УДК 519.63
ББК 22.161.68
Ч 67

Нахушева Фатима Мухамедовна
Доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики института физики и математики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: fatima-nakhusheva@mail.ru

Водахова Валентина Аркадьевна
Доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений института физики и математики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: v.a.vod@yandex.ru

Джанкулаева Мадина Амерхановна
Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики института физики и математики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: madina.dzhan@qmail.com

Гучаева Зера Хамидбиевна
Старший преподаватель кафедры алгебры и дифференциальных уравнений института физики и математики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: proporwiz@yandex.ru

Численный метод решения краевой задачи для уравнения влагопереноса с дробной производной по времени

(Рецензирована)

Аннотация. *Рассмотрена краевая задача для уравнения влагопереноса с дробной производной по времени. Построена разностная схема. Получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовке. Предложен алгоритм численного решения рассматриваемой задачи.*

Ключевые слова: *производная дробного порядка, устойчивость решения, априорная оценка, устойчивость разностной схемы, алгоритм.*

Nakhusheva Fatima Mukhamedovna
Associate Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Applied Mathematics and Informatics Department, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: fatima-nakhusheva@mail.ru

Vodakhova Valentina Arkadyevna
Associate Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Algebra and Differential Equations Department, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: v.a.vod@yandex.ru

Dzhankulaeva Madina Amerkhanovna
Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of Applied Mathematics and Informatics Department, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: madina.dzhan@qmail.com

Guchaeva Zera Khamidbievna
Senior Lecturer of Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: proporwiz@yandex.ru

Numerical method for solving the local problem for the equation of moisture transfer with a fractional derivative in time

Abstract. *In this paper, we consider the boundary value problem for the equation of moisture transfer with a fractional derivative with respect to time. Difference scheme is constructed. As a result, a priori estimates in the differential and difference interpretation have been obtained. An algorithm for the numerical solution of the problem in question is proposed.*

Keywords: *fractional order derivative, solution stability, a priori estimate, stability of the difference scheme, algorithm.*

Введение

Хорошо известно, что уравнение Аллера и другие уравнения переноса влаги, основанные на диффузионной модели, предполагают бесконечную скорость распространения возмущения. Уравнение Лыкова А.В. учитывает его конечную скорость. Оно выведено из принципов необратимой термодинамики на сновании анализа релаксационных процессов, а не из молекулярных представлений капиллярности. Поэтому уравнение Лыкова характеризуется определенной общностью [1, с. 159].

Многие проблемы теории фильтрации жидкости в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин, фильтрации жидкости в сильнопористой среде приводят к дифференциальным уравнениям с дробной производной [2]. Порядок дробной производной при этом определяется размерностью фрактала. Дробные производные также применяются при описании физических процессов стохастического переноса, при изучении деформационно-прочностных свойств полимерных материалов. В связи с этим возникает необходимость исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными и разработки методов их решений.

Постановка задачи. Устойчивость решения

В области $Q_T = \{(x,t): 0 < x < l,\ 0 < t \le T\}$ рассмотрим уравнение влагопереноса Лыкова с дробной производной по времени

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \partial_{0t}^{\alpha} u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)u + f(x,t),\ 0 < x < l,\ 0 < t \le T\ , \tag{1}$$

с краевыми и начальными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}$ – регуляризованная дробная производная в смысле Римана-Лиувилля порядка α, $0 < \alpha < 1$ [3]. Для коэффициентов уравнения должны быть выполнены условия: $q(x,t) \ge m > 0$, $0 < c_0 \le k(x,t) \le c_1$, $|q_t(x,t)|$, $|q(x,t)|$, $|k_t(x,t)| \le c_2$. Функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ удовлетворяют условиям сопряжения нужного порядка: $u_0(0) = u_0(l) = 0$, $u_1(0) = u_1(l) = 0$, $u_0''(0) = u_0''(l) = 0$.

Будем предполагать существование достаточно гладкого решения задачи (1)–(3), а также, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям гладкости требуемого порядка.

Уравнение влагопереноса Лыкова было рассмотрено в работе [4], в ней с помощью метода энергетических неравенств была получена априорная оценка решения. В этой работе были построены и исследованы на устойчивость разностные схемы в одномерном и многомерном случаях. Изучению уравнения влагопереноса с сосредоточенной теплоемкостью и построению разностного аналога посвящена работа [5]. Исследованию краевой задачи для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера-Лыкова с сосредоточенной теплоемкостью посвящена работа [6].

Доказательство устойчивости решения задачи (1)–(3) проведем методом энергетических неравенств. Для этого уравнение (1) умножаем скалярно на $u_t(x,t)$ и получаем энергетическое тождество:

$$(u_t, u_t) + (\partial_{0t}^{\alpha} u, u_t) + (u_{tt}, u_t) - ((ku_x)_x, u_t) + (qu, u_t) = (f, u_t). \tag{4}$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (4):

$$(u_t, u_t) = \int_0^l u_t(x,t) u_t(x,t) dx = \| u_t \|_0^2, \qquad (u_{tt}, u_t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l u_t^2(x,t) dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\| u_t \|_0^2,$$

$$((ku_x)_x, u_t) = \int_0^l (k(x,t)u_x(x,t))_x u_t(x,t)dx = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l k(x,t)u_x^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int_0^l k_t(x,t)u_x^2(x,t)dx,$$

$$((qu), u_t) = \int_0^l q(x,t)u(x,t)u_t(x,t)dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l q(x,t)u^2(x,t)dx - \frac{1}{2}\int_0^l q_t(x,t)u^2(x,t)dx,$$

$$(f, u_t) \le \int_0^l f(x,t)u_t(x,t)dx = \frac{1}{2}\|f\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u_t\|_0^2.$$

Подставляя все в тождество (4), приходим к неравенству:

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_0^2 + \int_0^l u_t(x,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)dx + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\|u_t\|_0^2 + \int_0^l k(x,t)u_x^2(x,t)dx + \int_0^l q(x,t)u^2(x,t)dx\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\int_0^l k_t(x,t)u_x^2(x,t)dx + \int_0^l q_t(x,t)u^2(x,t)dx\right) + \frac{1}{2}\|f\|_0^2.$$

С учетом условий на коэффициенты неравенство перепишем:

$$\|u_t\|_0^2 + \frac{\partial}{\partial t}\|u_t\|_0^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(c_0\|u_x\|_0^2 + m\|u\|_0^2\right) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^l u_t(x,t)\int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}dx \le$$

$$\le c_2\left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right) + \|f\|_0^2.$$

Полученное неравенство интегрируем по τ от 0 до t с учетом начальных условий (3). Имеем:

$$\|u_t\|_{2,Q_t}^2 + \|u_t\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t d\tau\int_0^l u_\tau(x,\tau)\int_0^\tau \frac{u_{\tau_1}(x,\tau_1)d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^\alpha}dx \le$$

$$\le \int_0^t \left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right)d\tau + \|f\|_{2,Q_t}^2 + \|u_1(x)\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2.$$

Принимая во внимание справедливость неравенства [7]

$$\left|\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t d\tau\int_0^l u_\tau(x,\tau)\int_0^\tau \frac{u_{\tau_1}(x,\tau_1)d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^\alpha}dx\right| \le \left(\frac{1}{2} + \frac{t^{2-2\alpha}}{2\Gamma^2(1-\alpha)}\right)\int_0^t \|u_\tau(x,\tau)\|_0^2 d\tau,$$

после применения леммы 1 [8, с. 152] получаем априорную оценку:

$$\|u_t\|_0^2 + \|u_t\|_{2,Q_t}^2 + \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \le M\left(\|f\|_{2,Q_t}^2 + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2 + \|u_1(x)\|_0^2\right), \quad (5)$$

где M – известная положительная величина. Из априорной оценки (5) следует устойчивость решения задачи (1)–(3) по входным данным. Здесь нормы равны $\|u_t\|_0^2 = \int_0^l u_t^2(x,t)dx$, $\|u_t\|_{2,Q_t}^2 = \int_0^t \|u_t\|_0^2 d\tau$.

Разностная схема. Устойчивость решения схемы

В замкнутой области $\overline{Q}_T = \{(x,t): 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ введем сетку $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, где $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih : i = 0,1,\dots,N;\ h = l/N\}$, $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau : j = 0,1,\dots,j_0; \tau = T/j_0\}$, h,τ – шаги сеток. Обозначается $y_i^j = y(x_i,t_j)$ значение функции y в узле (x_i,t_j), определенной на $\overline{\omega}_{h\tau}$ [9].

Для задачи (1)–(3) построена разностная схема:

$$y_t + \Delta_{0t}^{\alpha} y + y_{\bar{t}t} = \Lambda\left(\sigma\, \hat{y} + (1-2\sigma) y + \sigma\, \check{y}\right) - d\,\frac{\hat{y}+\check{y}}{2} + \varphi,\ x \in \omega_h, t \in \omega_\tau, \tag{6}$$

$$y_0 = y_N = 0, \quad t \ge 0, \tag{7}$$

$$\begin{cases} y(x,0) = u_0(x), \\ y_t(x,0) = u_1(x), \quad 0 \le x \le l, \end{cases} \tag{8}$$

где $\Delta_{0t}^{\alpha} y = \dfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum\limits_{s=1}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right) y_{\bar{t},s}$ – дискретный аналог производной дробного порядка $\partial_{0t}^{\alpha} u,\ 0 < \alpha < 1$. В классе достаточно гладких функций $u(x,t)$ справедливость равенства $\partial_{0t}^{\alpha} u = \Delta_{0t}^{\alpha} u + O(\tau)$ получена в работе [10]. Здесь $y_{\bar{t},s} = \dfrac{y^{s+1} - y^s}{\tau}$, $\Lambda y = (a\, y_{\bar{x}})_x$, $a = k(x_i, t_j)$, $d = q(x_i, t_j)$, $\varphi = f(x_i, t_j)$, $\hat{y} = y^{j+1}$, $y = y^j$, $\check{y} = y^{j-1}$. Разностная схема (6)–(7) имеет погрешность аппроксимации $\psi = O(h^2 + \tau)$ при любом значении параметра $\sigma \ne 0$, не зависящего от h и τ.

Устойчивость решения разностной схемы (6)–(8) будем доказывать с помощью метода энергетических неравенств [9]. Для этого с учетом $y_t = y_{\overset{\circ}{t}} + 0{,}5\tau\, y_{\bar{t}t}$ разностное уравнение (6) приводим к виду:

$$y_{\overset{\circ}{t}} + \Delta_{0t}^{\alpha} y + \left(E + 0{,}5\,\tau\, E - \sigma\tau^2 \Lambda\right) y_{\bar{t}t} = \Lambda y - d\,\frac{\hat{y}+\check{y}}{2} + \varphi. \tag{9}$$

Умножив (9) скалярно на $y_{\overset{\circ}{t}} = \dfrac{y_{\bar{t}} + \hat{y}_{\bar{t}}}{2}$, получаем энергетическое тождество:

$$\left(y_{\overset{\circ}{t}}, y_{\overset{\circ}{t}}\right) + \left(\Delta_{0t}^{\alpha} y, y_{\overset{\circ}{t}}\right) + \left(\left(E + 0{,}5\,\tau\, E - \sigma\tau^2\Lambda\right) y_{\bar{t}t}, y_{\overset{\circ}{t}}\right) - \left(\Lambda y, y_{\overset{\circ}{t}}\right) + \left(d\,\frac{\hat{y}+\check{y}}{2}, y_{\overset{\circ}{t}}\right) = \left(\varphi, y_{\overset{\circ}{t}}\right) \tag{10}$$

Преобразуем слагаемые тождества (10):

$$\left(\Delta_{0t}^{\alpha} y, y_{\overset{\circ}{t}}\right) \le \frac{1}{2\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right) \left\|y_{\bar{t},s}\right\|_0^2 + \frac{1}{4\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\left(\left\|y_{\bar{t},s}\right\|_0^2 + \left\|\hat{y}_{\bar{t},s}\right\|_0^2\right),$$

$$\left(\left(E + 0{,}5\,\tau\, E - \sigma\,\tau^2\Lambda\right) y_{\bar{t}t}, y_{\overset{\circ}{t}}\right) = \left(\frac{2+\tau}{4}\left\|y_{\bar{t}}\right\|_0^2 + \frac{\sigma\tau^2}{2}\left(\check{a}, y_{\bar{t}\bar{x}}^2\right]\right)_t - \frac{\sigma\tau^2}{2}\left(a_{\bar{t}}, y_{\bar{t}\bar{x}}^2\right],$$

$$\left(y_{\overset{\circ}{t}}, y_{\overset{\circ}{t}}\right) \le \frac{1}{2}\left\|\hat{y}_{\bar{t}}\right\|_0^2 + \frac{1}{4}\left\|y_{\bar{t}}\right\|_0^2, \qquad -\left(\Lambda y, y_{\overset{\circ}{t}}\right) = \frac{1}{8}\left(\check{a}, (y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}})^2 - \tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]_t - \frac{1}{8}\left(a_{\bar{t}}, (y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}})^2 - \tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right],$$

$$\left(d\,\frac{\hat{y}+\check{y}}{2}, y_{\overset{\circ}{t}}\right) = \frac{1}{4}\left(\check{d}, y^2 + \check{y}^2\right)_t - \frac{1}{4}\left(d_{\bar{t}}, y^2 + \check{y}^2\right), \qquad \left(\varphi, y_{\overset{\circ}{t}}\right) \le \frac{1}{2}\|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{4}\left\|\hat{y}_{\bar{t}}\right\|_0^2 + \frac{1}{4}\left\|y_{\bar{t}}\right\|_0^2.$$

Здесь $\check{a} = a(x_i, t_{j-1})$, $\check{d} = d(x_i, t_{j-1})$. Подставляя все в (10), получим неравенство:

$$\left(\frac{2+\tau}{2}\left\|y_{\bar{t}}\right\|_0^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2\left(\check{a}, y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right] + \frac{1}{4}\left(\check{a}, (y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}})^2\right] + \frac{1}{2}\left(\check{d}, y^2 + \check{y}^2\right)\right)_t \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\left\|y_{\bar{t},s}\right\|_0^2 + \frac{1}{2\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\left(\left\|y_{\bar{t},s}\right\|_0^2 + \left\|\hat{y}_{\bar{t},s}\right\|_0^2\right) +$$

$$+\left(\sigma-\frac{1}{4}\right)\tau^2\left(a_{\bar t}, y^2_{\bar x\bar t}\right]+\frac{1}{4}\left(a_{\bar t}, (y_{\bar x}+\breve{y}_{\bar x})^2\right]+\frac{1}{2}\left(d_{\bar t}, y^2+\breve{y}^2\right)+\frac{1}{2}\|\widehat{y}_{\bar t}\|_0^2+\|\varphi\|_0^2$$

или

$$\left(\|y_{\bar t}\|_0^2+\left(\sigma-\frac{1}{4}\right)\tau^2\|y_{\bar t\bar x}]|_0^2+\|y_{\bar x}+\breve{y}_{\bar x}]|_0^2+\|y\|_0^2+\|\breve{y}\|_0^2\right)_t \le M_1\sum_{s=1}^{j}\left(t^{1-\alpha}_{j-s+1}-t^{1-\alpha}_{j-s}\right)\left(\|y_{\bar t,s}\|_0^2+\|\widehat{y}_{\bar t,s}\|_0^2\right)+$$

$$+M_1\left(\left(\sigma-\frac{1}{4}\right)\tau^2\|y_{\bar t\bar x}]|_0^2+\|y_{\bar x}+\breve{y}_{\bar x}\|_0^2+\|y\|_0^2+\|\breve{y}\|_0^2+\|\widehat{y}_{\bar t}\|_0^2+\|\varphi\|_0^2\right). \qquad (11)$$

Перепишем неравенство (11):

$$\left(\|y\|_*^2\right)_t \le M_1\sum_{s=1}^{j}\left(t^{1-\alpha}_{j-s+1}-t^{1-\alpha}_{j-s}\right)\left(\|y_{\bar t,s}\|_0^2+\|\widehat{y}_{\bar t,s}\|_0^2\right)+$$

$$+M_1\left(\left(\sigma-\frac{1}{4}\right)\tau^2\|y_{\bar t\bar x}]|_0^2+\|y_{\bar x}+\breve{y}_{\bar x}\|_0^2+\|y\|_0^2+\|\breve{y}\|_0^2+\|\widehat{y}_{\bar t}\|_0^2+\|\varphi\|_0^2\right), \qquad (12)$$

где $M_1>0$ – известная величина, не зависящая от h и τ. Здесь величину $\|y\|_*^2=\|y_{\bar t}\|_0^2+\left(\sigma-\frac{1}{4}\right)\tau^2\|y_{\bar t\bar x}]|_0^2+\|y_{\bar x}+\breve{y}_{\bar x}]|_0^2+\|y\|_0^2+\|\breve{y}\|_0^2$ можно считать полунормой [9, с. 317].

Просуммируем теперь, умножив на τ, неравенство (12) по j' от 0 до j и получим:

$$\|y^{j+1}\|_*^2 \le M_1\sum_{j'=0}^{j}\left(\sum_{s=0}^{j'}\left(t^{1-\alpha}_{j'-s+1}-t^{1-\alpha}_{j'-s}\right)\left(\|y_{\bar t,s}\|_0^2+\|\widehat{y}_{\bar t,s}\|_0^2\right)\right)\tau+$$

$$+M_1\sum_{j'=0}^{j}\left(\left(\sigma-\frac{1}{4}\right)\tau^2\|y^{j'}_{\bar t\bar x}]|_0^2+\|y^{j'}_{\bar x}+y^{j'-1}_{\bar x}\|_0^2+\|y^{j'}\|_0^2+\|y^{j'-1}\|_0^2+\|y^{j'+1}_{\bar t}\|_0^2+\|\varphi^{j'}\|_0^2\right)\tau+\|y^0\|_*^2, \qquad (13)$$

где $\sigma\ge 1/4$. Для первого выражения в правой части (13), меняя пределы суммирования, можем иметь:

$$\sum_{j'=0}^{j}\left(\sum_{s=0}^{j'}\left(t^{1-\alpha}_{j'-s+1}-t^{1-\alpha}_{j'-s}\right)\left(\|y_{\bar t,s}\|_0^2+\|\widehat{y}_{\bar t,s}\|_0^2\right)\right)\tau=\sum_{s=0}^{j}\left(\|y_{\bar t,s}\|_0^2+\|\widehat{y}_{\bar t,s}\|_0^2\right)\tau\sum_{j'=s}^{j}\left(t^{1-\alpha}_{j'-s+1}-t^{1-\alpha}_{j'-s}\right)\le$$

$$\le\sum_{s=0}^{j}\left(\|y_{\bar t,s}\|_0^2+\|\widehat{y}_{\bar t,s}\|_0^2\right)\tau\sum_{j'=0}^{j}\left(t^{1-\alpha}_{j'-s+1}-t^{1-\alpha}_{j'-s}\right)=t_j^{1-\alpha}\sum_{s=0}^{j}\left(\|y_{\bar t,s}\|_0^2+\|\widehat{y}_{\bar t,s}\|_0^2\right)\tau.$$

С учетом последнего неравенство (13) можем переписать:

$$\|y^{j+1}\|_*^2 \le M_1 t_j^{1-\alpha}\sum_{s=0}^{j}\left(\|y_{\bar t,s}\|_0^2+\|\widehat{y}_{\bar t,s}\|_0^2\right)\tau+$$

$$+M_1\sum_{j'=0}^{j}\left(\left(\sigma-\frac{1}{4}\right)\tau^2\|y^{j'}_{\bar t\bar x}]|_0^2+\|y^{j'}_{\bar x}+y^{j'-1}_{\bar x}\|_0^2+\|y^{j'}\|_0^2+\|y^{j'-1}\|_0^2+\|y^{j'+1}_{\bar t}\|_0^2+\|\varphi^{j'}\|_0^2\right)\tau+\|y^0\|_*^2. \qquad (14)$$

Пусть $\tau\le\tau_0=1/[2M_1(1+t_j^{1-\alpha})]$. Применяя к (14) известную лемму 4 из [11], получим неравенство:

$$\|y^{j+1}\|_*^2\le M_2\left(\sum_{j'=0}^{j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\tau+\|y^0\|_*^2\right), \qquad (15)$$

где M_2 – положительная постоянная величина, не зависящая от h и τ. Из априорной оценки (15) следует устойчивость решения разностной схемы (6)–(8) по входным данным в смысле нормы $\|\cdot\|_*$.

Применяя оценку (15) к задаче для погрешности $z = y - u$:

$$z_t + \Delta_{0t}^\alpha z + z_{\bar{t}t} = \Lambda\left(\sigma \hat{z} + (1-2\sigma)z + \sigma \check{z}\right) - d\,\frac{\hat{z} + \check{z}}{2} + \psi,\ x \in \omega_h, t \in \omega_\tau,$$

$$z_0 = z_N = 0, \quad t \ge 0,$$

$$z(x,0) = 0,\ z_t(x,0) = \nu(x), \quad 0 \le x \le l,$$

где $\psi = O\left(h^2 + \tau\right)$, $\nu = O(\tau)$, получаем, что

$$\|z\|_* \le M\left(h^2 + \tau\right), \quad M = \text{const} > 0,$$

откуда следует, что разностная схема (6)–(8) сходится в норме $\|\cdot\|_*$ со скоростью $O\left(h^2 + \tau\right)$.

Алгоритм численного решения задачи

Разностную схему (6)–(8) для значения параметра $\sigma = 1/2$ запишем в расчетном виде:

$$\begin{cases} y_0^{j+1} = 0,\ i = 0, \\ A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j,\ i = 1,2,....,N-1, \\ y_N^{j+1} = 0,\ i = N, \end{cases} \tag{16}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i),\ y_i^1 = y_i^0 + \tau u_1(x_i), \quad i = 0,1,...,N. \tag{17}$$

Здесь $A_i = \dfrac{a_i}{2h^2}$, $B_i = \dfrac{a_{i+1}}{2h^2}$, $C_i = \dfrac{1}{\tau} + \dfrac{1}{\tau^2} + \dfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} + \dfrac{a_{i+1} + a_i}{2h^2} + \dfrac{d_i}{2}$,

$$F_i^j = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{2}{\tau^2} + \frac{2^{1-\alpha} - 1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\right) y_i^j - \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{a_{i+1} - a_i}{2h^2} + \frac{d_i}{2} + \frac{1 - 2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\right) y_i^{j-1} +$$

$$+ \frac{a_{i+1}}{2h^2} y_{i+1}^{j-1} - \frac{a_i}{2h^2} y_{i-1}^{j-1} - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-2} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right) \frac{y_i^{s+1} - y_i^s}{\tau} + \varphi_i^j.$$

Матрица системы разностных уравнений (16) является трехдиагональной. Она решается методом прогонки на каждом временном слое для всех значений $j = 1,2,....,j_0 - 1$. При заданных значениях решения на нулевом и первом слое находятся значения $y^2, y^3, ..., y^{j_0}$. Здесь сложность программирования связана с дробной производной в уравнении. В правую часть F_i^j системы (16) входят значения функции y со всех предыдущих слоев, начиная от 0 до j. Ясно, что с ростом значения j на их вычисление затрачивается все больше времени. В этом состоит особенность разностных схем, аппроксимирующих уравнения с производными дробного порядка. Оттуда и необходимость поиска «быстрых» алгоритмов решения уравнений с производными дробного порядка.

Алгоритм численного решения задачи (1)–(3) проверен на тестовом примере. Для различных значений числа разбиений N и j_0 по x и y соответственно получены результаты численного решения исходной задачи в случае, когда порядок дробной производной равен $\alpha = 1/2$ для значения параметра $\sigma = 1/2$. Анализ численных результатов подтверждает порядок точности построенной разностной схемы. Для числа разбиений $N = 10$ и $j_0 = 10$ значение погрешности $z = \max\limits_{i,j}\left| y_i^j - u\left(x_i, t_j\right)\right| = 0{,}0388$; для $N = 50$ и

$j_0 = 50$ погрешность $z = \max_{i,j} \left| y_i^j - u\left(x_i, t_j\right) \right| = 0{,}0077$; для $N = 100$ и $j_0 = 200$ погрешность $z = 0{,}0019$.

Примечания:

1. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. Москва: Наука, 1976. 352 с.
2. Нигматуллин Р.Р. Решение обобщенного уравнения переноса в среде с фрактальной геометрией = The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // Phys. Status Solidi. 1986. Vol. 133. P. 425–430.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1997. 688 с.
4. Нахушева Ф.М. Об устойчивости разностных схем для уравнения влагопереноса Лыкова // Известия КБНЦ РАН. 2009. № 5 (31). С. 98–103.
5. Нахушева Ф.М., Куважукова Р.Х., Максидова З.Т. Краевая задача для уравнения влагопереноса с сосредоточенной теплоемкостью // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2017. № 7-1. С. 48–53.
6. Керефов М.А., Нахушева Ф.М., Геккиева С.Х. Краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера-Лыкова с сосредоточенной теплоемкостью // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24, № 3. С. 23–29.
7. Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 658–664.
8. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 407 с.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977. 616 с.
10. Шхануков М.Х. О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений с дробной производной // Доклады РАН. 1996. Т. 348. С. 746–748.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. Москва: Наука, 1973. 415 с.

References:

1. Chudnovsky A.F. Soil thermophysics. Moscow: Nauka, 1976. 352 pp.
2. Nigmatullin R.R. The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // Phs. stat. Sol. b. 133. 1986. (The fractal geometry // Phys. Status Solidi. 1986. Vol. 133. P. 425–430.
3. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Science and Technology. 1997. 688 pp.
4. Nakhusheva F.M. On the stability of difference schemes for Lykov's moisture transfer equation // News of RAS KBNTs. 2009. No. 5 (31). P. 98–103.
5. Nakhusheva F.M., Kuvazhukova R.Kh., Maksidova Z.T. The boundary value problem for the equation of moisture transfer with a concentrated heat capacity // International Journal of Applied and Fundamental Research. 2017. No. 7-1. P. 48–53.
6. Kerefov M.A., Nakhusheva F.M., Gekkieva S.Kh. Boundary value problem for the generalized moisture transfer equation of Aller-Lykov with a concentrated heat capacity // Bulletin of Samara University. Natural Science Series. 2018 Vol. 24, No. 3. P. 23–29.
7. Alikhanov A.A. A priori estimates of solutions of boundary value problems for fractional-order equations // Differ. Equations. 2010. Vol. 46, No. 5. P. 658–664.
8. Ladyzhenskaya O.A. The boundary value problems of Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1973. 407 pp.
9. Samarsky A.A. Theory of difference schemes. Moscow: Nauka, 1977. 616 pp.
10. Shkhanukov M.Kh. On the convergence of difference schemes for differential equations with a fractional derivative // Reports of the Russian Academy of Sciences. 1996. Vol. 348. P. 746–748.
11. Samarsky A.A., Gulin A.V. Stability of difference schemes. Moscow: Nauka, 1973. 415 pp.