УДК 519.63
ББК 22.161.62+22.161.68
Ч 67

Нахушева Фатима Мухамедовна
Доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики института физики и математики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: fatima-nakhusheva@mail.ru

Водахова Валентина Аркадьевна
Доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений института физики и математики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: v.a.vod@yandex.ru

Джанкулаева Мадина Амерхановна
Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики института физики и математики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: madina.dzhan@qmail.com

Гучаева Зера Хамидбиевна
Старший преподаватель кафедры алгебры и дифференциальных уравнений института физики и математики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: proporwiz@yandex.ru

Численное решение уравнения диффузии с дробной производной по времени с сосредоточенной теплоемкостью

(Рецензирована)

Аннотация. *Рассмотрено уравнение диффузии с дробной производной по времени, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины. Получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовке.*

Ключевые слова: *производная дробного порядка, устойчивость решения, априорная оценка, устойчивость разностной схемы, сосредоточенная теплоемкость.*

Nakhusheva Fatima Mukhamedovna
Associate Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Applied Mathematics and Informatics Department, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: fatima-nakhusheva@mail.ru

Vodakhova Valentina Arkadyevna
Associate Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Algebra and Differential Equations Department, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: v.a.vod@yandex.ru

Dzhankulaeva Madina Amerkhanovna
Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of Applied Mathematics and Informatics Department, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: madina.dzhan@qmail.com

Guchaeva Zera Khamidbievna
Senior Lecturer of Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: proporwiz@yandex.ru

Numerical solution of a diffusion equation with a fractional derivative in time with concentrated heat capacity

Abstract. *We consider the diffusion equation with a fractional derivative with respect to time, when the concentrated heat capacity of a certain quantity is placed on the boundary of the region. As a result, a priori estimates in the differential and difference interpretation have been obtained.*

Keywords: *fractional order derivative, solution stability, a prior estimate, stability of the difference scheme, concentrated heat capacity.*

Введение

Необходимость изучения задач для дифференциальных уравнений с дробной производной связана с тем, что многие проблемы теории фильтрации жидкости в сильнопористой (фрактальной) среде, фильтрации жидкости в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин приводят к этим уравнениям [1]. Порядок дробной производной при этом определяется размерностью фрактала. Дробные производные также применяются при описании физических процессов стохастического переноса, при изучении деформационно-прочностных свойств полимерных материалов. В связи с этим возникает необходимость исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными и разработки методов их решений.

Рассмотренные в работе условия возникают в случае, когда изучается тело с большой теплопроводностью, при решении задачи об установлении температуры в ограниченной среде при наличии нагревателя, трактуемого как сосредоточенная теплоемкость. Задачи, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины, рассмотрены А.А. Самарским [2]. Изучению уравнений с сосредоточенной теплоемкостью и методам их численного решения посвящены работы [3–7].

Постановка задачи. Априорная оценка

Будем рассматривать в области $Q_T=\{(x,t):0<x<l,\,0<t\le T\}$ уравнение диффузии с дробной производной по времени с сосредоточенной теплоемкостью:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\partial_{0t}^{\alpha}u=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-q(x,t)u+f(x,t), \qquad (1)$$

$$\begin{cases} k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}=\chi_1\partial_{0t}^{\alpha}u+\beta_1(t)u-\mu_1(t),\ x=0,\\ -k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}=\chi_2\partial_{0t}^{\alpha}u+\beta_2(t)u-\mu_2(t),\ x=l, \end{cases} \qquad (2)$$

$$u(x,0)=u_0(x), \qquad x\ge 0, \qquad (3)$$

где $\partial_{0t}^{\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\frac{u_\tau(x,\tau)d\eta}{(t-\tau)^{\alpha}}$ – регуляризованная производная в смысле Римана-Лиувилля дробного порядка α, $0<\alpha<1$ [8]. Коэффициенты уравнения и условия удовлетворяют соответственно неравенствам:

$$0<c_0\le k(x,t)\le c_1, \quad q(x,t)\ge m>0 \quad \text{и} \quad \beta_1,\beta_2\ge\beta_*>0, \quad \chi_1,\chi_2\ge 0, \quad \chi_1+\chi_2>0.$$

Будем предполагать существование достаточно гладкого решения задачи (1)–(3), а также, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям гладкости требуемого порядка.

Для получения априорной оценки решения задачи (1)–(3) применим метод энергетических неравенств. Для этого уравнение (1) умножаем скалярно на $u(x,t)$. После вычисления интегралов в полученном энергетическом тождестве с учетом граничных условий (2) получаем неравенство:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2+\int\limits_0^l\partial_{0t}^{\alpha}u\cdot u\,dx+\chi_2u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)+\chi_1u(0,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)+$$

$$+\frac{c_0}{2}\|u_x\|_0^2\le\frac{c_\varepsilon}{2}\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\|f(x,t)\|_0^2+\frac{1}{2}\mu_1^2(t)+\frac{1}{2}\mu_2^2(t). \qquad (4)$$

Здесь норма $\|u\|_0^2=\int\limits_0^l u^2dx$. Далее неравенство (4) интегрируем по τ от 0 до t. После применения известной леммы 1.1 [9, с. 152] с учетом начального условия (3) и неравенства $\int\limits_0^t\int\limits_0^l\partial_{0\tau}^{\alpha}u\cdot u\,dx\,d\tau\ge 0$ [10] получаем:

$$\|u(x,t)\|_0^2+\|u_x(x,t)\|_{2,Q_t}^2 \le M(t)\left(\|u_0(x)\|_0^2+\|f(x,t)\|_{2,Q_t}^2\right)+\int_0^t\left(\mu_1^2(\tau)+\mu_2^2(\tau)\right)d\tau, \quad (5)$$

где $M(t)$ – положительная величина, зависящая от коэффициентов уравнения и размеров области Q_T, $\|f(x,t)\|_{2,Q_t}^2=\int_0^t\|f(x,\tau)\|_0^2\,d\tau$, $\|u_x(x,t)\|_{2,Q_t}^2=\int_0^t\|u_x(x,\tau)\|_0^2\,d\tau$.

Из априорной оценки (5) следует устойчивость решения задачи (1)–(3) по входным данным.

Разностная схема. Априорная оценка

В замкнутой области $\overline{Q}_T\equiv\{(x,t):\ 0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ строим сетку $\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau=\left\{(x_i,t_j)=(ih,j\tau),\ i=0,1,...,N;\ j=0,1,...,j_0\right\}$, где $\overline{\omega}_h=\{x_i=ih,\ i=0,1,...,N\}$, $\overline{\omega}_\tau=\left\{t_j=j\tau,\ j=0,1,...,j_0\right\}$, h и τ – шаги по переменной x и t соответственно. Для задачи (1)–(3) построена разностная схема:

$$y_t+\Delta_{0t}^\alpha y=\Lambda y^{(\sigma)}-d\,y^{(\sigma)}+\varphi, \quad x\in\omega_h, \quad (6)$$

$$a_1 y_{\bar{x},1}^{(\sigma)}=\overline{\chi}_1\Delta_{0t}^\alpha y_0+\overline{\beta}_1 y_0^{(\sigma)}+\frac{h}{2}y_{t,0}-\overline{\mu}_1, \quad x=0, \quad (7)$$

$$-a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}=\overline{\chi}_2\Delta_{0t}^\alpha y_N+\overline{\beta}_2 y_N^{(\sigma)}+\frac{h}{2}y_{t,N}-\overline{\mu}_2, \quad x=l, \quad (8)$$

$$y(x,0)=u_0(x), \quad x=x_i\in\overline{\omega}_h, \quad (9)$$

где $y^{(\sigma)}=\sigma\hat{y}+(1-\sigma)y$, $\overline{\chi}_1=\chi_1+\frac{h}{2}$, $\overline{\chi}_2=\chi_2+\frac{h}{2}$, $\overline{\beta}_1=\beta_1+\frac{h}{2}d_0$, $\overline{\beta}_2=\beta_2+\frac{h}{2}d_N$, $\overline{\mu}_1=\mu_1+0{,}5h\,f_0$, $\overline{\mu}_2=\mu_2+0{,}5h\,f_N$, $a_1y_{\bar{x},1}=a_1\frac{y_1-y_0}{h}$, $a_Ny_{\bar{x},N}=a_N\frac{y_N-y_{N-1}}{h}$, $y_{t,0}=\frac{\hat{y}_0-y_0}{\tau}$, $y_{t,N}=\frac{\hat{y}_N-y_N}{\tau}$, $\hat{y}=y^{j+1}$, $y=y^j$, $\Lambda y^{(\sigma)}=\left(a\,y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_x$.

Здесь $\Delta_{0t}^\alpha y=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)y_t^s$ – разностный аналог производной дробного порядка $\partial_{0t}^\alpha u$. В классе достаточно гладких функций справедливость равенства $\partial_{0t}^\alpha u=\Delta_{0t}^\alpha u+O(\tau)$ получена в работе [11].

Разностная схема (6)–(9) аппроксимирует краевую задачу (1)–(3) с точностью порядка $O(h^2+\tau)$. При построении разностной схемы (6)–(9) потребовалась достаточно высокая гладкость решения $u(x,t)\in C^{4,2}(\overline{Q}_T)$. Такая гладкость обеспечивается, если $k(x,t)\in C^{3,1}(\overline{Q}_T)$; $q(x,t), f(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$.

Получение априорной оценки решения разностной схемы (6)–(9) проведено с помощью принципа максимума. Для этого разностную схему (6)–(9) приводим к каноническому виду [12]:

$$A(P)y(P)=\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)y(Q)+F(P),\ P\in\omega, \quad (10)$$

где ω – связная сетка; $Ш'(P)$ – окрестность узла P, не содержащая сам узел P; $F(P)$ – известная правая часть. Для коэффициентов уравнения (10) должны выполняться условия:

$$A(P)>0, \quad B(P,Q)>0, \quad D(P)=A(P)-\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)\ge 0, \quad P,Q\in\omega.$$

Рассмотрим случай, когда параметр $\sigma = 1$. В этом случае из (6) будем иметь $y_t + \Delta_{0t}^{\alpha} y = \Lambda \widehat{y} + \varphi$. Расписав его в индексной форме с учетом того, что $\frac{t_1^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha}}{\tau} = \frac{1}{\tau^{\alpha}}$, $\frac{t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha}}{\tau} = \frac{2^{1-\alpha} - 1}{\tau^{\alpha}}$, получим каноническую форму (10):

$$\left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} + \frac{1}{\tau} + \frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i \right) y_i^{j+1} = \frac{a_{i+1}}{h^2} y_{i+1}^{j+1} + \frac{a_i}{h^2} y_{i-1}^{j+1} +$$

$$+ \left(\frac{2 - 2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} + \frac{1}{\tau} \right) y_i^j + \frac{2^{1-\alpha} - 1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} \, y_i^{j-1} - \sum_{s=0}^{j-2} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha} \right) y_t^s + \varphi_i^j .$$

Здесь коэффициенты равны:

$$A(P) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} + \frac{1}{\tau} + \frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i ,$$

$$\sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q) = \frac{a_{i+1}}{h^2} + \frac{a_i}{h^2} + \frac{2 - 2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} + \frac{1}{\tau} + \frac{2^{1-\alpha} - 1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}, \qquad D\left(P\left(x_i, t_{j+1}\right)\right) = d_i .$$

Так как по условию имеем $d_i \geq m > 0$, то для разностного уравнения (6) выполняются необходимые условия:

$$A(P) > 0, \qquad B(P,Q) > 0, \qquad D(P) > 0. \tag{11}$$

В точке $P = P(x_0, t_{j+1})$ для краевого условия (7), расписав его в индексной форме, будем иметь соответствующую каноническую форму:

$$\left(\frac{\overline{\chi}_1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} + \frac{a_1}{h} + \overline{\beta}_1 + \frac{h}{2\tau} \right) y_0^{j+1} = \frac{a_1}{h} y_1^{j+1} +$$

$$+ \left(\frac{\overline{\chi}_1 \left(2 - 2^{1-\alpha}\right)}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} + \frac{h}{2\tau} \right) y_0^j + \frac{\overline{\chi}_1 \left(2^{1-\alpha} - 1\right)}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} y_0^{j-1} - \overline{\chi}_1 \sum_{s=0}^{j-2} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha} \right) \frac{y_0^{s+1} - y_0^s}{\tau} + \overline{\mu}_1 .$$

Здесь коэффициенты равны:

$$A(P) = \frac{\overline{\chi}_1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} + \frac{a_1}{h} + \overline{\beta}_1 + \frac{h}{2\tau} ,$$

$$B(P,Q) = \left\{ \frac{a_1}{h}, \frac{\overline{\chi}_1 \left(2 - 2^{1-\alpha}\right)}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}, \frac{h}{2\tau}, \frac{\overline{\chi}_1 \left(2^{1-\alpha} - 1\right)}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} \right\}, \qquad D\left(P\left(x_0, t_{j+1}\right)\right) = \overline{\beta}_1 .$$

С учетом неравенств $d_i \geq m > 0$, $\beta_1 \geq \beta_* > 0$, $\chi_1 \geq 0$ имеем выполнение необходимых условий на коэффициенты для краевого условия (7):

$$A(P) > 0, \qquad B(P,Q) > 0, \qquad D(P(x_0, t_{j+1})) > 0. \tag{12}$$

Аналогично, в точке $P = P(x_N, t_{j+1})$ для граничного условия (8), расписав его в индексной форме, будем иметь соответствующую каноническую форму записи:

$$\left(\frac{\overline{\chi}_2}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} + \frac{a_N}{h} + \overline{\beta}_2 + \frac{h}{2\tau} \right) y_N^{j+1} = \frac{a_N}{h} y_{N-1}^{j+1} +$$

$$+ \left(\frac{\overline{\chi}_2 \left(2^{1-\alpha} - 2\right)}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} + \frac{h}{2\tau} \right) y_N^j + \frac{\overline{\chi}_2 \left(2^{1-\alpha} - 1\right)}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} y_N^{j-1} - \overline{\chi}_2 \sum_{s=0}^{j-2} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha} \right) \frac{y_N^{s+1} - y_N^s}{\tau} + \overline{\mu}_2 .$$

Здесь коэффициенты имеют вид:

$$A(P)=\frac{\overline{\chi}_2}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}+\frac{a_N}{h}+\overline{\beta}_2+\frac{h}{2\tau}\ ,$$

$$B(P,Q)=\left\{\frac{a_N}{h},\ \frac{\overline{\chi}_2\left(2-2^{1-\alpha}\right)}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}},\frac{h}{2\tau},\frac{\overline{\chi}_2\left(2^{1-\alpha}-1\right)}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}\right\},\qquad D\left(P\left(x_N,t_{j+1}\right)\right)=\overline{\beta}_2\,.$$

С учетом неравенств $d_N\ge m>0$, $\beta_2\ge\beta_*>0$, $\chi_2\ge0$ имеем выполнение необходимых условий на коэффициенты для краевого условия (8):

$$A\left(P\right)>0\,,\qquad B\left(P,Q\right)>0\,,\qquad D(P(x_N,t_{j+1}))>0\,. \tag{13}$$

Из полученных неравенств (11)–(13) на основании теоремы 3 [12, с. 228] следует справедливость априорной оценки решения разностной схемы (6)–(9):

$$\left\|y\right\|_C\le\left\|\frac{F(P)}{D(P)}\right\|_C\ , \tag{14}$$

где норма $\|\,y\,\|_C=\max\limits_{\omega}|\,y\,|$. Из неравенства (14) следует устойчивость решения разностной схемы (6)–(9) в равномерной метрике.

Алгоритм численного решения задачи

Разностную схему (6)–(9) приводим к расчетному виду:

$$\begin{cases} y_0^{j+1}=\gamma_1 y_1^{j+1}+\nu_1,\ i=0,\\ A_i y_{i-1}^{j+1}-C_i y_i^{j+1}+B_i y_{i+1}^{j+1}=-F_i^{\,j},\ i=1,2,....,N-1,\\ y_N^{j+1}=\gamma_2 y_{N-1}^{j+1}+\nu_2,\ i=N,\end{cases} \tag{15}$$

$$y_i^0=u_0(x_i)\,,\quad i=0,1,2,....,N, \tag{16}$$

где $A_i=\dfrac{a_i}{h^2}$, $B_i=\dfrac{a_{i+1}}{h^2}$, $C_i=\dfrac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\tau^{\alpha}}+\dfrac{1}{\tau}+\dfrac{a_i+a_{i+1}}{h^2}+d_i$,

$$F_i^{\,j}=\frac{1}{\tau}y_i^j+\frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\tau^{\alpha}}y_i^j-\frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)}\sum_{s=0}^{j-1}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\frac{y_i^{s+1}-y_i^s}{\tau}+\varphi_i^{\,j}\,,$$

$$\gamma_1=\frac{\dfrac{a_1}{h}}{\dfrac{a_1}{h}+\dfrac{\overline{\chi}_1\left(t_1^{1-\alpha}-t_0^{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\tau}+\overline{\beta}_1+\dfrac{h}{2\tau}},\qquad \gamma_2=\frac{\dfrac{a_N}{h}}{\dfrac{a_N}{h}+\dfrac{\overline{\chi}_2\left(t_1^{1-\alpha}-t_0^{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\tau}+\overline{\beta}_2+\dfrac{h}{2\tau}}\,,$$

$$\nu_1=\frac{\left(\dfrac{\overline{\chi}_1\left(t_1^{1-\alpha}-t_0^{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\tau}+\dfrac{h}{2\tau}\right)y_0^j+\overline{\mu}_1-\dfrac{\overline{\chi}_1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)}\displaystyle\sum_{s=0}^{j-1}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\frac{y_0^{s+1}-y_0^s}{\tau}}{\dfrac{a_1}{h}+\dfrac{\overline{\chi}_1\left(t_1^{1-\alpha}-t_0^{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\tau}+\overline{\beta}_1+\dfrac{h}{2\tau}}\,,$$

$$\nu_2=\frac{\left(\dfrac{\overline{\chi}_2\left(t_1^{1-\alpha}-t_0^{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\tau}+\dfrac{h}{2\tau}\right)y_N^j+\overline{\mu}_2-\dfrac{\overline{\chi}_2}{\Gamma\left(2-\alpha\right)}\displaystyle\sum_{s=0}^{j-1}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\frac{y_N^{s+1}-y_N^s}{\tau}}{\dfrac{a_N}{h}+\dfrac{\overline{\chi}_2\left(t_1^{1-\alpha}-t_0^{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\tau}+\overline{\beta}_2+\dfrac{h}{2\tau}}\,.$$

Система разностных уравнений (15) решается методом прогонки на каждом временном слое для всех значений $j = 0,1,...., j_0 - 1$.

Отметим сложность программирования при численном решении начально-краевых задач с дробной производной. В правую часть F_i^j уравнения и в ν_1, ν_2 входят значения функции y со всех предыдущих слоев, начиная от 0 до значения j. Понятно, что с ростом значения j на их вычисление затрачивается все больше времени. Такова особенность разностных схем, аппроксимирующих задачи с производными дробного порядка. В этом и состоит необходимость поиска «быстрых» алгоритмов решения уравнений, содержащих производные дробного порядка.

Алгоритм численного решения задачи (1)–(3) проверен на тестовом примере. Для различных значений числа разбиений N по пространственной переменной и j_0 по временной переменной получены результаты численного решения исходной задачи в случае, когда порядок дробной производной равен $\alpha = 1/2$.

Проведенный анализ полученных численных результатов подтверждает точность построенной разностной схемы.

Для $N = 10$ и $j_0 = 10$ значение погрешности $z = \max\limits_{i,j} \left| y_i^j - u\left(x_{i,} t_j\right) \right| = 0{,}1612$;

при $N = 20,\ j_0 = 40 - z = 0{,}0404$;

при $N = 50,\ j_0 = 50 - z = 0{,}0323$;

при $N = 100,\ j_0 = 200 - z = 0{,}0081$;

при $N = 100,\ j_0 = 100 - z = 0{,}0162$.

Примечания:

1. Нигматуллин Р.Р. Решение обобщенного уравнения переноса в среде с фрактальной геометрией = The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // Phys. Status Solidi. 1986. Vol. 133. P. 425–430.
2. Самарский А.А. Об одной задаче распространения тепла // Избранные труды А.А. Самарского. Москва: МАКС Пресс, 2003. С. 1–22.
3. Керефов М.А., Нахушева Ф.М., Геккиева С.Х. Краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера-Лыкова с сосредоточенной теплоемкостью // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24, № 3. С. 23–29.
4. Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью / Ф.М. Нахушева, В.А. Водахова, Ф.Х. Кудаева, З.В. Абаева // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2. С. 763.
5. Нахушева Ф.М., Джанкулаева М.А., Нахушева Д.А. Уравнение теплопроводности с дробной производной по времени с сосредоточенной теплоемкостью // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2017. № 8 (ч. 1). С. 22–27.
6. Разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью / Ф.М. Нахушева, Ф.Х. Кудаева, А.А. Кайгермазов, М.М. Кармоков // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2-2. С. 839.
7. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью / М.Х. Шхануков-Лафишев, Ф.М. Нахушева, М.М. Лафишева, М.М. Мамбетова // Владикавказский математический журнал. 2013. Т. 15 (4).

References:

1. Nigmatullin R.R. The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // Phys. Status Solidi. 1986. Vol. 133. P. 425–430.
2. Samarsky A.A. On a problem of heat distribution // Selected Works of A.A. Samarsky. Moscow: MAKS Press. 2003. P. 1–22.
3. Kerefov M.A., Nakhusheva F.M., Gekkieva S.Kh. The boundary value problem for the generalized moisture transfer equation of Aller-Lykov with a concentrated heat capacity // Bulletin of Samara University. Natural Science Series. 2018. Vol. 24, No. 3. P. 23–29.
4. Local-one-dimensional scheme for fractional-order diffusion equation with a concentrated heat capacity / F.M. Nakhusheva, V.A. Vodakhova, F.Kh. Kudaeva, Z.V. Abaeva // Modern Problems of Science and Education. 2015. No. 2. P. 763.
5. Nakhusheva F.M., Dzhankulaeva M.A., Nakhusheva D.A. The heat equation with a fractional time derivative with a concentrated heat capacity // International Journal of Applied and Fundamental Research. 2017. No. 8 (Pt. 1). P. 22–27.
6. Difference scheme for diffusion equation of fractional order with a concentrated heat capacity / F.M. Nakhusheva, F.Kh. Kudaeva, A.A. Kaygermazov, M.M. Karmokov // Modern Problems of Science and Education. 2015. No. 2-2. P. 839.
7. Local one-dimensional scheme for the heat equation with a concentrated heat capacity / M.Kh. Shkhanukov-Lafishev, F.M. Nakhusheva, M.M. Lafisheva, M.M. Mambetova // Vladikavkaz Mathematical Journal. 2013. Vol. 15 (4). P. 58–64.

С. 58–64.

8. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1997. 688 с.
9. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
10. Шогенов В.Х., Кумыкова С.К., Шхануков М.Х. Обобщенное уравнение переноса и дробные производные // Доклады АМАН. 1996. Т. 2, № 1. С. 43–45.
11. Шхануков М.Х. О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений с дробной производной // Доклады РАН. 1996. Т. 348. С. 746–748.
12. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977. 616 с.

8. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Science and Technology, 1997. 688 pp.
9. Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems of mathematical physics. M.: Nauka, 1973. 407 pp.
10. Shogenov V.Kh., Kumykova S.K., Shkhanukov M.Kh. The generalized transport equation and fractional derivatives // Reports of AMAN. 1996. Vol. 2, No. 1. P. 43–45.
11. Shkhanukov M.Kh. On the convergence of difference schemes for differential equations with a fractional derivative // Reports of the Russian Academy of Sciences. 1996. Vol. 348. P. 746–748.
12. Samarsky A.A. Theory of difference schemes. Moscow: Nauka, 1977. 616 pp.