МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.938
ББК 22.161.61
У 95

Ушхо Адам Дамирович
Доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 593908, e-mail: uschho76@mail.ru

Доказательство одной леммы об инвариантных прямых полиномиального векторного поля

(Рецензирована)

Аннотация. *Рассматриваются вопросы качественного поведения полиномиальных векторных полей, обладающих инвариантными прямыми. В частности, доказывается, что если полиномиальная система имеет инвариантное множество M_s^k, состоящее из s и только s параллельных между собой инвариантных прямых с угловым коэффициентом k, то $s \le 3$. При этом, если полиномиальная система имеет инвариантные множества $M_{n-1}^{k_1}$, $M_{n-1}^{k_2}$ и $M_s^{k_3}$, $(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)(k_2 - k_3) \ne 0$, то при n четном (нечетном) число инвариантных прямых этой системы не превосходит $2n+1$ $(2n+2)$.*

Ключевые слова: *полиномиальное векторное поле, инвариантная прямая, узловая точка, инвариантное множество, фазовая плоскость, динамическая система.*

Ushkho Adam Damirovich
Associate Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Theoretical Physics Department, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 593908, e-mail: uschho76@mail.ru

Proof of a Lemma on invariant lines of a polynomial vector field

Abstract. *The questions of qualitative behavior of polynomial vector fields with invariant lines are considered. In particular, we prove that if a polynomial system has an invariant set M_s^k consisting of s and only s parallel invariant lines with an angular coefficient k, then $s \le 3$. Moreover, if a polynomial system has invariant sets $M_{n-1}^{k_1}$, $M_{n-1}^{k_2}$ and $M_s^{k_3}$, $(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)(k_2 - k_3) \ne 0$, then for even (odd) n the number of invariant lines of this system does not exceed $2n+1$ $(2n+2)$.*

Keywords: *polynomial vector field, invariant straight line, knot point, invariant set, phase plane, dynamic system.*

Известно, что знание о существовании инвариантных кривых (прямых) полиномиального векторного поля помогает обнаружить новые его свойства, а также облегчает исследование в целом поведения характеристик векторного поля. Поэтому актуальна тема исследований, связанных с инвариантными прямыми плоских полиномиальных векторных полей.

Полиномиальные векторные поля, обладающие инвариантными прямыми, являются объектом изучения многих математиков как отечественных, так и зарубежных (см. [1–5]). Авторами работ [6–8] изучаются вопросы, связанные с оценкой числа инвариантных прямых полиномиальных векторных полей на плоскости.

Данная заметка посвящена доказательству леммы 2, анонсированной в работе [9], но не доказанной в ней.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} P_i(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i(x,y) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} a_{rs} x^r y^s$, $Q_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} b_{rs} x^r y^s$, $a_{r,s}, b_{rs} \in R$, $\big(P(x,y), Q(x,y)\big) = 1$.

Замечание 1. В соответствии с определением 51.3 [10] множество W точек фазовой плоскости называется инвариантным по отношению к динамической системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

если оно состоит из целых траекторий системы (2).

Таким образом, всякая инвариантная кривая, в частности инвариантная прямая системы (1), является ее инвариантным множеством. Памятуя об этом и позволяя себе некоторую вольность, множество, состоящее из параллельных между собой инвариантных прямых системы (1), будем называть инвариантным множеством.

Символом M_s^k будем обозначать инвариантное множество, состоящее из s и только s параллельных между собой инвариантных прямых с угловым коэффициентом k.

В работах [6–8] рассматриваются вопросы, так или иначе связанные с инвариантными множествами плоских полиномиальных векторных полей n-ой степени.

Следуя работе [11], напомним некоторые понятия, используемые нами в дальнейшем. Согласно [11] систему (1), имеющую два инвариантных множества $M_{n-1}^{k_1}$ и $M_{n-1}^{k_2}$, $k_1 \neq k_2$, можно привести посредством аффинного преобразования переменных x и y к системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{n-2})\big(Ax + By + C\big), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-\beta_1)\cdot\ldots\cdot(y-\beta_{n-2})\big(Mx + Ny + L\big), \end{cases} \tag{3}$$

где $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-2}$, $0 < \beta_1 < \ldots < \beta_{n-2}$.

Очевидно, система (3) имеет инвариантные множества M_{n-1}^0 и M_{n-1}^∞.

Определение 1. Состояние равновесия U системы (3) называется узловой точкой, если через U проходят две инвариантные прямые, принадлежащие множеству $M_{n-1}^0 \bigcup M_{n-1}^\infty$.

Определение 2. Состояние равновесия системы (3), не являющееся узловой точкой, назовем внеузловой точкой.

Для удобства рассуждений введем обозначения:

V – внеузловая точка, через которую не проходит ни одна инвариантная прямая из множества $M_{n-1}^0 \bigcup M_{n-1}^\infty$;

V^∞ – внеузловая точка, расположенная на инвариантной прямой $l^\infty \in M_{n-1}^\infty$;

V^0 – внеузловая точка, расположенная на инвариантной прямой $l^0 \in M_{n-1}^0$;

L^0 – изоклина нуля $Mx + Ny + L = 0$;

L^∞ – изоклина бесконечности $Ax + By + C = 0$.

Очевидно, $V = L^0 \bigcap L^\infty$.

Лемма 2 [9] формулируется так:

Если система (3) *имеет инвариантное множество* M_s^k, $k \in R \setminus \{0\}$, *то* $s \le 3$.

Доказательство. Предположим, что система (3) имеет инвариантное множество M_s^k, $k \in R \setminus \{0\}$, $s \ge 4$. Произвольным образом зафиксируем во множестве M_s^k четыре инвариантных прямых, обозначив их l_1, l_2, l_3, l_4.

Согласно теореме 1 [12] инвариантная прямая $g \notin M_{n-1}^0 \bigcup M_{n-1}^\infty$ проходит через вершины прямоугольника *П*, образованного прямыми $x = 0$, $x - \alpha_{n-2} = 0$, $y = 0$, $y - \beta_{n-2} = 0$, если $L^0 \parallel L^\infty$. Следовательно, в условиях нашего предположения о том, что $s \ge 4$, L^0 и L^∞ пересекаются.

Пусть $L^0 \bigcap L^\infty = T$. По лемме 1 [13] инвариантная прямая системы (3), не принадлежащая множеству $M_{n-1}^0 \bigcup M_{n-1}^\infty$, пересекает главные изоклины L^0 и L^∞. Предположим, что $l_i \in \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ проходит через состояние равновесия T системы (3). В силу леммы 2 [13] через точку T не проходит инвариантная прямая, принадлежащая множеству $M_{n-1}^0 \bigcup M_{n-1}^\infty$.

Следовательно, *T* – внеузловая точка типа *V*. По лемме 5 [13] l_i проходит через противоположные вершины прямоугольника *П* (проходит только через узловые точки, исключая *T*). Из четырех выбранных инвариантных прямых по крайней мере две будут расположены в одной полуплоскости относительно прямой l_i.

Отсюда делаем вывод: не менее двух инвариантных прямых из множества M_s^k пересекают прямые $x = 0$ и $y - \beta_{n-2} = 0$ (или $x - \alpha_{n-2} = 0$ и $y = 0$) в точках, расположенных вне односвязной области, ограниченной прямоугольником *П*. Это противоречит тому, что число состояний равновесия системы (3) на любой прямой не превосходит *n*. Тем самым доказано, что никакая инвариантная прямая из множества l_1, l_2, l_3, l_4 не проходит через точку *T*.

Введем обозначения:

$A_i = l_i \bigcap L^0 \quad \left(i = \overline{1,4}\right)$;

$B_i = l_i \bigcap L^\infty \quad \left(i = \overline{1,4}\right)$.

Утверждаем, что $\forall_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ состояния равновесия A_i и B_i одновременно либо узловые, либо внеузловые точки.

Предположим, что хотя бы для одного $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ A_i и B_i – узловые точки. Тогда, очевидно, все состояния равновесия, расположенные на инвариантной прямой l_i, являются узловыми точками, а значит l_i проходит через противоположные вершины прямоугольника *П*.

Как и в случае, когда l_i проходит через точку *T*, приходим к противоречию. Таким образом, все состояния равновесия A_i и B_i $\left(i = \overline{1,4}\right)$ внеузловые точки, причем одна из них внеузловая точка V^∞-типа, а другая – V^0-типа.

Так как на любой инвариантной прямой системы (3), не принадлежащей множеству $M_{n-1}^0 \bigcup M_{n-1}^\infty$, расположены не более двух внеузловых точек [12, 13], то на l_i все состояния равновесия, отличные от A_i и B_i, являются узловыми точками. Ни для какого $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ точки A_i и B_i не расположены в односвязной области, ограниченной прямоугольником *П*. В противном случае хотя бы одна из четырех прямых l_1, l_2, l_3, l_4 проходит через противоположные вершины прямоугольника *П*. Это неизбежно приводит к тому, что хотя бы на двух инвариантных прямых, принадлежащих множеству $M_{n-1}^0 \bigcup M_{n-1}^\infty$, расположены не менее $n+1$ состояний равновесия, что невозможно.

Аналогичными рассуждениями убеждаемся в том, что ни одна из точек A_i и B_i не расположена внутри прямоугольника Π. Именно поэтому система (3) не может иметь более двух параллельных между собой инвариантных прямых, пересекающих главные изоклины L^0 и L^∞ во внеузловых точках, расположенных вне односвязной области, ограниченной прямоугольником Π.

Наряду с этими двумя параллельными инвариантными прямыми система (3) может иметь разве что еще одну инвариантную прямую, параллельную двум данным, которая непременно проходит через противоположные вершины прямоугольника Π.

Лемма доказана.

Из доказанной леммы очевидным образом следует

Теорема [9]. *Если система* (1) *имеет инвариантные множества* $M_{n-1}^{k_1}$, $M_{n-1}^{k_2}$ и $M_s^{k_3}$, $(k_1-k_2)(k_1-k_3)(k_2-k_3)\neq 0$, *то при* n *четном (нечетном) число инвариантных прямых этой системы не превосходит* $2n+1$ $(2n+2)$.

Пример 1. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(x+3y-2), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(3x+y-2) \end{cases}$$

имеет два инвариантных множества M_2^0 и M_2^∞ и инвариантное множество $M_3^1 = \{y+x=0,\ y+x-1=0,\ y+x-2=0\}$. Кроме этого, система имеет инвариантную прямую $y-x=0$. Впрочем, это пример кубической системы, имеющей максимальное число (восемь) инвариантных прямых.

Пример 2. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2)(x-2y+1), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(y-2)(-2x+y+1) \end{cases}$$

имеет два инвариантных множества M_3^0 и M_3^∞, а также инвариантные прямые $y-x=0,\ y-x-1=0,\ y-x+1=0$, образующие инвариантное множество M_3^1. Так как в данном случае $n=4$, то система имеет максимальное число (девять) инвариантных прямых (см. [1]).

Примечания:

1. Sokulski I. On the number of invariant lines of polynomial vector fields // Nonlinearity. 1996. No. 9. P. 479–485.
2. Artes J., Grunbaum B., Ilibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific Journal of Mathematics. 1998. Vol. 184, No. 2. P. 207–230.
3. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. I // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. № 6. С. 132–137.
4. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. II // Вестник Нижегородского университета

References:

1. Sokulski I. On the number of invariant lines of polynomial vector fields // Nonlinearity. 1996. No. 9. P. 479–485.
2. Artes J., Grunbaum B., Ilibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific Journal of Mathematics. 1998. Vol. 184, No. 2. P. 207–230.
3. Dolov M.V., Chistyakova S.A. On linear partial integrals of polynomial vector fields of the fourth degree with degenerate infinity. I // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2010. No. 6. P. 132–137.
4. Dolov M.V., Chistyakova S.A. On linear partial integrals of polynomial vector fields of the fourth degree with degenerate infinity. II // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2011. No. 1.

им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 1. С. 139–148.

5. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. III // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 2. С. 123–129.
6. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Оценка сверху числа инвариантных прямых полиномиального векторного поля n-ой степени // Известия Саратовского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 171–179.
7. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. О прямых изоклинах векторных полей на плоскости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 2. С. 148–156.
8. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Об инвариантных множествах полиномиального векторного поля n-ой степени // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2014. Вып. 4 (147). С. 22–33. URL: http://vestnik.adygnet.ru
9. Тлячев В.Б., Ушхо Д.С. О числе инвариантных прямых полиномиальных векторных полей в специальном случае // Весенняя математическая школа. Понтрягинские чтения – XXVI: материалы междунар. конф., 3–9 мая 2015 г., г. Воронеж. Воронеж: Издат. дом ВГУ, 2015. С. 191–192.
10. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие. Минск: Изд-во БГУ, 2012. 288 с
11. Об одном методе исследования числа инвариантных прямых, полиномиальных векторных полей n-ой степени / Д.С. Ушхо, А.Е. Артисевич, Н.А. Лобода, А.А. Панеш // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2018. Вып. 4 (231). С. 15–27. URL: http://vestnik.adygnet.ru
12. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. О числе инвариантных прямых одного класса полиномиальных векторных полей // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2016. Вып. 1 (176). С. 11–16.
13. Ушхо Д.С., Тлячев В.Б., Оценка сверху числа инвариантных прямых полиномиального векторного поля n-ой степени в одном случае // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2019. Вып. 3 (246). С. 11–24. URL: http://vestnik.adygnet.ru

P. 139–148.

5. Dolov M.V., Chistyakova S.A. On linear partial integrals of polynomial vector fields of the fourth degree with degenerate infinity. III // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2011. No. 2. P. 123–129.
6. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. An estimate from above of the number of invariant straight lines of n-th degree polynomial vector field // News of Saratov University. Ser.: Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2015. Vol. 15, Iss. 2. P. 171–179.
7. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. On straight-line isoclines of planar vector fields // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2014. No. 2. P. 148–156.
8. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.C. Invariant sets of the n-th order polynomial vector field // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2014. Iss. 4 (147). P. 22–33. URL: http://vestnik.adygnet.ru
9. Tlyachev V.B., Ushkho D.S. On the number of invariant straight line of polynomial vector fields in a special case // Spring mathematical school. Pontryaginsky readings – XXVI: proceedings of the international conference, May 3 – May 9, 2015, Voronezh. Voronezh: VSU Publishing House, 2015. P. 191–192.
10. Amelkin V.V. Differential equations: a manual. Minsk: BGU Publishing House, 1982. 208 p.
11. On one method of a research of the number of invariant straight lines for polynomial vector fields of degree n / D.S. Ushkho, A.E. Artisevich, N.A. Loboda, A.A. Panesh // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2018. Iss. 4 (231). P. 15–27. URL: http://vestnik.adygnet.ru
12. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. The number of invariant lines of a class of polynomial vector fields // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2016. Iss. 1 (176). P. 11–16. URL: http://vestnik.adygnet.ru
13. Ushkho D.S., Tlyachev V.B., Ushkho A.D. An estimate from above of the number of invariant straight lines of n-th order polynomial vector field in one case // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2019. Iss. 3 (246). P. 11–24. URL: http://vestnik.adygnet.ru