\left(V^{\infty}\right)$. Тогда l непременно проходит через вторую внеузловую точку $V^{\infty}\left(V^0\right)$.*

Доказательство. Для определенности полагаем, что инвариантная прямая l проходит через внеузловую точку V^0. По лемме 1 l пересекает прямые изоклины L^0 и L^{∞}. Прямая l также пересекает все инвариантные прямые множества $M_{n-1}^{0}(0)\cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$. Согласно [14] каждая точка пересечения инвариантной прямой l с инвариантными прямыми множества $M_{n-1}^{0}(0)\cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$ является состоянием равновесия системы (2). Следовательно, на l расположены n состояний равновесия системы (2).

Так как V^0 расположено на инвариантной прямой l, то среди $n-1$ состояний равновесия системы (2), расположенных на l и отличных от V^0, найдутся не более $n-2$ состояний равновесия, через каждое из которых проходит инвариантная прямая, принадлежащая множеству $M_{n-1}^{0}(0)$. Это означает, что на l найдется состояние равновесия, через которое проходит инвариантная прямая, принадлежащая множеству $M_{n-1}^{\infty}(\infty)$, и не проходит инвариантная прямая, принадлежащая множеству $M_{n-1}^{0}(0)$. Таким образом, на l система (2) имеет внеузловую точку V^{∞}.

Лемма доказана.

Лемма 4. *На инвариантной прямой $l\notin M_{n-1}^{0}(0)\cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$ система* (2) *имеет не более двух внеузловых точек.*

В самом деле, через внеузловую точку системы (2), расположенную на инвариантной прямой $l\notin M_{n-1}^{0}(0)\cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$, проходит хотя бы одна из главных изоклин L^0 и L^{∞}. По лемме 1 l пересекает обе прямые L^0 и L^{∞}. Так как l пересекает каждую из прямых L^0 и L^{∞} не более одного раза, то на l система (2) имеет либо одну внеузловую точку, если l проходит через точку V, либо две внеузловые точки в противном случае.

Теорема 1. *Пусть инвариантная прямая $l\in M_{n-1}^{0}(0)\cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$ проходит через точку $N=L^0\cap L^{\infty}$, а L – инвариантная прямая этой же системы, причем $L\notin M_{n-1}^{0}(0)\cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$. Тогда на L расположены n состояний равновесия системы* (2)*, в том числе две внеузловые точки.*

Доказательство. В целях определенности полагаем, что через N проходит инвариантная прямая $l\in M_{n-1}^{0}(0)$. По лемме 2 инвариантная прямая L не проходит через N. По лемме 1 L пересекает главные изоклины L^0 и L^{∞} системы (2). Следовательно, эти точки являются состояниями равновесия системы (2) (см. [14]). Но по определению состояние равновесия является общей точкой главных изоклин системы. Поэтому через точку $A=L^0\cap L$ проходит инвариантная прямая из множества $M_{n-1}^{\infty}(\infty)$, а через точку $B=L^{\infty}\cap L$ – инвариантная прямая из множества $M_{n-1}^{0}(0)$.

Таким образом, $A(B)$ – внеузловая точка типа $V^{\infty}\left(V^0\right)$ системы (2). По лемме 3 на

L нет внеузловых точек, отличных от A и B. Кроме этого, L пересекает $n-2$ инвариантных прямых из множества $M_{n-1}^{0}(0)$, отличных от той, которая проходит через точку B, а также $n-2$ инвариантных прямых из множества $M_{n-1}^{\infty}(\infty)$, отличных от той, которая проходит через точку A. Тем самым доказано, что инвариантная прямая L проходит через n состояний равновесия системы (2), два из которых являются внеузловыми точками.

Теорема доказана.

Существуют системы вида (2), удовлетворяющие условиям теоремы 1.

Пример 2. Главные изоклины $L^0 : y+2x+2=0,\ L^{\infty} : y-x-4=0$ дифференциальной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2)(y+2x+2), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-2)(y-4)(y-x-4) \end{cases}$$

пересекаются в точке $N(-2;2)$, через которую проходит инвариантная прямая $y-2=0$, принадлежащая множеству $M_3^0(0)=\{y=0, y-2=0, y-4=0\}$. Кроме этого, система имеет инвариантную прямую $y-2x-2=0$, не принадлежащую множеству $M_3^0(0)\bigcup M_3^{\infty}(\infty)$. Здесь $M_3^{\infty}(\infty)=\{x=0, x-1=0, x-2=0\}$.

Лемма 5. *Пусть* $V=L^0 \bigcap L^{\infty}$ *– внеузловая точка системы* (2)*, и через* V *проходит инвариантная прямая* L*, не принадлежащая множеству* $M_3^0(0)\bigcup M_3^{\infty}(\infty)$*. Тогда* L *проходит только через узловые точки, не считая* V.

Доказательство. По лемме 2 система (2) не имеет инвариантной прямой, принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0)\bigcup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$ и проходящей через V. Вместе с тем инвариантная прямая L пересекает все инвариантные прямые множества $M_{n-1}^0(0)\bigcup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$, то есть на L кроме V расположены еще $n-1$ состояний равновесия системы (2), и все они являются узловыми точками.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Если система* (2) *имеет две инвариантные прямые* L_1 *и* L_2*, проходящие через внеузловую точку* $V=L^0 \bigcap L^{\infty}$*, то* n *– нечетно.*

Доказательство. Так как по лемме 2 ни одна из инвариантных прямых L_1 и L_2 не принадлежит множеству $M_{n-1}^0(0)\bigcup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$, то по лемме 5 прямые L_1 и L_2 проходят только через узловые точки, не считая точку V. Поэтому V – точка пересечения диагоналей прямоугольника Π_1, образованного инвариантными прямыми: $x=0$, $x-\alpha_{n-2}=0$, $y=0$, $y-\beta_{n-2}=0$. Для вершин прямоугольника Π_1 введем обозначения: $O_1(0;0)$, $F_1(0;\beta_{n-2})$, $G_1(\alpha_{n-2};\beta_{n-2})$, $H_1(\alpha_{n-2};0)$. Для определенности считаем, что L_1 проходит через точки O_1 и G_1 прямоугольника Π_1. Пусть U_1 – произвольная узловая точка системы (2), отличная от O_1 и G_1 и расположенная на инвариантной прямой L_1. Так как $U=L_1 \bigcap l_1^{\infty}$, где $l_1^{\infty} \in M_{n-1}^{\infty}(\infty)$, то прямая l_1^{∞} пересекает L_2 в узловой точке U_2. Но через U_2 проходит инвариантная прямая $l_2^0 \in M_{n-1}^0(0)$. Инвариантная прямая l_2^0 пересекает L_1 в узловой точке U_3.

Таким образом, на инвариантной прямой L_1, равно как и на L_2, узловые точки встречаются парами. Следовательно, число инвариантных прямых во множестве $M_{n-1}^0(0)$ или что то же самое во множестве $M_{n-1}^{\infty}(\infty)$ четно, то есть $n-1=2m,\ m\in \mathrm{N}$. Это и означает, что $n = 2m + 1$ – нечетно.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $V = L^0 \bigcap L^\infty$ *– внеузловая точка системы* (2), *причем* L^0 *проходит через противоположные вершины* O_1 *и* G_1 *(или* F_1 *и* H_1*), а* L^∞ *– через противоположные вершины* F_1 *и* H_1 *(или* O_1 *и* G_1*) прямоугольника* Π_1. *Тогда система* (2) *не имеет инвариантной прямой, не принадлежащей множеству* $M^0_{n-1}(0) \bigcup M^\infty_{n-1}(\infty)$.

Доказательство. По определению внеузловой точки V через V не проходит инвариантная прямая, принадлежащая множеству $M^0_{n-1}(0) \bigcup M^\infty_{n-1}(\infty)$. Таким образом, если система (2) имеет инвариантную прямую L, не принадлежащую множеству $M^0_{n-1}(0) \bigcup M^\infty_{n-1}(\infty)$, то она не проходит через точку V. Но тогда L пересекает хотя бы одну из инвариантных прямых: $x = 0$, $x - \alpha_{n-2} = 0$, $y = 0$, $y - \beta_{n-2} = 0$ в точке, расположенной вне односвязной области, ограниченной прямоугольником Π_1. Это невозможно, так как через любую внеузловую точку, отличную от V, должна проходить хотя бы одна из главных изоклин L^0 и L^∞.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Пример 3. Во внеузловой точке $V(2;2{,}5)$ пересекаются изоклины $L^0 : 4y + 5x - 20 = 0$, $L^\infty : 4y - 5x = 0$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(x-4)(4y-5x), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-3)(y-5)(4y+5x-20). \end{cases}$$

Кроме этого, L^0 проходит через противоположные вершины (4;0) и (0;5), а L^∞ – через противоположные вершины (0;0) и (4;5) прямоугольника Π_1. Согласно теореме 3 данная система не имеет инвариантной прямой, отличной от шести очевидных инвариантных прямых.

Лемма 6. *Пусть* $U = L^0 \bigcap L^\infty$ *– узловая точка системы* (2)*, и через* U *проходит инвариантная прямая* $L \notin M^0_{n-1}(0) \bigcup M^\infty_{n-1}(\infty)$. *Тогда* L *проходит только через узловые точки.*

В самом деле, если бы существовала на L внеузловая точка, то по определению внеузловой точки через V проходила бы одна из главных изоклин L^0 и L^∞. Но это невозможно, так как L уже пересекается с изоклинами L^0 и L^∞ в точке U.

Пример 4. Прямые изоклины $L^0 : x + y - 4 = 0$, $L^\infty : 4x - 2y - 4 = 0$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2)(4x-2y-4), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(y-2)(x+y-4) \end{cases}$$

пересекаются в узловой точке $U(2;2)$.

Инвариантная прямая $y - x = 0$ не принадлежит множеству $M^0_3(0) \bigcup M^\infty_3(\infty) = \{x = 0, x-1 = 0, x-2 = 0, y = 0, y-1 = 0, y-2 = 0\}$ и в то же время проходит только через узловые точки (0;0), (1;1), (2;2).

Лемма 7. *Пусть* $U = L^0 \bigcap L^\infty$ *– узловая точка системы* (2)*, причем* L^0 *проходит через противоположные вершины* O_1 *и* G_1 *(или* F_1 *и* H_1*), а* L^∞ *– через противоположные вершины* F_1 *и* H_1 *(или* O_1 *и* G_1*) прямоугольника* Π_1. *Тогда эта система не имеет ин-*

вариантной прямой, не принадлежащей множеству $M_{n-1}^{0}(0)\bigcup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$.

Доказательство. Согласно лемме 6 не существует инвариантной прямой $L\notin M_{n-1}^{0}(0)\bigcup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$, проходящей через точку U. Пусть существует инвариантная прямая $L\notin M_{n-1}^{0}(0)\bigcup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$. Так как L не проходит через точку U, а U является точкой пересечения диагоналей прямоугольника Π_1, то L пересекает хотя бы одну из инвариантных прямых: $x=0,\ x-\alpha_{n-2}=0,\ y=0,\ y-\beta_{n-2}=0$ в точке, расположенной вне односвязной области, ограниченной прямоугольником Π_1. Это невозможно, так как через любую внеузловую точку системы (2) проходит хотя бы одна из изоклин L^0 и L^∞.

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Пример 5. Главные изоклины $L^0: y+x-2=0,\ L^\infty: y-x=0$ системы

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(x-1)(x-2)(y-x),\\ \dfrac{dy}{dt}=y(y-1)(y-2)(y+x-2)\end{cases}$$

проходят через узловую точку $U(1;1)$. При этом изоклине L^0 принадлежит одна пара противоположных вершин, а изоклине L^∞ – другая пара противоположных вершин прямоугольника Π_1. Поэтому эта система не имеет инвариантной прямой, не принадлежащей множеству из шести очевидных инвариантных прямых.

Из теоремы 3 и леммы 7 следует

Теорема 4. *Если изоклина* L^0 *системы* (2) *проходит через противоположные вершины* O_1 *и* G_1 *(или* F_1 *и* H_1*), а изоклина* L^∞ *– через противоположные вершины* F_1 *и* H_1 *(или* O_1 *и* G_1*), то система* (2) *не имеет инвариантной прямой, не принадлежащей множеству* $M_{n-1}^{0}(0)\bigcup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$.

Для удобства дальнейших рассуждений перепишем систему (2) в виде

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{n-1})(Ax+By+C),\\ \dfrac{dy}{dt}=(y-\beta_1)(y-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(y-\beta_{n-1})(Mx+Ny+L),\end{cases}\tag{4}$$

где $0=\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{n-1},\ 0=\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{n-1}$.

Под прямоугольником Π_1 мы здесь понимаем прямоугольник, образованный инвариантными прямыми: $x-\alpha_1=0,\ x-\alpha_{n-1}=0,\ y-\beta_1=0,\ y-\beta_{n-1}=0$. Вершины этого прямоугольника обозначим $O_1(\alpha_1;\beta_1),\ F_1(\alpha_1;\beta_{n-1}),\ G_1(\alpha_{n-1};\beta_{n-1}),\ H_1(\alpha_{n-1};\beta_1)$. Среди прямоугольников, образованных инвариантными прямыми множества $M_{n-1}^{0}(0)\bigcup M_{n-1}^{\infty}(\infty)=\{x-\alpha_1=0,\ldots,x-\alpha_{n-1}=0,y-\beta_1=0,\ldots,y-\beta_{n-1}=0\}$, выделим прямоугольник Π_2, образованный инвариантными прямыми $x-\alpha_{\frac{n-1}{2}}=0$, $x-\alpha_{\frac{n+1}{2}}=0$, $y-\beta_{\frac{n-1}{2}}=0$, $y-\beta_{\frac{n+1}{2}}=0$ Для вершин прямоугольника Π_2 введем обозначения:

$$O_2\left(\alpha_{\frac{n-1}{2}};\beta_{\frac{n-1}{2}}\right),\quad F_2\left(\alpha_{\frac{n-1}{2}};\beta_{\frac{n+1}{2}}\right),\quad G_2\left(\alpha_{\frac{n+1}{2}};\beta_{\frac{n+1}{2}}\right),\quad H_2\left(\alpha_{\frac{n+1}{2}};\beta_{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Здесь n – нечетное, $n\geq 3$.

Теорема 5. *Пусть через внеузловую точку* $V=L^0\bigcap L^\infty$ *проходят две инвариантные* *прямые* $L_1, L_2 \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$ *системы* (4). *Если при этом система* (4) *имеет третью инвариантную прямую* $L_3 \notin M_n^0(0) \cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$, *то* L_3 *проходит через одну из вершин прямоугольника* Π_2.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что в соответствии с теоремой 2 число n – нечетное. Кроме этого, согласно лемме 5 одной из инвариантных прямых L_1 и L_2 принадлежит одна пара противоположных вершин, а другой – вторая пара противоположных вершин прямоугольника Π_1. Для определенности положим, что L_1 проходит через точки O_1 и G_1, а L_2 – через точки F_1 и H_1.

Так как по теореме 2 L_1 и L_2 проходят только через узловые точки (исключая точку V), то L_1 проходит через вершины O_2 и G_2, а L_2 – через вершины F_2 и H_2 прямоугольника Π_2. Пусть L_3 – инвариантная прямая системы (4), отличная от L_1 и L_2 и не принадлежащая множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^{\infty}(\infty)$.

Нетрудно видеть, что при $n = 3$ теорема верна. Поэтому рассматриваем случай $n > 3$.

При $n > 3$ инвариантная прямая L_3 не проходит через внутреннюю точку односвязной области, ограниченной прямоугольником Π_2, так как в противном случае на L_3 расположены не менее трех внеузловых точек. Это противоречит лемме 4. Предположим, что L_3 не проходит ни через одну из вершин прямоугольника Π_2, и при этом ее угловой коэффициент k положителен. Случай $k < 0$ сводится к случаю $k > 0$ путем выбора новой системы координат. Относительно k возможны предположения:

$$1)\ k = \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}}; \quad 2)\ k > \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}}; \quad 3)\ 0 < k < \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}}.$$

В дальнейших наших рассуждениях не будем рассматривать случай 3), так как он сводится к случаю 2).

Обозначим точку пересечения L_3 с L_2 через U_1. В случае 1) L_3 пересекает инвариантные прямые $y - \beta_1 = 0$ и $x - \alpha_{n-1} = 0$ во внеузловых точках V_1^0 и V_2^{∞} соответственно (абсцисса точки U_1 меньше чем $\alpha_{\frac{n-1}{2}}$, см. рис. 1).

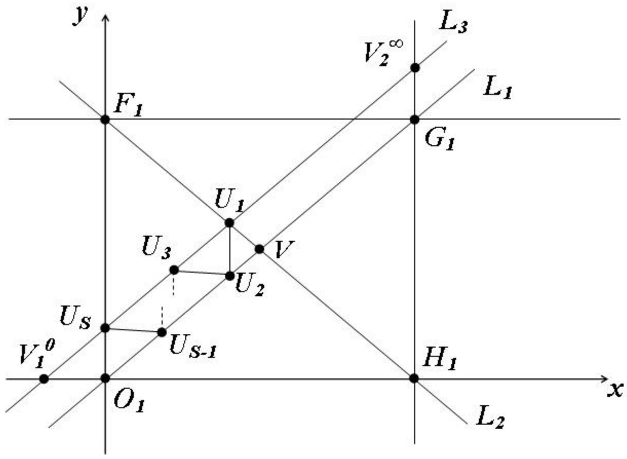

Рис. 1. Инвариантная прямая L_3 параллельна прямой L_1
и проходит через внеузловые точки V_1^0 и V_2^{∞}

Так как по лемме 5 все состояния равновесия системы (4), расположенные на инвариантных прямых L_1 и L_2 и отличные от V, являются узловыми точками, то существует ломаная $U_1 U_2 \ldots U_{s-1} U_s$, состоящая из отрезков инвариантных прямых, принадлежащих множеству $M_{n-1}^0(0)\bigcup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Здесь $U_s \equiv (\alpha_1;\beta_2)$. По предположению точка F_2 расположена на инвариантной прямой L_2 между точками V и U_1. Поэтому существует и вторая ломаная, звеньями которой служат заключенные между L_1 и L_3 отрезки инвариантных прямых множества $M_{n-1}^0(0)\bigcup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Среди звеньев этой ломаной имеется один отрезок, пересекающий прямую $x-\alpha_1=0$ в точке, расположенной между точками O_1 и U_s. Это равносильно наличию на инвариантной прямой L_3 более двух внеузловых точек, что противоречит лемме 4. Случай, когда абсцисса точки U_1 больше чем $\alpha_{\frac{n+1}{2}}$ сводится к уже рассмотренному путем соответствующего выбора новой системы координат.

Пусть далее $k>\dfrac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}}$. Тогда L_3 пересекает прямую L_1 только в точке O_1 или G_1, так как в противном случае на L_3 система (4) имеет две внеузловые точки типа V^∞. Это противоречит леммам 3 и 4. Для определенности рассмотрим случай, когда L_3 проходит через точки O_1 и U_1 (см. рис. 2).

Случай, когда L_3 проходит через точки G_1 и U_1, сводится к случаю, изображенному на рисунке 2 выбором соответствующей системы координат. Так как $V_2^\infty = L_3 \bigcap l_{n-1}^\infty$ – внеузловая точка, где $l_{n-1}^\infty : x-\alpha_{n-1}=0$, то по лемме 3 прямая L_3 проходит через вторую внеузловую точку V_1^0. Эта точка расположена между точками O_1 и U_1. В самом деле, на отрезке $[O_1,V]$ все состояния равновесия системы (4), исключая V, являются узловыми точками. Следовательно, инвариантная прямая $y-\beta_2=0$, проходящая через узловую точку $(\alpha_2;\beta_2)\in L_1$, пересекает прямую L_3 во внеузловой точке V_1^0. Таким образом, все состояния равновесия системы (4), расположенные на L_3 и отличные от V_1^0 и V_2^∞ являются узловыми точками.

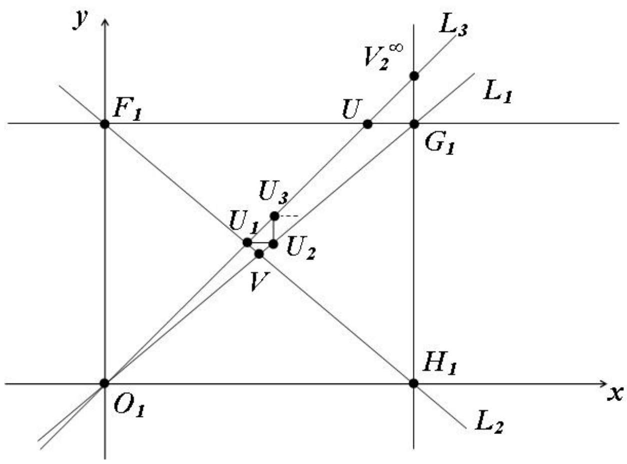

Рис. 2. Инвариантная прямая L_3 проходит через точки O_1 и U_1

Следовательно, инвариантная прямая $y-\beta_2=0$, проходящая через узловую точку $(\alpha_2;\beta_2)\in L_1$, пересекает прямую L_3 во внеузловой точке V_1^0. Таким образом, все состояния равновесия системы (4), расположенные на L_3 и отличные от V_1^0 и V_2^∞, являются узловыми точками. Аналогично, все состояния равновесия системы (4), расположенные на L_1 и отличные от V, являются узловыми точками. Поэтому существуют две ломаные $U_1U_2U_3\ldots$ и $F_2\overline{U}_2\overline{U}_3\ldots$, звеньями которых служат отрезки инвариантных прямых множества $M_{n-1}^0(0)\bigcup M_{n-1}^\infty(\infty)$, заключенные между прямыми L_1 и L_3. Так как точка F_2 лежит на прямой L_2 между точками V и U_1, то среди отрезков ломаной, исходящей из точки F_2, найдется такой, который пересечет прямую $y-\beta_{n-1}=0$ в точке, расположенной между точками U и G_1. Это означает, что на инвариантной прямой L_3 расположены более двух внеузловых точек. Приходим к противоречию с леммой 4.

Теорема доказана полностью.

Следствие 1. Существуют системы вида (2), удовлетворяющие условиям теоремы 5 и имеющие $2n+2$ инвариантных прямых, причем две из них параллельны одной из инвариантных прямых L_1 и L_2.

Пример 6. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(3x-2y-2), \end{cases} \tag{5}$$

дифференциальное уравнение траекторий которой рассмотрено в работе [2], имеет два инвариантных множества $M_2^0(0)$ и $M_2^1(1)$.

В самом деле, применив к системе (5) преобразование [14] $\begin{cases} x=\bar{x}+\bar{y}, \\ y=\bar{y}, \end{cases}$ получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x}(\bar{x}-1)(\bar{x}+3\bar{y}-2), \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} = \bar{y}(\bar{y}-1)(3\bar{x}+\bar{y}-2). \end{cases} \tag{6}$$

Система (6) имеет два инвариантных множества $M_2^0(0)=\{\bar{y}=0, \bar{y}-1=0\}$, $M_2^\infty(\infty)=\{\bar{x}=0, \bar{x}-1=0\}$, внеузловую точку $V\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, через которую проходят инвариантные прямые $L_1: \bar{y}-\bar{x}=0$, $L_2: \bar{y}+\bar{x}-1=0$. Кроме этого, данная система имеет две инвариантные прямые: $\bar{y}+\bar{x}=0$, $\bar{y}+\bar{x}-2=0$.

Замечание 1. Система (6) является частным случаем системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)((B+C)x+By+C), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(Bx+(B+C)y+C), \end{cases}$$

имеющей, кроме четырех очевидных инвариантных прямых, две пересекающиеся инвариантные прямые $y+x=0$, $y-x=0$.

Пример 7. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2)(x-3)(3x-5y+3), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(y-2)(y-3)(-5x+3y+3) \end{cases}$$

имеет, кроме восьми очевидных инвариантных прямых, образующих множество $M_{n-1}^0(0)\cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, инвариантные прямые $y-x=0$, $y-x+1=0$, $y-x-1=0$, $y+x-3=0$. При этом инвариантные прямые $y-x=0$, $y+x-3=0$ пересекаются во внеузловой точке $V\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Интересно отметить, что система (5), а также система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(x-4), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(-3x-2y+4), \end{cases}$$

дифференциальные уравнения фазовых траекторий которых рассмотрены в статье [2], принадлежат одному и тому же классу кубических систем, обладающих двумя инвариантными множествами $M_2^0(0)$ и $M_2^k(k)$, $k \in R \setminus \{0\}$, и внеузловой точкой, через которую не проходит ни одна из инвариантных прямых множества $M_2^0(0) \cup M_2^k(k)$.

Следствие 2. Существуют системы вида (2), удовлетворяющие условиям теоремы 5, имеющие $2n+4$ инвариантных прямых, причем четыре из них образуют параллелограмм $O_1F_2G_1H_2$ или параллелограмм $H_1O_2F_1G_2$.

Пример 8. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-a)\left[x - \dfrac{a(1+\sqrt{5})}{2}\right]\left[x - \dfrac{a(3+\sqrt{5})}{2}\right]\left[x - \sqrt{5}y + \dfrac{a(1+\sqrt{5})}{2}\right], \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-a)\left[y - \dfrac{a(1+\sqrt{5})}{2}\right]\left[y - \dfrac{a(3+\sqrt{5})}{2}\right]\left[-\sqrt{5}x + y + \dfrac{a(1+\sqrt{5})}{2}\right] \end{cases} \quad (7)$$

имеет инвариантные множества

$$M_4^0(0) = \left\{ y = 0,\ y - a = 0,\ y - \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} = 0,\ y - \frac{a(3+\sqrt{5})}{2} = 0 \right\},$$

$$M_4^\infty(\infty) = \left\{ x = 0,\ x - a = 0,\ x - \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} = 0,\ x - \frac{a(3+\sqrt{5})}{2} \right\},$$

где $a \in (0;+\infty)$, а также шесть инвариантных прямых:

$$y - x = 0, \quad y + x - \frac{a(3+\sqrt{5})}{2} = 0, \quad y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x = 0, \quad y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} = 0,$$

$$y - \frac{2}{1+\sqrt{5}}x = 0, \quad y - \frac{2}{1+\sqrt{5}}x - a = 0.$$

Поведение фазовых траекторий системы (7) изображено на рисунке 3.

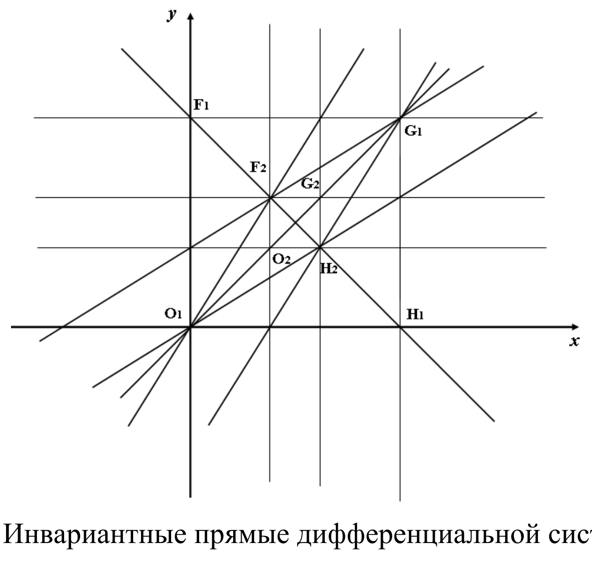

Рис. 3. Инвариантные прямые дифференциальной системы (7)

Замечание 2. Коэффициенты системы (7) вычислены в среде MAPLE.

В работе [3] впервые построена система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\left[x-\left(3-\sqrt{5}\right)\right]\left[x-\left(\sqrt{5}-1\right)\right]\left[x-2\right]\left[x+\sqrt{5}y-\sqrt{5}-1\right], \\ \dfrac{dy}{dt} = y\left[y-\left(3-\sqrt{5}\right)\right]\left[y-\left(\sqrt{5}-1\right)\right]\left(y-2\right)\left[\sqrt{5}x+y-\sqrt{5}-1\right], \end{cases}$$

имеющая 14 инвариантных прямых:

$$y-x=0, \quad y+x-2=0, \quad y+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x-2=0, \quad y+\frac{2}{\sqrt{5}-1}x-\frac{4}{\sqrt{5}-1}=0,$$

$$y+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x-\sqrt{5}+1=0, \quad y+\frac{2}{\sqrt{5}-1}x-2=0, \quad x=0, \quad x=0, x-3+\sqrt{5}=0,$$

$$x-\sqrt{5}+1=0, \quad x-2=0, \quad y=0, \quad y-3+\sqrt{5}=0, \quad y-\sqrt{5}+1=0, \quad y-2=0.$$

Как замечено авторами [3], точки $x=3-\sqrt{5}$ и $x=\sqrt{5}-1$ производят золотое сечение отрезка $[0;2]$. В приведенной нами системе (7) точки $x=a$ и $x=\dfrac{a\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$ также производят золотое сечение отрезка $\left[0;\dfrac{a\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right]$. Впрочем, система из работы [3] является частным случаем системы (7) при $a=3-\sqrt{5}$.

Замечание 3. Система (8) получена нами из системы, приведенной в статье [3] в результате параллельного переноса.

Теорема 6. *Пусть система* (2) *имеет две пересекающиеся инвариантные прямые, каждой из которых инцидентны противоположные вершины прямоугольника* Π_1. *Тогда* n *– нечетно.*

Доказательство. Пусть L_1 и L_2 – пересекающиеся инвариантные прямые системы (2). Тогда, согласно условию теоремы, одна из прямых L_1 и L_2 задается уравнением $y-\dfrac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}x=0$, а другая – уравнением $y+\dfrac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}x-\beta_{n-2}=0$. Поэтому справедливы равенства:

$$\left(\frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}\right)^{n-2}\left(x-\frac{\beta_1\alpha_{n-2}}{\beta_{n-2}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-\frac{\beta_{n-3}\alpha_{n-2}}{\beta_{n-2}}\right)\left[\left(M+\frac{N\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}\right)x+L\right]\equiv$$

$$\equiv\left(x-\alpha_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-\alpha_{n-3}\right)\left[\left(A+\frac{B\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}\right)x+C\right]; \tag{9}$$

$$\left(-1\right)^{n-2}\left(\frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}\right)^{n-2}\left[x-\frac{\alpha_{n-2}\left(\beta_{n-2}-\beta_1\right)}{\beta_{n-2}}\right]\cdot\ldots\cdot\left[x-\frac{\alpha_{n-2}\left(\beta_{n-2}-\beta_{n-3}\right)}{\beta_{n-2}}\right]\times$$

$$\times\left[\left(M-\frac{N\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}\right)x+N\beta_{n-2}+L\right]\equiv\left(x-\alpha_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-\alpha_{n-3}\right)\times$$

$$\times\left[\left(A-\frac{B\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}\right)x+B\beta_{n-2}+C\right]. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следуют соотношения:

$$\left(\frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}\right)^{n-2}\left(M+\frac{N\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}\right)=A+\frac{B\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}; \tag{11}$$

$$(-1)^{n-2}\left(\frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}\right)^{n-2}\left(M-\frac{N\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}\right)=A-\frac{B\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}. \tag{12}$$

Предположим, что n – четное, тогда в силу (11) и (12) имеют место равенства:

$$A=\left(\frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}\right)^{n-2}M, \qquad B=\left(\frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}\right)^{n-2}N. \tag{13}$$

Из (13) следует равенство $AN-BM=0$, противоречащее условию пересечения главных изоклин L^0 и L^∞ системы (2).

Теорема доказана.

Из результатов работы [12] и теоремы 5 следует

Теорема 7. *Число* s *инвариантных прямых системы* (2) *при выполнении неравенств* $AN-BM\neq 0,\ \ |A|+|N|>0$, *удовлетворяет условию*

$$s\le 2n+4 \quad (n\ge 3), \tag{14}$$

причем оценка (14) *точная при* $n=5$.

Замечание 4. В работе [15] показано, что решение вопроса об оценке сверху числа инвариантных прямых полиномиального векторного поля дает реальную возможность исчерпывающего качественного анализа поведения траекторий рассматриваемых динамических систем. Введенные в представленной работе понятия узловой и внеузловой точки, а также инвариантного множества $M_s^k(k)$ упрощают анализ поведения характеристик системы (1).

Примечания:

1. Долов М.В. О числе алгебраических инвариантных кривых полиномиальных векторных полей // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 838–839.
2. Любимова Р.А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференциальные и интегральные уравнения: межвуз. сб. Горький: Изд-во гос. ун-та, 1977. Вып. 1. С. 19–22.
3. Artes J., Grunbaum B., Ilibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific Journal of Mathematics. 1998. Vol. 184, No. 2. P. 207–230.
4. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. I // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. № 6. С. 132–137.
5. Долов М.В. Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. II // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 1. С. 139–148.
6. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. III // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 2. С. 123–129.
7. Sokulski I. On the number of invariant lines of poly-

References:

1. Dolov M.V. On the number of algebraic invariant curves of the polynomial vector fields // Differential Equations. 2004. Vol. 40, No. 6. P. 838–839.
2. Lyubimova R.A. On one differential equation with integral straight lines // Differential and Integral Equations: the interuniversity coll. Gorky: State University Publishing House, 1977. Iss. 1. P. 19–22.
3. Artes J., Grunbaum B., Ilibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific Journal of Mathematics. 1998. Vol. 184, No. 2. P. 207–230.
4. Dolov M.V., Chistyakova S.A. On linear private integrals of polynomial vector fields of the fourth degree with degenerate infinity. I // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2010. No. 6. P. 132–137.
5. Dolov M.V., Chistyakova S.A. On linear partial integrals of polynomial vector fields of the fourth degree with degenerate infinity. II. // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2011. No. 1. P. 139–148.
6. Dolov M.V., Chistyakova S.A. On linear partial integrals of polynomial vector fields of the fourth degree with degenerate infinity. III. // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2011. No. 2. P. 123–129.
7. Sokulski I. On the number of invariant lines of poly-

nomial vector fields // Nonlinearity. 1996. No. 9. P. 479–485.

8. Darboux M.G. Memoire sur les equations differentielles algebriques du premier ordre et du premier degre // Bulletin des Sciences Mathematiques et Astronom. Paris, 1878. P. 60–200.
9. Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю. Частные интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический сборник. 1992. Т. 183, № 3. С. 76–94.
10. Ушхо Д.С., Ушхо А.Д. О сосуществовании предельных циклов и линейных частных интегралов кубических дифференциальных систем на плоскости // Труды ФОРА. 2004. № 9. С. 20–24. URL: http://fora.adygnet.ru
11. Черкас Л.А. Об отсутствии предельных циклов одного уравнения, имеющего негрубый фокус // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6, № 5. С. 779–783.
12. Об одном методе исследования числа инвариантных прямых, полиномиальных векторных полей n-ой степени / Д.С. Ушхо, А.Е. Артисевич, Н.А. Лобода, А.А. Панеш // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2018. Вып. 4 (231). С. 15–27. URL: http://vestnik.adygnet.ru
13. Уокер Р. Алгебраические кривые. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 236 с.
14. Ушхо Д.С. Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Майкоп, 2007. 93 с.
15. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Оценка сверху числа инвариантных прямых полиномиального векторного поля n-ой степени // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 171–179.

nomial vector fields // Nonlinearity. 1996. No. 9. P. 479–485.

8. Darboux M.G. Memoire sur les equations differentielles algebriques du premier ordre et du premier degre // Bulletin des Sciences Mathematiques et Astronom. Paris, 1878. P. 60–200.
9. Gorbuzov V.N., Tyshchenko V.Yu. Particular integrals of systems of ordinary differential equations // Mathematical Collection. 1992. Vol. 183, No. 3. P. 76–94.
10. Ushkho D.S., Ushkho A.D. On coexistence of limit cycles and linear particular integrals of cubic differential systems on plane // Proceedings of Physical Society of Adyghea Republic. 2004. No. 9. P. 20–24. URL: http://fora.adygnet.ru
11. Cherkas L.A. On the lack of limit cycles of one equation having non-rough focus // Differential Equations. 1970. Vol. 6, No. 5. P. 779–783.
12. On one method of a research of the number of invariant straight lines for polynomial vector fields of degree n / D.S. Ushkho, A.E. Artisevich, N.A. Loboda, A.A. Panesh // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2018. Iss. 4 (231). P. 15–27. URL: http://vestnik.adygnet.ru
13. Walker R. Algebraic curves. M.: Publishing House of Foreign Literature, 1952. 236 pp.
14. Ushkho D.S. Straight isoclines and canonical forms of polynomial differential systems on the plane. Maikop, 2007. 93 pp.
15 Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. An estimate from above of the number of invariant straight lines of n-th degree polynomial vector field // News of Saratov University. New Series. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2015. Vol. 15, Iss. 2. P. 171–179.