УДК 512.647+517.373
ББК 22.143+22.161.12
К 59

Козлов Владимир Анатольевич
Доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и методики их преподавания Армавирского государственного педагогического университета, Армавир, e-mail: shagin196@yandex.ru
Паланджянц Левон Жирайрович
Доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и системного анализа Майкопского государственного технологического университета, Майкоп, тел. (8772) 570353, e-mail: levonmgtu@rambler.ru

О структуре подалгебры полиномиальных мультипликативно интегрируемых матричных функций второго порядка. V

(Рецензирована)

Аннотация. *Продолжается изучение задачи о полиномиальных криволинейных мультипликативных интегралах. При этом выявляется структура подалгебры мультипликативно интегрируемых матричных функций второго порядка. Исследование проводится по степеням полиномиальных кривых.*
Ключевые слова: *алгебра Ли, линейный мультипликативный интеграл, мультипликативная интегрируемость, матричные функции.*

Kozlov Vladimir Anatolyevich
Associate Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Mathematics, Physics and Methodology of Teaching, Armavir State Pedagogical University, Armavir, e-mail: shagin196@yandex.ru
Palandzhyants Levon Zhirayrovich
Associate Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Mathematics, Physics and System Analysis Department, Maikop State University of Technology, Maikop, ph. (8772) 570353, e-mail: levonmgtu@rambler.ru

On subalgebra structure of polynomial multiplicatively integrated matrix functions of the second order. V

Abstract. *We continue to study the problem of polynomial curvilinear multiplicative integrals. In this work we reveal structure of subalgebra of multiplicatively integrated matrix functions of the second order. The study is carried out in degrees of polynomial curves.*
Keywords: *Lie algebra, linear multiplicative integral, multiplicative integrability, matrix functions.*

1. Постановка задачи. Полиномиальным криволинейным мультипликативным интегралом называется мультипликативный интеграл

$$\overset{\frown}{\int_c} E + P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,, \tag{1}$$

вдоль параметрически заданной кривой $c: x = x_n(t),\ \ y = y_m(t)$, n, m – натуральные числа, $t \in R$, $(x,y) \in R^2$; $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – непрерывные полиномиальные матричные функции второго порядка.

Подынтегральную функцию интеграла (1) называют полиномиальной мультипликативно интегрируемой, если интеграл (1) вычисляется в конечном виде. Множество таких подынтегральных функций обозначим через $M(P,Q)$.

Мы рассматриваем матричные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ второго порядка, $P(x,y), Q(x,y) \in sl(2,R)$ – алгебра Ли матричных функций второго порядка со следом нуль.

Наша цель заключается в изучении структуры алгебры $M(P,Q)$ при малых степенях подынтегральной матричной функции. Исследование ведется индуктивно по степеням n и m полиномиальных кривых $c: x = x_n(t),\ \ y = y_m(t)$, вдоль которых берется интеграл.

Пусть

$$P(x,y)=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{pmatrix}\cdot y,\quad Q(x,y)=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{pmatrix}\cdot y,$$

$\alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_{ij}\delta_{ij}\in R,\quad i,j=1{,}2$, – линейные относительно x и y подынтегральные матричные функции.

Вдоль кривой $c: x=x_n(t),\ y=y_m(t)$ криволинейный мультипликативный интеграл (1) превращается в обыкновенный мультипликативный интеграл

$$Y(t)=\overset{\frown}{\int} E+A(t)dt, \tag{1}$$

где $A(t)=\left(P(x_n(t),y_m(t))x_n'(t)+Q(x_n(t),y_m(t))y_m'(t)\right)$.

При этом $spA(t)=0$, $\int spA(t)dt=\text{const}$, $\det Y(t)=\text{const}$ (см., например [1]).

Первообразная интеграла (1) $Y(t)$ удовлетворяет уравнению $Y'=A(t)Y$.

Структура алгебры $M(P,Q)$ при $n,m\le 2$ изучена в работах [1–4] (случаи 1–5). Здесь исследуем случаи $n=3,\ m=0$ и $n=0,\ m=3$.

2. Решение поставленной задачи

Случай 6. Пусть $\deg x_n(t)=3,\quad \deg y_m(t)=0$.

Тогда $c:\begin{cases}x(t)=a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0,\\ y(t)=b_0.\end{cases}$

Не ограничивая общности, можно считать, что $a_3\ne 0$, $b_0\ne 0$.

Тогда

$$A(t)=(3(\alpha_{ij})a_3^2)t^5+(5(\alpha_{ij})a_2a_3t^4+(\alpha_{ij})(4a_1a_2+2a_2^2)t^3+(\alpha_{ij})(3a_1a_2+3a_0a_3)+$$
$$+(\beta_{ij})3a_3b_0)t^2+((\alpha_{ij})(a_1^2+2a_0a_2)+(\beta_{ij})a_2b_0)t+((\alpha_{ij})a_0a_1+(\beta_{ij})a_1b_0),\quad i,j=1{,}2.$$

По условию $A(t)\in sl(2,R)$, следовательно, $spA(t)=0$,

$$\begin{cases}\alpha_{11}+\alpha_{22}=0,\\ \beta_{11}+\beta_{22}=0.\end{cases} \tag{2}$$

Перейдем к решению уравнения $Y'=A(t)Y$ относительно Y.

Из уравнения $Y'=A(t)Y$ получаем $Y'Y^{-1}=A(t)$.

Поскольку $\deg A(t)=5$, то $\deg Y(t)=3$. Положим $Y(t)=c_{ij}t^3+d_{ij}t^2+e_{ij}t+f_{ij}$, $i,j=1{,}2$. Найдем произведение $A(t)Y(t)$:

$$A(t)Y(t)=(\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j})3a_3^2t^8+((\alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j})3a_3^2+(\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j})5a_2a_2)t^7+$$
$$+((\alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j})3a_3^2+(\alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j})5a_2b_3+(\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j})\cdot(4a_1a_3+2a_2^2))t^6+$$
$$=((\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j})3a_3^2+(\alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j})5a_2a_3+(\alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j})(4a_1a_3+2a_2^2)+$$
$$+(\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j})(3a_1a_2+3a_0a_3)+(\beta_{i1}c_{1j}+\beta_{i2}c_{2j})3a_3b_0)t^5+((\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})5a_2a_3+$$
$$+(\alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j})(4a_1a_3+2a_2^2)+((\alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j})(3a_1a_2+3a_0a_3)+(\beta_{i1}d_{1j}+\beta_{i2}d_{2j})3a_2b_0+$$
$$+(\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j})(a_1^2+2a_0a_2)+(\beta_{i1}c_{1j}+\beta_{i2}c_{2j})2a_2b_0)t^4+$$
$$+((\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})(4a_1a_3+2a_2^2)+(\alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j})(3a_1a_2+3a_0a_2)+$$

$$+(\beta_{i1}e_{1j}+\beta_{i2}e_{2j})3a_3b_0+(\alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j})(a_1^2+2a_0a_2)+$$

$$+(\beta_{i1}d_{1j}+\beta_{i2}d_{2j})2a_2b_0+(\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j})a_0a_1+(\beta_{i1}c_{1j}+\beta_{i2}c_{2j})a_1b_0)t^3+$$

$$+((\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})(3a_1a_2+3a_0a_3)+(\beta_{i1}f_{1j}+\beta_{i2}f_{2j})3a_3b_0+$$

$$+(\alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j})(a_1^2+2a_0a_2)+(\beta_{i1}e_{1j}+\beta_{i2}e_{2j})2a_2b_0+$$

$$+(\alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j})a_0a_1+(\beta_{i1}d_{1j}+\beta_{i2}d_{2j})a_1b_0)t^2+$$

$$+(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})(a_1^2+2a_0a_2)+(\beta_{i1}f_{1j}+\beta_{i2}f_{2j})2a_2b_0+$$

$$+(\alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j})a_0a_1+(\beta_{i1}e_{1j}+\beta_{i2}e_{2j})a_1b_0)t+$$

$$+(\alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j})a_0a_1+(\beta_{i1}e_{1j}+\beta_{i2}e_{2j})a_1b_0)t+$$

$$+(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})a_0a_1+(\beta_{i1}f_{1j}+\beta_{i2}f_{2j})a_1b_0. \tag{3}$$

Вычислим производную $Y'(t)=3(c_{ij})t^2+2(d_{ij})t+(e_{ij})$.

Уравнение $A(t)Y(t)=Y'(t)$ равносильно системе ($a_3\neq 0$, $b_0\neq 0$):

$$\begin{aligned}
&\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j}=0,\\
&(\alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j})3a_3+(\alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j})5a_2=0,\\
&(\alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j})3a_3^2+(\alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j})5a_2a_3+(\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j})(4a_1a_3+2a_2^2)=0,\\
&(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})3a_3^2+(\alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j})5a_2a_3+(\alpha_{i1}d_{1j}+\beta_{i2}d_{2j})(4a_1a_3+2a_2^2)+\\
&+(\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j})(3a_1a_2+3a_0a_3)+(\beta_{i1}c_{1j}+\beta_{i2}c_{2j})3a_3b_0=0,\\
&(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})5a_2a_3+(\alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j})(4a_1a_3+2a_2^2)+(\alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j})(3a_1a_2+3a_0a_3)+\\
&+(\beta_{i1}f_{1j}+\beta_{i2}f_{2j})3a_2b_0+(\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j})(a_1^2+2a_0a_2)+(\beta_{i1}c_{1j}+\beta_{i2}c_{2j})2a_2b_0=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})(4a_1a_3+2a_2^2)+(\alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j})(3a_1a_2+3a_0a_3)+(\beta_{i1}e_{1j}+\beta_{i2}e_{2j})3a_3b_0+\\
&+(\alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j})(a_1^2+2a_0a_2)+(\beta_{i1}d_{1j}+\beta_{i2}d_{2j})2a_2b_0+(\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j})a_0a_1+\\
&+(\beta_{i1}c_{1j}+\beta_{i2}c_{2j})a_1b_0=0,\\
&+(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})(3a_1a_2+3a_0a_3)+(\beta_{i1}f_{1j}+\beta_{i2}f_{2j})3a_3b_0+(\alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j})(a_1^2+2a_0a_2)+\\
&+(\beta_{i1}e_{1j}+\beta_{i2}e_{2j})2a_2b_0+(\alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j})a_0a_1+(\beta_{i1}d_{1j}+\beta_{i2}d_{2j})a_1b_0=3(c_{ij}),\\
&(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})a_0a_1+(\beta_{i1}f_{1j}+\beta_{i2}f_{2j})a_1b_0=(e_{ij}).
\end{aligned} \tag{4}$$

Систему (4) преобразуем с учетом равенства $\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j}=0$.

Тогда система уравнений (4) примет вид:

$$\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j}=0,\quad \alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j}=0,\quad \alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j}=0,$$

$$(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})a_3+(\beta_{i1}c_{1j}+\beta_{i2}c_{2j})b_0=0,$$

$$(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})5a_3+(\beta_{i1}d_{1j}+\beta_{i2}d_{2j})3b_0+(\beta_{i1}c_{1j}+\beta_{i2}c_{2j})2b_0=0,$$

$$(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})(4a_1a_3+2a_2^2)+(\beta_{i1}e_{1j}+\beta_{i2}e_{2j})3a_3b_0+(\beta_{i1}d_{1j}+\beta_{i2}d_{2j})2a_2b_0+$$

$$+(\beta_{i1}c_{1j}+\beta_{i2}c_{2j})a_1b_0=0, \tag{5}$$

$$-3(c_{ij})+(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})(3a_1a_2+3a_0a_3)+(\beta_{i1}f_{1j}+\beta_{i2}f_{2j})3a_3b_0+(\beta_{i1}e_{1j}+\beta_{i2}e_{2j})2a_2b_0+$$

$$+(\beta_{i1}d_{1j}+\beta_{i2}d_{2j})a_1b_0=0,$$

$$-2(d_{ij})+(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})(a_1^2+2a_0a_2)+(\beta_{i1}f_{1j}+\beta_{i2}f_{2j})2a_2b_0+(\beta_{i1}e_{1j}+\beta_{i2}e_{2j})a_1b_0=0,$$

$$-(e_{ij})+(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})a_0a_1+(\beta_{i1}f_{1j}+\beta_{i2}f_{2j})a_1b_0=0.$$

Систему (5) представим в более удобном, равносильном виде. При этом заметим, что каждую пару уравнений из первых трех $(i=1,\ i=2)$ можно считать одним уравнением, поскольку

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}=\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}, \qquad (6)$$

иначе получим нулевое решение.

В системе (5) используем обозначения:

$$c_\alpha=\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j};\quad c_\beta=\beta_{i1}c_{1j}+\beta_{i2}c_{2j};\quad d_\alpha=\alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j};\quad d_\beta=\beta_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j};$$

$$e_\alpha=\alpha_{i1}e_{1j}+\alpha_{i2}e_{2j};\quad e_\beta=\beta_{i1}e_{1j}+\beta_{i2}e_{2j};\quad f_\alpha=\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j};\quad f_\beta=\beta_{i1}f_{1j}+\beta_{i2}f_{2j}.$$

Приведем систему (5) к ступенчатому виду:

$$Mz=0, \qquad (7)$$

где $z=(c_\alpha,c_\beta,d_\alpha,d_\beta,e_\alpha,e_\beta,f_\alpha,f_\beta,c_{ij},d_{ij},e_{ij})$.

Выпишем ненулевые элементы матрицы M:

$$M_{11}=1,\quad M_{22}=1,\quad M_{33}=1,\quad M_{41}=b_0,\quad M_{47}=a_3,\quad M_{52}=b_0,\quad M_{57}=a_3,$$

$$M_{66}=3a_3b_0,\quad M_{67}=3a_1a_3+2a_2^2-2a_2a_3,\quad M_{77}=3a_1a_2a_3+3a_3^2(3a_0-a_1)+4a_2^2(a_3-a_2),$$

$$M_{78}=9a_3^2b_0,\quad M_{79}=-9a_3,\quad M_{87}=a_2a_3(3a_0+a_1)-a_1a_2^2,\quad M_{88}=3a_2a_3b_0,$$

$$M_{8,10}=-3a_3,\quad M_{97}=a_0a_1,\quad M_{98}=a_1b_0,\quad M_{9,11}=-1.$$

3. Систему (7) разобьем на три группы. К первой группе отнесем уравнения, содержащие только переменные e_{ij} или e_{ij} и f_{ij}. При этом, возвращаясь к прежним обозначениям, получаем:

$$\alpha_{11}e_{1j}+\alpha_{12}e_{2j}=0,$$

$$3a_3b_0(\beta_{i1}e_{1j}+\beta_{i2}e_{2j})+(3a_1a_3+2a_2^2-2a_2a_3)(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})=0,$$

$$-e_{ij}+a_0a_1(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})+a_1b_0(\beta_{i1}f_{1j}+\beta_{i2}f_{2j})=0.$$

После преобразования системы получаем:

$$\alpha_{11}e_{1j}+\alpha_{12}e_{2j}=0,$$

$$3a_3b_0\beta_{i1}e_{1j}+3a_3b_0\beta_{i2}e_{2j}+(3a_1a_3+2a_2^2-2a_2a_3)\alpha_{i1}f_{1j}+(3a_1a_3+2a_2^2-2a_2a_3)\alpha_{i2}f_{2j}=0,$$

$$-e_{1j}+(a_0a_1\alpha_{11}+a_1b_0\beta_{11})f_{1j}+(a_0a_1\alpha_{12}+a_1b_0\beta_{12})f_{2j}=0, \qquad (8)$$

$$-e_{2j}+(a_0a_1\alpha_{21}+a_1b_0\beta_{21})f_{1j}+(a_0a_1\alpha_{22}+a_1b_0\beta_{22})f_{2j}=0.$$

В системе (8) обозначим через (i,j) коэффициенты при переменных, расположенных в i-м уравнении и имеющих j-й порядковый номер. Тогда система (8) примет вид:

$$-e_{1j}+(1{,}3)f_{1j}+(1{,}4)f_{2j}=0, \qquad (9)$$

$$-e_{2j}+(2{,}3)f_{1j}+(2{,}4)f_{2j}=0,$$

$$\alpha_{11}e_{1j}+\alpha_{12}e_{2j}=0,$$

$$(4{,}1)e_{1j}+(4{,}2)e_{2j}+(4{,}3)f_{1j}+(4{,}4)f_{2j}=0.$$

Приведем матрицу системы (9) к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & (1,3) & (1,4) \\ 0 & -1 & (2,3) & (2,4) \\ 0 & 0 & \alpha_{11}(1,3)+\alpha_{12}(2,3) & \alpha_{11}(1,4)+\alpha_{12}(2,4) \\ 0 & 0 & (4,1)(1,3)+(4,3)+(4,2)(2,3) & (4,1)(1,4)+(4,4)+(4,2)(2,4) \end{pmatrix}.$$

Для существования ненулевого решения необходимо и достаточно наличие пропорциональности последних двух строк матрицы.

В связи с условием $spA(t)=0$: $\alpha_{11}+\alpha_{22}=0$, $\beta_{11}+\beta_{22}=0$ и принятым условием (6) получаем соотношения:

$$\frac{\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}}{3a_1a_3b_0\beta_{i1}(a_0\alpha_{11}+b_0\beta_{11})+(3a_1a_3+2a_2^2-2a_2a_3)\alpha_{i1}+3a_1a_3b_0\beta_{i2}(a_0\alpha_{21}+b_0\beta_{21})}=$$

$$=\frac{\alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}}{3a_1a_3b_0\beta_{i1}(a_0\alpha_{12}+b_0\beta_{12})+(3a_1a_3+2a_2^2-2a_2a_3)\alpha_{i2}+3a_1a_3b_0\beta_{i2}(a_0\alpha_{22}+b_0\beta_{22})}$$

при $i,j=1,2$. (10)

Система (8) тогда примет вид (с учетом (10)):

$$\begin{gathered} -e_{1j}+(a_0a_1\alpha_{11}+a_1b_0\beta_{11})f_{1j}+(a_0a_1\alpha_{12}+a_1b_0\beta_{12})f_{2j}=0, \\ -e_{2j}+(a_0a_1\alpha_{21}+a_1b_0\beta_{21})f_{1j}+(a_0a_1\alpha_{22}+a_1b_0\beta_{22})f_{2j}=0, \\ (\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21})f_{1j}+(\alpha_{12}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22})f_{2j}=0. \end{gathered} \tag{11}$$

Решим систему (11).

Переменные f_{2j} будем считать свободными. Тогда $f_{1j}=-\dfrac{\alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}}{\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}}f_{2j}$. Подставляя последовательно выражение f_{1j} во второе, а затем в первое уравнения системы (11), после преобразований получаем:

$$e_{2j}=a_1\alpha_{11}\left(-a_0-\frac{a_0(\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{21}\beta_{12})-b_0(\beta_{11}\beta_{22}+\beta_{21}\beta_{12})}{\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}}\right)f_{2j};$$

$$e_{2j}=a_1\alpha_{11}\left(-a_0-\frac{\begin{vmatrix} a_0 & \beta_{21} & \beta_{22} \\ -b_0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ 0 & \beta_{11} & \beta_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}}\right)f_{2j};$$

$$e_{2j}=a_1\alpha_{12}\left(a_0+\frac{a_0(\alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{11}\beta_{22})-b_0(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})}{\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}}\right)f_{2j};$$

$$e_{2j}=a_1\alpha_{12}\left(a_0+\frac{\begin{vmatrix} a_0 & \beta_{21} & \beta_{22} \\ -b_0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ 0 & \beta_{11} & \beta_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}}\right)f_{2j}.$$

В преобразованиях использованы условия $\begin{cases}\alpha_{11}+\alpha_{22}=0,\\ \beta_{11}+\beta_{22}=0\end{cases}$ и $\dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}=\dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}$.

Соотношения (10) приводятся к виду:

$$\frac{\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}}{3a_1a_3b_0\beta_{i1}(a_0(\alpha_{12}\beta_{i1}+\alpha_{22}\beta_{i2})+b_0(\beta_{11}\beta_{i1}+\beta_{21}\beta_{i2})\alpha_{i1}+3(a_1a_3+2a_2^2-2a_2a_3)\alpha_{i1}}=$$

$$=\frac{\alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}}{3a_1a_3b_0(a_0(\alpha_{12}\beta_{i1}+\alpha_{22}\beta_{i2})+b_0(\beta_{12}\beta_{i1}+\beta_{12}\beta_{i2})+(3a_1a_3+2a_2^2-2a_2a_3)\alpha_{i2}}$$

или

$$3a_1a_3b_0\frac{\begin{vmatrix} a_0 & \beta_{21} & \beta_{22}\\ -b_0 & \alpha_{21} & \alpha_{22}\\ 0 & \beta_{i1} & \beta_{i2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \beta_{11}\\ \alpha_{22} & \beta_{21}\end{vmatrix}}+(3a_1a_3+2a_2^2-2a_2a_3)\alpha_{i1}=$$

$$=3a_1a_3b_0\frac{\begin{vmatrix} a_0 & \beta_{12} & \beta_{11}\\ -b_0 & \alpha_{12} & \alpha_{11}\\ 0 & \beta_{i2} & \beta_{i1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \beta_{12}\\ \alpha_{22} & \beta_{22}\end{vmatrix}}+(3a_1a_3+2a_2^2-2a_2a_3)\alpha_{i2}.$$

Введем обозначения:

$$\delta_1=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{vmatrix},\quad \delta_2=\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \beta_{22}\\ \alpha_{22} & \beta_{22}\end{vmatrix},\quad \Delta_i^1(a,b)=\begin{vmatrix} a_0 & \beta_{21} & \beta_{22}\\ -b_0 & \alpha_{21} & \alpha_{22}\\ 0 & \beta_{i1} & \beta_{i2}\end{vmatrix},\quad \Delta_i^2(a,b)=\begin{vmatrix} a_0 & \beta_{12} & \beta_{11}\\ -b_0 & \alpha_{12} & \alpha_{11}\\ 0 & \beta_{i2} & \beta_{i1}\end{vmatrix}.$$

Тогда общее решение системы (8) можно записать в виде:

$$e_{1j}=a_1\alpha_{12}\left(a_0+\frac{\Delta_1^1(a,b)}{\delta_1}\right)f_{2j},$$

$$e_{2j}=a_1\alpha_{11}\left(-a_0-\frac{\Delta_1^1(a,b)}{\delta_1}\right)f_{2j}, \tag{12}$$

$$f_{1j}=\frac{\delta_2}{\delta_1}f_{2j},$$

при условии, что выполнены соотношения:

$$\frac{3a_1a_3b_0\Delta_i^1+(3a_1a_3+2a_2^2-2a_2a_3)\alpha_{i1}}{-\delta_1}=\frac{3a_1a_3b_0\Delta_i^2+(3a_1a_3+2a_2^2-2a_2a_3)\alpha_{i2}}{\delta_2}. \tag{13}$$

Соотношения (13) вместе с общим решением (12) определяют структуру искомой подалгебры, соответствующей данной группе уравнений.

4. Ко второй группе уравнений системы (7) отнесем уравнения, содержащие d_{ij} либо d_{ij} и f_{ij}:

$$-3a_3d_{ij}+a_2a_3(3a_0+a_1)-a_1a_2^2)(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})+3a_1a_3b_0(\beta_{i1}f_{1j}+\beta_{i2}f_{2j})=0,$$

$$b_0(\beta_{i1}d_{1j}+\beta_{i2}d_{2j})+a_3(\alpha_{i1}f_{1j}+\alpha_{i2}f_{2j})=0,$$

$$\alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j}=0.$$

В силу условия $\dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}=\dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}$ положим $i=1$ в последнем уравнении:

$$\begin{gathered}
-3a_3d_{1j}+((a_2a_3(3a_0+a_1)-a_1a_2^2)\alpha_{11}+3a_2a_3b_0\beta_{11})f_{1j}+\\
+((a_2a_3(3a_0+a_1)-a_1a_2^2)\alpha_{12}+3a_2a_3b_0\beta_{12})f_{2j}=0,\\
-3a_3d_{2j}+((a_2a_3(3a_0+a_1)-a_1a_2^2)\alpha_{21}+3a_2a_3b_0\beta_{12})f_{1j}+\\
+((a_2a_3(3a_0+a_1)-a_1a_2^2)\alpha_{22}+3a_2a_3b_0\beta_{22})f_{2j}=0,\\
b_0\beta_{i1}d_{1j}+b_0\beta_{i2}d_{2j}+a_3\alpha_{i1}f_{1j}+a_3\alpha_{i2}f_{2j}=0,\\
\alpha_{i1}d_{1j}+\alpha_{i2}d_{2j}=0.
\end{gathered}\tag{14}$$

Как и в пункте 3 примем обозначения: через (i,j) обозначим коэффициент при переменной, расположенной в i-м уравнении и j-м столбце в принятом в (14) порядке.

Тогда система (14) перепишется в виде:

$$\begin{gathered}
-3a_3d_{1j}+(1,3)f_{1j}++(1,4)f_{2j}=0,\\
-3a_3d_{2j}+(2,3)f_{1j}++(2,4)f_{2j}=0,\\
(3,1)d_{1j}+(3,2)d_{2j}+(3,3)f_{1j}+(3,4)f_{2j}=0,\\
(4,1)d_{1j}+(4,2)d_{2j}=0.
\end{gathered}$$

Приведем матрицу системы (14) к ступенчатому виду методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix}
-3a_3 & 0 & (1,3) & (1,4)\\
0 & -3a_3 & (2,3) & (2,4)\\
0 & 0 & 3a_3(3,3)+(3,1)(1,3)+(3,2)(2,3) & 3a_3(3,4)+(3,1)(1,4)+(3,2)(2,4)\\
0 & 0 & (4,1)(1,3)+(4,2)(2,3) & (4,1)(1,4)+(4,2)(2,4)
\end{pmatrix}.$$

Система (14) имеет ненулевые решения при условии

$$\frac{(4,1)(1,3)+(4,2)(2,3)}{3a_3(3,3)+(3,1)(1,3)+(3,2)(2,3)}=\frac{(4,1)(1,4)+(4,2)(2,4)}{3a_3(3,4)+(3,1)(1,4)+(3,2)(2,4)},$$

или, учитывая условия $\alpha_{11}^2=-\alpha_{12}\alpha_{21}$ и $spA(t)=0$:

$$\frac{-\delta_1}{3a_3^2\alpha_{i1}+((a_2a_3(3a_0+a_1)-a_1a_2^2)b_0(\alpha_{11}\beta_{i1}+\alpha_{21}\beta_{i2})+3a_2a_3b_0^2(\beta_{11}\beta_{i1}+\beta_{21}\beta_{i2})}=$$

$$=\frac{\delta_2}{3a_3^2\alpha_{i2}+((a_2a_3(3a_0+a_1)-a_1a_2^2)b_0(\alpha_{22}\beta_{i2}+\alpha_{12}\beta_{i1})+3a_2a_3b_0^2(\beta_{12}\beta_{i1}+\beta_{22}\beta_{i2})}.\tag{15}$$

С учетом соотношений (15) систему (14) можно записать в виде:

$$\begin{gathered}
-3a_3d_{1j}+(K_{41}\alpha_{11}+K_{42}\beta_{11})f_{1j}+(K_{41}\alpha_{12}+K_{42}\beta_{12})f_{2j}=0,\\
-3a_3d_{2j}+(K_{41}\alpha_{21}+K_{42}\beta_{21})f_{1j}+(K_{41}\alpha_{22}+K_{42}\beta_{22})f_{2j}=0,\\
(\alpha_{12}\beta_{21}+\alpha_{11}\beta_{11})f_{1j}+(\alpha_{12}\beta_{22}+\alpha_{11}\beta_{12})f_{2j}=0,
\end{gathered}\tag{16}$$

где $K_{41}=a_2a_3(3a_0+a_1)-a_1a_2^2$, $K_{42}=3a_2a_3b_0$.

Общее решение системы (16) имеет вид:

$$d_{1j} = \frac{\alpha_{12}}{3a_3}\left(K_{41} + \frac{\Delta_1^1(K_{41}, K_{42})}{\delta_1} \right) = f_{1j},$$

$$d_{2j} = \frac{\alpha_{11}}{3a_3}\left(-K_{41} - \frac{\Delta_1^1(K_{41}, K_{42})}{\delta_1} \right) f_{2j}, \qquad f_{1j} = \frac{\delta_2}{\delta_1} f_{2j}. \tag{17}$$

Соотношения (15) примут вид:

$$\frac{-\delta_1}{3a_3^2\alpha_{i1} + b_0\Delta_i^1(K_{41}, K_{42})} = \frac{\delta_2}{3a_3^2\alpha_{i2} + b_0\Delta_i^2(K_{41}, K_{42})}. \tag{18}$$

Соотношения (18) вместе с общим решением (17) определяют структуру искомой подалгебры, соответствующей данной группе уравнений.

5. Перейдем к третьей группе уравнений системы (7). Это уравнения, содержащие переменные c_{ij} либо c_{ij} и f_{ij}:

$$\begin{gathered}
-9a_3c_{1j} + (3a_3(a_1a_2 + 3a_0a_3 - a_1a_3) + 4a_2^2(a_3 - a_2))\alpha_{11} + 9a_3^2b_0\beta_{11})f_{1j} + \\
+((3a_3(a_1a_2 + 3a_1a_3 - a_1a_3) + 4a_2^2(a_3 - a_2))\alpha_{12} + 9a_3^2b_0\beta_{12})f_{2j} = 0, \\
-9a_3c_{2j} + (3a_3(a_1a_2 + 3a_0a_3 - a_1a_3) + 4a_2^2(a_3 - a_2))\alpha_{21} + 9a_3^2b_0\beta_{21})f_{1j} + \\
+((3a_3(a_1a_2 + 3a_1a_3 - a_1a_3) + 4a_2^2(a_3 - a_2))\alpha_{22} + 9a_3^2b_0\beta_{22})f_{2j} = 0, \\
b_0\beta_{i1}c_{1j} + b_0\beta_{i2}c_{2j} + a_3\alpha_{i1}f_{1j} + a_3\alpha_{i2}f_{2j} = 0, \\
\alpha_{i1}c_{1j} + \alpha_{i2}c_{2j} = 0.
\end{gathered} \tag{19}$$

Как и в прежних случаях, переобозначим коэффициенты парами номеров в соответствии их положению в системе:

$$-9a_3c_{1j} + (1,3)f_{1j} + +(1,4)f_{2j} = 0,$$

$$-9a_3c_{2j} + (2,3)f_{1j} + +(2,4)f_{2j} = 0,$$

$$(3,1)c_{1j} + (3,2)c_{2j} + (3,3)f_{1j} + (3,4)f_{2j} = 0,$$

$$(4,1)c_{1j} + (4,2)c_{2j} = 0.$$

Матрица полученной системы приводится к виду:

$$\begin{pmatrix}
-9a_3 & 0 & (1,3) & (1,4) \\
0 & -9a_3 & (2,3) & (2,4) \\
0 & 0 & 9a_3(3,3) + (3,1)(1,3) + (3,2)(2,3) & 9a_3(3,4) + (3,1)(1,4) + (3,2)(2,4) \\
0 & 0 & (4,1)(1,3) + (4,2)(2,3) & (4,1)(1,4) + (4,2)(2,4)
\end{pmatrix}.$$

Пропорциональность двух последних строк приводит к соотношению:

$$\frac{(4,1)(1,3) + (4,2)(2,3)}{9a_3(3,3) + (3,1)(1,3) + (3,2)(2,3)} = \frac{(4,1)(1,4) + (4,2)(2,4)}{9a_3(3,4) + (3,1)(1,4) + (3,2)(2,4)}. \tag{20}$$

Тогда систему (19) с учетом соотношения (20) можно переписать в виде:

$$-9a_3c_{1j} + (K_{51}\alpha_{11} + K_{52}\beta_{11})f_{1j} + (K_{51}\alpha_{12} + K_{52}\beta_{12})f_{2j} = 0,$$

$$-9a_3c_{1j} + (K_{51}\alpha_{21} + K_{52}\beta_{21})f_{1j} + (K_{51}\alpha_{22} + K_{52}\beta_{2})f_{2j} = 0,$$

$$(\alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{11}\beta_{11})f_{1j} + (\alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{11}\beta_{12})f_{2j} = 0,$$

где $K_{51} = 3a_3(a_1a_2 + 3a_0a_3 - a_1a_3) + 4a_2^2(a_3 - a_2)$, $K_{52} = 9a_3^2 b_0 \beta_{12}$.

Общее решение последней системы:

$$c_{1j} = \frac{\alpha_{12}}{9a_3}\left(K_{51} + \frac{\Delta_1^1(K_{51}, K_{52})}{\delta_1}\right) f_{1j}, \quad c_{2j} = \frac{\alpha_{11}}{9a_3}\left(-K_{51} - \frac{\Delta_1^1(K_{51}, K_{52})}{\delta_1}\right) f_{2j}, \quad f_{1j} = \frac{\delta_2}{\delta_1} f_{2j}. \tag{21}$$

Определяющие соотношения (20) в принятых обозначениях имеют вид:

$$\frac{-\delta_1}{9a_3^2\alpha_{i1} + b_0\Delta_i^1(K_{51}, K_{52})} = \frac{\delta_2}{3a_3^2\alpha_{i2} + b_0\Delta_i^2(K_{51}, K_{52})}, \tag{22}$$

где $\Delta_i^1(K_{51}, K_{52}) = \begin{vmatrix} K_{51} & \beta_{21} & \beta_{22} \\ -K_{52} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ 0 & \beta_{i1} & \beta_{i2} \end{vmatrix}$, $\Delta_i^2(K_{51}, K_{52}) = \begin{vmatrix} K_{51} & \beta_{12} & \beta_{11} \\ -K_{52} & \alpha_{12} & \alpha_{11} \\ 0 & \beta_{i2} & \beta_{i1} \end{vmatrix}$.

Соотношения (22) вместе с общим решением (21) определяют структуру искомой подалгебры, соответствующей данной группе уравнений.

6. Объединяя решения конъюнктивных частей системы (7), вычисленные в пунктах 3, 4, 5, получаем следующий результат.

Лемма. *Алгебра* $M(P,Q)$ *мультипликативно интегрируемых функций с вычисленными в пункте* 2 (*случай* 6) *условиями полностью задается решениями системы линейных уравнений*:

$$c_{1j} = \frac{\alpha_{12}}{9a_3}\left(K_{51} + \frac{\Delta_1^1(K_{51}, K_{52})}{\delta_1}\right) f_{1j}, \quad c_{2j} = \frac{\alpha_{11}}{9a_3}\left(-K_{51} - \frac{\Delta_1^1(K_{51}, K_{52})}{\delta_1}\right) f_{2j},$$

$$d_{1j} = \frac{\alpha_{12}}{9a_3}\left(K_{41} + \frac{\Delta_1^1(K_{41}, K_{42})}{\delta_1}\right) f_{1j}, \quad d_{2j} = \frac{\alpha_{12}}{9a_3}\left(-K_{41} - \frac{\Delta_1^1(K_{41}, K_{42})}{\delta_1}\right) f_{2j}, \tag{23}$$

$$e_{1j} = a_1\alpha_{12}\left(a_0 + \frac{\Delta_1^1(a,b)}{\delta_1}\right) f_{1j}, \quad e_{2j} = a_1\alpha_{11}\left(-a_0 - \frac{\Delta_1^1(a,b)}{\delta_1}\right) f_{2j}, \quad f_{1j} = \frac{\delta_2}{\delta_1} f_{2j}, \quad j = 1,2,$$

и определяющими соотношениями:

$$\frac{-\delta_1}{9a_3^2\alpha_{i1} + b_0\Delta_i^1(K_{51}, K_{52})} = \frac{\delta_2}{3a_3^2\alpha_{i2} + b_0\Delta_i^2(K_{51}, K_{52})},$$

$$\frac{-\delta_1}{3a_3^2\alpha_{i1} + b_0\Delta_i^1(K_{41}, K_{42})} = \frac{\delta_2}{3a_3^2\alpha_{i2} + b_0\Delta_i^2(K_{41}, K_{42})},$$

$$\frac{-\delta_1}{(3a_1a_3 + 2a_2^2 - 2a_2a_3)\alpha_{i1} + 3a_1a_3b_0\Delta_i^1(a,b)} = \frac{\delta_2}{(3a_1a_3 + 2a_2^2 - 2a_2a_3)\alpha_{i2} + 3a_1a_3b_0\Delta_i^2(a,b)},$$

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}, \quad i = 1,2, \tag{24}$$

где $\Delta_i^1(a,b) = \begin{vmatrix} a_0 & \beta_{21} & \beta_{22} \\ -b_0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ 0 & \beta_{i1} & \beta_{i2} \end{vmatrix}$, $\Delta_i^2(a,b) = \begin{vmatrix} a_0 & \beta_{12} & \beta_{11} \\ -b_0 & \alpha_{12} & \alpha_{11} \\ 0 & \beta_{i2} & \beta_{i1} \end{vmatrix}$, $\delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{22} \\ \alpha_{22} & \beta_{22} \end{vmatrix}$,

$K_{41} = a_2a_3(3a_0 + a_1) - a_1a_2^2$, $K_{42} = 3a_2a_3b_0^2$, $K_{51} = 3a_3(a_1a_2 + 3a_0a_3 - a_1a_3) + 4a_2^2(a_3 - a_2)$, $K_{52} = 9a_3^2 b_0 \beta_{12}$.

Случай 7. Пусть $\deg x_n(t) = 0, \ \deg y_m(t) = 3$.

Кривая c определяется уравнениями $c: \begin{cases} x(t) = a_0, \\ y(t) = b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0. \end{cases}$

Очевидно, решение нетрудно получить путем следующей замены в формулах (23), (24):

$$\alpha_{ij} \to \delta_{ij}, \quad \beta_{ij} \to \gamma_{ij}, \quad a_3 \to b_3, \quad a_2 \to b_2, \quad a_1 \to b_1, \quad a_0 \to b_0, \quad b_0 \to a_0.$$

Примечания:

1. Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж. О структуре подалгебры полиномиальных мультипликативно интегририуемых матричных функций второго порядка. I // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2017. Вып. 4 (211). С. 54–59. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж. О структуре подалгебры полиномиальных мультипликативно интегририуемых матричных функций второго порядка. II // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2018. Вып. 1 (216). С. 49–53. URL: http://vestnik.adygnet.ru
3. Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж. О структуре подалгебры полиномиальных мультипликативно интегририуемых матричных функций второго порядка. III // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2018. Вып. 2 (221). С. 17–20. URL: http://vestnik.adygnet.ru
4. Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж. О структуре подалгебры полиномиальных мультипликативно интегририуемых матричных функций второго порядка. IV // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2019. Вып. 2 (241). С. 11–16. URL: http://vestnik.adygnet.ru

References:

1. Kozlov V.A., Palandzhyants L.Zh. On structure of subalgebra of second order polynomial multiplicatively integrated matrix functions. I // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2017. Iss. 4 (211). P. 54–59. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Kozlov V.A., Palandzhyants L.Zh. On subalgebra structure of the polynomial multiplicatively integrated matrix functions of the second order. II // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2018. Iss. 1 (216). P. 49–53. URL: http://vestnik.adygnet.ru
3. Kozlov V.A., Palandzhyants L.Zh. On subalgebra structure of the polynomial multiplicatively integrated matrix functions of the second order. III // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2018. Iss. 2 (221). P. 17–20. URL: http://vestnik.adygnet.ru
4. Kozlov V.A., Palandzhyants L.Zh. On subalgebra structure of the polynomial multiplicatively integrated matrix functions of the second order. IV // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2018. Iss. 2 (241). P. 11–16. URL: http://vestnik.adygnet.ru