УДК 517.925
ББК 22.161.6
Р 65

Ройтенберг В.Ш.
Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Россия, vroitenberg@mail.ru

О числе периодических решений некоторых дифференциальных уравнений, правые части которых – полиномы с периодическими коэффициентами

(Рецензирована)

Аннотация. *В работе рассматриваются дифференциальные уравнения первого порядка, правые части которых являются полиномами относительно искомой функции с периодическими непрерывными коэффициентами. В случае, когда часть коэффициентов обращается в нуль, а остальные коэффициенты удовлетворяют дополнительным условиям, устанавливается возможное число периодических решений с учетом их кратности.*

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, полиномиальная правая часть с периодическими коэффициентами, число периодических решений*

Roytenberg V.Sh.
Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia, vroitenberg@mail.ru

On the number of periodic solutions for some differential equations in which the right-hand sides are polynomials with periodic coefficients

Abstract. *In this paper, we consider first-order differential equations whose right-hand sides are polynomials with respect to the desired function with periodic continuous coefficients. In the case when some of the coefficients vanish, and the remaining coefficients satisfy additional conditions, the possible number of periodic solutions is established, taking into account their multiplicity.*

Keywords: *differential equation, polynomial right-hand side with periodic coefficients, number of periodic solutions*

В ряде работ, в частности в статьях [1–5], оценивается возможное число периодических решений полиномиальных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)x^k \tag{1}$$

с ω-периодическими непрерывными коэффициентами $a_k(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Эти результаты можно также использовать для оценки числа замкнутых траекторий дифференциальных уравнений второго порядка $\ddot{x} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\dot{x}^k$ на цилиндрическом фазовом пространстве [6, 7].

В настоящей работе мы рассмотрим частный случай уравнения (1), когда ряд коэффициентов обращается в нуль:

$$\dot{x} = f(t,x), \text{ где } f(t,x) := a_n(t)x^n + a_m(t)x^m + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t). \tag{2}$$

Решение $X(u,t)$ уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию $X(u,0) = u$, аналитически зависит от u [8]. Решение $X(x_0,t)$ является ω-периодическим тогда и только тогда, когда x_0 – нуль функции расхождения $d(u) := X(u,\omega) - u$. Кратность нуля x_0 называется *кратностью* ω-периодического решения.

Теорема 1. *Если n и m – нечетные числа и для любого $t \in \mathbf{R}$ $a_n(t) > 0, a_m(t) \geq 0$,*

$\exists t_0 \quad a_0(t_0) \neq 0$, *то уравнение* (2) *имеет либо одно, либо три* ω*-периодические решения с учетом их кратности.*

Замечание. Случай $a_n(t) < 0$, $a_m(t) \leq 0$ сводится к случаю, рассмотренному в теореме 1, заменой в уравнении (2) t на $-t$.

Доказательство теоремы 1. Так как n нечетно, а $\forall t \in \mathbf{R} \quad a_n(t) > 0$, то сумма кратностей ω-периодических решений нечетна.

Функция

$$h(u) := \int_0^{\omega} f'_x(t, X(u,t))dt$$

определена и является аналитической на некотором интервале J.

Производная $h''(u) = I_1(u) + I_2(u)$, где

$$I_1(u) = \int_0^{\omega} f'''_{xxx}(t, X(u,t))(X'_u(u,t))^2\, dt, \qquad I_2(u) = \int_0^{\omega} f''_{xx}(t, X(u,t))X''_{uu}(u,t)\, dt.$$

Ввиду условия $\exists t_0 \quad a_0(t_0) \neq 0$ при фиксированном $u \in J$ существует такое t_*, что $X(u, t_*) \neq 0$. Так как

$$f'''_{xxx}(t,x) = n(n-1)(n-2)a_n(t)x^{n-3} + m(m-1)(m-2)a_m(t)x^{m-3} > 0 \quad \text{при } x \neq 0,$$

то и $f'''_{xxx}(t_*, X(u,t_*)) > 0$. Следовательно, $I_1(u) > 0$. В [7] доказано, что $I_2(u) \geq 0$. Поэтому $\forall u \in J \; h''(u) > 0$. Из этого неравенства согласно [7] следует, что уравнение имеет не более трех ω-периодических решений с учетом их кратности. Покажем, что можно реализовать все логически возможные случаи.

Рассмотрим уравнение вида (2) с постоянными коэффициентами:

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где} \quad f(x) = a_n x^n + a_m x^m + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \tag{3}$$

Его можно рассматривать как уравнение с ω-периодическими коэффициентами. Все его ω-периодических решения совпадают с постоянными.

Пусть n и m нечетны, $a_n > 0$, $a_m \geq 0$, $a_0 \neq 0$.

Если $a_2 = 0$, $a_1 = 1$, то уравнение (3) имеет одно постоянное решение кратности один.

Если $a_2 = 0$, $a_1 = -1$, а a_0 достаточно близко к нулю, то уравнение (3) имеет три постоянных решения кратности один.

Пусть в уравнении (3) $a_2 = 0$. Система уравнений

$$f(u) = a_n u^n + a_m u^m + a_1 u + a_0 = 0, \qquad f'(u) = n a_n u^{n-1} + m a_m u^{m-1} + a_1 = 0$$

имеет для любого $u \neq 0$ решение относительно a_0 и a_1:

$$a_0 = (n-1)a_n u^n + (m-1)a_m u^m, \quad a_1 = -n a_n u^{n-1} - m a_m u^{m-1}, \tag{4}$$

при этом $a_0 \neq 0$, $f''(u) = n(n-1)a_n u^{n-2} + m(m-1)a_m u^{m-2} \neq 0$. Поэтому уравнение (3) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (4), и $a_2 = 0$, имеет постоянное решение $x = u$ кратности два и еще одно постоянное решение кратности один.

Рассмотрим теперь систему уравнений $f(u) = a_n u^n + a_m u^m + a_2 u^2 + a_1 u + a_0 = 0$;

$$f'(u) = n a_n u^{n-1} + m a_m u^{m-1} + 2a_2 u + a_1 = 0,$$

$$f''(u) = n(n-1)a_n u^{n-2} + m(m-1)a_m u^{m-2} + 2a_2 = 0.$$

При $u \neq 0$ она имеет решение относительно a_0, a_1 и a_2, причем $a_0 \neq 0$. При таких a_0, a_1 и a_2 уравнение (2) имеет единственное постоянное решение $x = u$, а его кратность равна 3.

Теорема 1 доказана.

Заметим, что если при любом $t \in \mathbf{R}$ коэффициент $a_0(t)$ положителен (отрицателен), то уравнение (2) не имеет знакопеременных ω-периодических решений.

Теорема 2. *Пусть* n *и* m *– четные числа и для любого* $t \in \mathbf{R}$ $a_n(t) > 0,\ a_m(t) \geq 0$ или $a_n(t) < 0,\ a_m(t) \leq 0$.

1) *Если для любого* $t \in \mathbf{R}$ $a_0(t)a_n(t) > 0$, *то уравнение* (2) *либо не имеет положительных (отрицательных)* ω*-периодических решений, либо имеет два положительных (отрицательных)* ω*-периодических решения с учетом их кратности. При этом для любой упорядоченной пары* (N_+, N_-), *где* $N_+, N_- \in \{0,1,2\}$, *существует уравнение* (2), *имеющее* N_+ *различных положительных и* N_- *различных отрицательных* ω*-периодических решений.*

2) *Если для любого* $t \in \mathbf{R}$ $a_0(t)a_n(t) < 0$, *то число положительных (отрицательных)* ω*-периодических решений уравнения* (2) *с учетом их кратности равно либо единице, либо трем.*

Доказательство теоремы 2. Достаточно рассмотреть случай $a_n(t) > 0$, $a_m(t) \geq 0$. Сумма кратностей положительных (отрицательных) ω-периодических решений в случае $a_0(t) < 0$ нечетна, а в случае $a_0(t) > 0$ – четна.

Если уравнение имеет положительное ω-периодическое решение, то множество тех u, для которых решение $X(t,u)$ определено и положительно при $t \in [0,\omega]$, образует интервал, который обозначим J. Как и в доказательстве теоремы 1, определим функцию $h(u)$ и будем иметь $\forall t \in J\ h''(u) > 0$. Поэтому уравнение имеет не более трех положительных ω-периодических решений с учетом их кратности.

Замены $x \mapsto -x$ и $t \mapsto -t$ переводят уравнение (2) в уравнение

$$\dot{x} = a_n(-t)x^n + a_m(-t)x^m + a_2(-t)x^2 - a_1(-t)x + a_0(-t), \tag{5}$$

а отрицательные ω-периодические решения уравнения (1) – в положительные ω-периодические решения уравнения (5). Из доказанного выше следует, что таких решений не более трех с учетом их кратности. Тем самым для случая $a_0(t) < 0$ утверждения теоремы доказаны.

Рассмотрим случай $a_0(t) > 0$. Покажем, что все варианты для числа N_+ различных положительных и N_- различных отрицательных ω-периодических решений возможны уже для уравнения (3) с постоянными коэффициентами.

Возьмем $a_n = 1/n$, $a_m = 0$, $a_2 = -1/2$, $a_1 = -\varepsilon$, $a_0 > 0$. Так как $f'(x) = x^{n-1} - x - \varepsilon$, то используя теорему о неявной функции, получаем, что при достаточно малом $|\varepsilon|$ функция $f(x)$ имеет одну точку максимума $x_0(\varepsilon) = -\varepsilon + o(\varepsilon)$, в которой $f(x_0(\varepsilon)) = a_0 + o(\varepsilon)$, и ровно две точки минимума $x_\pm(\varepsilon) = \pm 1 + \dfrac{\varepsilon}{n-2} + o(\varepsilon)$, в которых $f(x_\pm(\varepsilon)) = a_0 + \dfrac{2-n}{2n} \mp \varepsilon + o(\varepsilon)$.

Мы можем считать a_0 и $\varepsilon > 0$ выбранным так, что

$f(x_+(\varepsilon)) < f(x_-(\varepsilon)) < 0 < f(x_0(\varepsilon))$. Тогда уравнение (3) имеет по два постоянных решения на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Теперь фиксируем ε и будем увеличивать a_0. Тогда найдутся такие числа a_0' и a_0'' ($a_0' < a_0''$), что:

I. При $a_0 = a_0'$ у уравнения (3) на интервале $(-\infty, 0)$ будет единственное постоянное решение $x = x_-(\varepsilon)$, а его кратность 2, на интервале $(0, \infty)$ будет два однократных постоянных решения;

II. При $a_0' < a_0 < a_0''$ у уравнения (3) на интервале $(-\infty, 0)$ нет постоянных решений, на интервале $(0, \infty)$ будет два однократных постоянных решения;

III. При $a_0 = a_0''$ у уравнения (3) на интервале $(-\infty, 0)$ нет постоянных решений, на интервале $(0, \infty)$ будет единственное постоянное решение $x = x_+(\varepsilon)$;

IV. При $a_0 > a_0''$ уравнение (3) не имеет постоянных решений.

При $\varepsilon < 0$ интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ в I, II и III поменяются ролями, а при $\varepsilon = 0$ вследствие четности $f(x)$ при некотором значении a_0 на каждом интервале $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ будет по одному двукратному постоянному решению.

Теорема 2 доказана.

Список литературы:

1. Плисс В.А. О числе периодических решений уравнения с полиномиальной правой частью // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 5. С. 965–968.
2. Neto A.L. On the number of solutions of the equation for which $x(0)=x(1)$ // Invent. Math. 1980. Vol. 59, No. 2. P. 67–76.
3. Панов А.А. О разнообразии отображений Пуанкаре для кубических уравнений с переменными коэффициентами // Функциональный анализ и приложения. 1999. Т. 33, № 4. С. 84–88.
4. Casull A., Guillamon A. Limit cycles for generalized Abel equations // J. Bifurcation and Chaos. 2006. Vol. 16. P. 3737–3745.
5. Ройтенберг В.Ш. О числе периодических решений некоторых полиномиальных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Вестник Бурятского государственного университета. Математика. Информатика. 2020. № 1. С. 28–34.
6. Ройтенберг В.Ш. О полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности, не имеющих особых точек // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер.: Математика. Механика. Физика. 2020. Т. 12, № 4. С. 33–40.
7. Ройтенберг В.Ш. О типичных полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 2122–2130.
8. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1981. 232 с.

References:

1. Pliss V.A. On the number of periodic solutions of the equation with a polynomial right-hand side // Doklady AN SSSR. 1959. Vol. 127, No. 5. P. 965–968.
2. Neto A.L. On the number of solutions of the equation for which $x(0)=x(1)$ // Invent. Math. 1980. Vol. 59, No. 2. P. 67–76.
3. Panov A.A. On the diversity of Poincare mappings for cubic equations with variable coefficients // Funct. anal. and its appl. 1999. Vol. 33, No. 4. P. 84–88.
4. Casull A., Guillamon A. Limit cycles for generalized Abel equations // J. Bifurcation and Chaos. 2006. Vol. 16. P. 3737–3745.
5. Roytenberg V.Sh. On the number of periodic solutions of some polynomial differential equations with periodic coefficients // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2020. No. 1. P. 28–34.
6. Roytenberg V.Sh. On polynomial differential equations of second order on the circle without singular points // Bulletin of the South Ural State University. Ser.: Mathematics. Mechanics. Physics. 2020. Vol. 12, No. 4. P. 33–40.
7. Roytenberg V.Sh. On generic polynomial differential equations of second order on the circle // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Vol. 17. P. 2122–2130.
8. Bibikov Yu.N. General Course of Ordinary Differential Equations. Leningrad: Publishing House of LSU, 1981. 232 p.