МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья
УДК 519.21
ББК 22.161.62+22.171.52
Ш 96
DOI: 10.53598/2410-3225-2021-4-291-11-23

Об устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных белым шумом. I

(*Рецензирована*)

Магомет Мишаустович Шумафов[1], Тимур Аскербиевич Панеш[2], Мухаммед Ареф Хаваджа[3]

[1, 2, 3] *Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия*
[1] *magomet_shumaf@mail.ru*
[2] *tpanesh@yandex.ru*
[3] *nblm600@gmail.com*

Аннотация. *В настоящей работе рассматриваются нелинейные автономные дифференциальные уравнения второго порядка, возмущенные белым шумом. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости в целом по вероятности решений рассматриваемых уравнений. Даны вероятностные оценки пребывания случайной траектории в ограниченной области фазовой плоскости. В качестве примера рассматривается гармонический осциллятор, возмущенный белым шумом.*

Ключевые слова: *случайный процесс, винеровский процесс, белый шум, стохастическое дифференциальное уравнение, асимптотическая устойчивость в целом по вероятности, функция Ляпунова, гармонический осциллятор*

Original Research Paper

On the stochastic stability in the large of solutions of the nonlinear second-order differential equations perturbed by white noise. I

Magomet M. Shumafov[1], Timur A. Panesh[2], Mukhammed A. Khavadzha[3]

[1, 2, 3] *Adyghe State University, Maikop, Russia*
[1] *magomet_shumaf@mail.ru*
[2] *tpanesh@yandex.ru*
[3] *nblm600@gmail.com*

Abstract. *In the work nonlinear autonomous second-order differential equations with right-hand side random processes are considered. Sufficient conditions for stochastic asymptotic stability in the large of solutions of the equations are obtained. The probabilistic estimations of the remaining of a random trajectory in a bounded region of the phase plane are given. As an example harmonic oscillator perturbed by random process is considered.*

Keywords: *stochastic process, Wiener process, white noise, stochastic differential equation, stochastic asymptotic stability in the large, Lyapunov function, harmonic oscillator*

1. Введение

С момента публикации в начале 1950-х годов пионерских работ И. Гихмана [1] и К. Ито [2] теория стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) получила быстрое развитие. Имеется большое количество публикаций, книг и статей, посвященных изучению различных свойств решений СДУ. Изучение свойства устойчивости решений СДУ является одной из важнейших задач теории динамических систем.

В своем знаменитом труде [3] А.М. Ляпунов предложил метод вспомогательных функций, впоследствии получивший название второй метод Ляпунова, или прямой метод Ляпунова, или метод функций Ляпунова, который позволяет исследовать устойчивость решений детерминированных дифференциальных уравнений, не прибегая к вычислению самих решений. Метод функций Ляпунова является чрезвычайно общим и мощным. Неоценимое преимущество этого метода – это то, что для его применения не нужно знать самих решений дифференциального уравнения. Впоследствии оказалось, что метод Ляпунова является также весьма эффективным не только для изучения устойчивости, но и для исследования многих других вопросов качественной теории дифференциальных уравнений (например, диссипативности, конвергентности, существования или отсутствия периодических решений и т.д.).

Метод функций Ляпунова, обобщенный впоследствии в 1960-х годах в работах Бертрама и Сарачика [4], Каца и Красовского [5], Вонэма [6, 7], Кушнера [8] и Хасьминского [9] (см. также библиографию в [8] и [9]), оказался весьма удобным и для исследования задач устойчивости стохастических дифференциальных уравнений. Функции Ляпунова стали с тех пор важным и удобным аппаратом в стохастической теории дифференциальных уравнений. Статьи [4] и [5] были первыми работами, где было дано решение задачи устойчивости стохастической системы в терминах функций Ляпунова. Работа [5] стимулировала много дальнейших исследований по данной тематике. Книги [8] и [9] были первыми монографиями в мировой литературе, в которых рассматривались задачи стохастической устойчивости. В [8] и [9] метод функций Ляпунова был перенесен на стохастический случай. Тем самым был сделан первый шаг в построении качественной теории стохастических дифференциальных уравнений.

Позже стохастический аналог второго метода Ляпунова получил развитие в работах Якубовича и Левита [10, 11], Пакшина [12, 13], Пакшина и Угриновского [14], Кореневского [15], Л. Арнольда и Шмалфусса [16], Мао [17–19] (см. также библиографию в [19]). Исследованию методом функций Ляпунова стохастической устойчивости решений дифференциальных уравнений второго порядка и двумерных дифференциальных систем при случайных возмущениях их параметров посвящены статьи [20–32]. Среди обзоров мы укажем статьи [14, 33–35].

В настоящей работе рассматриваются нелинейные автономные дифференциальные уравнения второго порядка, возмущенные гауссовским белым шумом. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости в целом по вероятности решений рассматриваемых уравнений. Даны вероятностные оценки пребывания случайной траектории в ограниченной области фазовой плоскости. В качестве примера рассматривается гармонический осциллятор, параметры которого возмущены белым шумом.

Работа состоит из нескольких частей. В первых частях работы для удобства читателя будут приведены основные понятия и факты из стохастического анализа и теории устойчивости стохастических дифференциальных уравнений. В последней части работы будут представлены новые результаты, касающиеся асимптотической устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка.

2. Предварительные сведения из стохастического анализа и теории стохастической устойчивости

Здесь мы напомним некоторые сведения из стохастического анализа (и теории стохастической устойчивости) (подробности см., например, [36–39] и [8, 9, 40–43]).

2.1. Случайные величины

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ – некоторое множество, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра подмножеств из Ω, то есть система множеств $\{A\}$, $A \subset \Omega$, замкнутая по отношению к операциям взятия объединения и пересечения конечного или счетного числа множеств $\mathrm{A}_i \in \{\mathrm{A}\}$ $(i \in \mathbb{N})$, операции взятия дополнения A_i до множества Ω, и, кроме того, $\Omega \in \{\mathrm{A}\}$. Пусть далее на множестве $\mathcal{F}$ задана вероятностная мера $\mathrm{P}(\cdot)$, то есть неотрицательная счетно-аддитивная функция множеств из $\mathcal{F}$, $\mathrm{P}: \mathrm{A} \to \mathrm{P}(\mathrm{A})$, $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$, такая, что $\mathrm{P}(\Omega) = 1$. В дальнейшем меру $P(\cdot)$ будем считать *полной*, то есть из $P(A) = 0$ и $A_0 \subset A$ следует, что $A_0 \in \mathcal{F}$, то есть A_0 измеримо. При этом $P(A_0) = 0$.

Тогда тройку $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ называют (полным) вероятностным пространством, элементы $\omega \in \Omega$ – элементарными событиями, а множества из $\mathcal{F}$ – случайными событиями.

Вещественная функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная на множестве Ω, называется случайной величиной со значениями в $\mathbb{R}$, если $\xi(\omega)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, то есть для любого вещественного x множество $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$ (отсюда следует, что для произвольного борелевского множества $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$ множество $\xi^{-1}(\mathrm{B}) = \{\omega : \xi(\omega) \in \mathrm{B}\} \in \mathcal{F}$). Аналогично можно дать определение случайной величины со значениями из n-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве, называются эквивалентными, если $\mathrm{P}\{\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\} = 0$.

Функция $F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) \le x\}$ называется функцией распределения случайной величины $\xi(\omega)$.

Совместной функцией распределения случайных величин $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ называется функция $F_\zeta : R^2 \to [0,1]$, определяемая по формуле

$$F_\zeta(x_1, x_2) = P\{\xi(\omega) \le x_1, \eta(\omega) \le x_2\}, \qquad \zeta = (\xi, \eta).$$

Математическим ожиданием случайной величины $\xi(\omega)$ называется интеграл $\int\limits_\Omega \xi(\omega)\mathrm{P}(d\omega)$ (при условии интегрируемости $|\xi(\omega)|$) и обозначается через $\mathbf{M}\xi$ (в иностранной литературе через $\mathrm{E}\xi$ – от англ. expectation – ожидание).

Величина $D\xi = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2$ называется дисперсией случайной величины $\xi = \xi(\omega)$.

Ковариацией случайных величин ξ и η называется величина

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) := \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)(\eta - \mathrm{M}\eta).$$

Случайные величины ξ и η называются некоррелированными, если

$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$. Некоррелированность случайных величин ξ и η означает ортогональность центрированных случайных величин $\xi-\mathrm{M}\xi$ и $\eta-\mathrm{M}\eta$, если рассматривать случайные величины ξ и η как элементы гильбертова пространства $\mathcal{L}^2(\Omega)=\{\xi(\omega)\}$ случайных величин $\xi(\omega)$ с $\mathrm{M}\xi(\omega)^2<\infty$ и со скалярным произведением

$$(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega)):=\mathrm{M}\xi_1(\omega)\xi_2(\omega).$$

Две случайные величины $\xi:\Omega\to R$ и $\eta:\Omega\to R$ называются независимыми, если для любых двух борелевских множеств $A,B\subset R$

$$P(\xi\in A,\eta\in B)=P(\xi\in A)\cdot P(\eta\in B).$$

В терминах функций распределения независимость случайных величин ξ и η означает, что совместная функция распределения величин ξ и η представима в виде произведения

$$F_\zeta(x_1,x_2)=F_\xi(x_1)\cdot F_\eta(x_2),\quad \zeta=(\xi,\eta).$$

Функция $p_\xi(x), x\in R$, называется плотностью распределения случайной величины ξ, если $p_\xi(x)\ge 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$. Если случайные величины ξ и η имеют плотности вероятности $p_\xi(x_1)$ и $p_\eta(x_2)$, то величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда совместная плотность вероятности $p_\zeta(x_1,x_2)$ случайных величин ξ и η или случайной векторной величины $\zeta=(\xi,\eta)$ представима в виде произведения плотностей распределения величин ξ и η:

$$p_\zeta(x_1,x_2)=p_\xi(x_1)\cdot p_\eta(x_2).$$

Если случайные величины ξ и η независимы и $M|\xi|<\infty$, $M|\eta|<\infty$, то $M(\xi\cdot\eta)=M\xi\cdot M\eta$. Далее, если величины ξ и η независимы и $D\xi<\infty$, $D\eta<\infty$, то $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$. Последнее равенство имеет место и тогда, когда величины ξ и η некоррелированы. Легко видеть, что из независимости случайных величин ξ и η следует их некоррелированность. Обратное верно, если случайные величины ξ и η гауссовы.

2.2. Случайные процессы

Семейство $\{\xi_t(\omega)\}$ $(t\in\mathrm{T}\subset\mathbb{R})$ вещественнозначных случайных величин $\xi_t(\omega)$, зависящих от параметра $t\in\mathrm{T}$, называется случайным процессом (с множеством параметров T) со значениями в $\mathbb{R}$.

Множество T называется областью определения процесса. Рассматриваемые случайные величины $\xi_t(\omega)$, $\omega\in\Omega$ $(t\in\mathrm{T})$ считаются заданными на одном и том же вероятностном пространстве и принимающими значения из $\mathbb{R}$. Аналогично дается определение случайного процесса, принимающего значения из $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем мы будем в основном рассматривать числовые (вещественнозначные) случайные процессы. При этом T – это, как правило, или отрезок $[a,b]$, или полупрямая $[a,+\infty)$, или вся прямая $(-\infty,+\infty)$.

Обозначения случайного процесса: $\xi_t(\omega)$, $\xi(t,\omega)$, ξ_t, $\xi(t)$ $(t\in\mathrm{T})$.

Таким образом, случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathrm{T}$, – это функция $\xi(t,\omega)$ от двух переменных $t \in \mathrm{T}$, $\omega \in \Omega$, которая при каждом фиксированном $t \in \mathrm{T}$ измерима по ω как случайная величина.

Функцию $\xi(t,\omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ называют выборочной траекторией или реализацией случайного процесса. Вместо «случайный процесс» говорят иногда «вероятностный» или «стохастический процесс». В случае, когда T – произвольное множество, вместо термина «случайный процесс» употребляется термин «случайная функция».

Случайные процессы $\xi(t,\omega)$ и $\eta(t,\omega)$, определенные на одном и том же множестве T и одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, называются стохастически эквивалентными, если при любом фиксированном $t \in \mathrm{T}$ выполнено соотношение $\mathrm{P}\{\omega : \xi(t,\omega) = \eta(t,\omega)\} = 1$. В этом случае также говорят, что случайный процесс $\eta(t,\omega)$ является версией или модификацией процесса $\xi(t,\omega)$, и наоборот.

Случайные процессы $\xi(t,\omega)$ и $\eta(t,\omega)$, определенные на множестве T, называются эквивалентными, если $\mathrm{P}\{\omega : \xi(t,\omega) = \eta(t,\omega)$ для всех $t \in \mathrm{T}\} = 1$.

Отметим, что из стохастической эквивалентности случайных процессов $\xi(t,\omega)$ и $\eta(t,\omega)$ ($t \in \mathrm{T}$), вообще говоря, не следует их эквивалентность, поскольку когда T есть несчетное множество (как в нашем случае), объединение $N = \bigcup_{t \in T} N_t$ множеств N_t исключительных значений ω, для которых $\xi(t,\omega) \neq \eta(t,\omega)$, может быть множеством ненулевой меры и даже неизмеримым. Но, наоборот, очевидно, что эквивалентные случайные процессы также стохастически эквивалентны. Таким образом, классы эквивалентных между собой случайных процессов являются подклассами классов стохастически эквивалентных случайных процессов.

Случайный процесс $\xi(t) = \xi(t,\omega)$, $t \in \mathrm{T}$, полностью определяется семейством совместных функций распределения случайных величин $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$ при любых $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}$:

$$\mathrm{F}_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{P}\{\xi(t_1) < x_1, \ldots, \xi(t_n) < x_n\},$$

где $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, причем функции $\mathrm{F}_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)$ должны удовлетворять некоторым естественным условиям согласованности ([34, с. 12]). Набор функций $\mathrm{F}_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)$ называется конечномерными распределениями случайного процесса.

Стохастически эквивалентные случайные процессы $\xi(t,\omega)$ и $\eta(t,\omega)$ имеют одно и то же семейство совместных функций распределения, то есть их *конечномерные распределения совпадают* (но, конечно, не наоборот), но тем не менее их *выборочные траектории* (выборочные функции) могут быть *различными*. Более того, они (выборочные траектории) могут иметь совершенно *различные аналитические свойства*, поскольку множество N_t исключительных значений ω, для которых $\xi(t,\omega) \neq \eta(t,\omega)$, зависит, вообще говоря, от t.

Например, процессы $\xi(t,\omega) \equiv 0$ и $\eta(t,\omega) = 0$ при $t \neq \omega$, $\eta(t,\omega) = 1$ при $t = \omega$, где $\omega \in \Omega$, $\Omega = [0,1]$, стохастически эквивалентны, но:

1) их выборочные траектории различны;

2) каждая выборочная траектория процесса $\xi(t,\omega)$ непрерывна, тогда как ни одна выборочная траектория процесса $\eta(t,\omega)$ не является непрерывной.

Чтобы избежать такой ситуации, рассматривают так называемую *сепарабельную* модификацию (версию) $\eta(t,\omega)$ процесса $\xi(t,\omega)$, то есть такой процесс $\eta(t,\omega)$, поведение которого при всех $t \in \mathrm{T}$ с точностью до события вероятности нуль определяется поведением на каком-нибудь всюду плотном счетном множестве $\Lambda \subset T$.

Точнее процесс $\eta(t,\omega)$, $t \in \mathrm{T}$, называется сепарабельным, если существуют счетное множество $\Lambda \subset T$ всюду плотное в T и множество (событие) $N \in \mathcal{F}$ P-меры нуль (вероятности 0) такие, что для всякого открытого множества $\Delta \subset T$ и любого замкнутого подмножества $A \subset R^n$, два множества (события)

$$\{\,\omega:\ \eta(t,\omega) \in A \ \text{ для всех } \ t \in \Lambda \cap \Delta\,\}$$

и

$$\{\,\omega : \eta(t,\omega) \in A \ \text{ для всех } \ t \in \Delta\,\}$$

из семейства $\mathcal{F}$ отличаются друг от друга только на подмножество $N_0 \subset N$ (меры нуль), и, следовательно, имеют одинаковые вероятности. Другими словами, из первого события следует второе событие с точностью до события вероятности нуль, причем они имеют одинаковые вероятности.

Нетрудно видеть, что если два сепарабельных процесса $\xi(t,\omega)$ и $\eta(t,\omega)$ ($t \in \mathrm{T}$) стохастически эквивалентны, то они просто эквивалентны. (Это следует из того, что множество $N = \bigcup_{t \in T} N_t$ исключительных значений ω, для которых $\xi(t,\omega) \neq \eta(t,\omega)$, будет множеством нулевой меры, то есть событием вероятности нуль, поскольку поведение сепарабельных процессов при всех $t \in \mathrm{T}$ определяется с точностью до события вероятности нуль поведением на некотором всюду плотном счетном множестве $\Lambda \subset T$.)

Можно доказать (см., например, [37, с. 220]), что для всякого процесса $\xi(t,\omega)$, $t \in \mathrm{T}$ (где $\mathrm{T} = [a,b]$ или $\mathrm{T} = [a,+\infty)$) существует *сепарабельная модификация*, то есть стохастически эквивалентный ему сепарабельный процесс.

Достаточное условие непрерывности почти всех траекторий процесса дается фундаментальной теоремой Колмогорова ([39, с. 98]):

Пусть $\xi(t,\omega)$, $t \in [a,b]$, *– случайный процесс на полном вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Пусть существуют положительные числа* c, α *и* ε *такие, что для всех* $s, t \in [a,b]$

$$M\,|\,\xi(t,\omega) - \xi(s,\omega)\,|^{\alpha} \le c\,|\,t-s\,|^{1+\varepsilon}. \qquad (*)$$

Тогда существует стохастически эквивалентный данному процесс $\eta(t,\omega)$ (*сепарабельная модификация* $\xi(t,\omega)$), *почти все траектории которого непрерывны по* t.

Существует другая версия теоремы Колмогорова ([37, с. 242]:

Если сепарабельный случайный процесс $\xi(t,\omega)$, $t \in [a,b]$, *удовлетворяет условию* (*), *то он непрерывен, то есть почти все траектории непрерывны по* t.

Важнейшими характеристиками случайного процесса $\xi(t) = \xi(t,\omega)$, $t \in \mathrm{T}$, являются его математическое ожидание $m(t) = \mathbf{M}\xi(t,\omega)$ и корреляционная функция $K(s,t) := \mathrm{cov}(\xi(s), \xi(t))$, то есть

$$K(s,t) = \mathrm{M}\left[\xi(s) - m(s)\right] \cdot \left[\xi(t) - m(t)\right] \qquad (s,t \in \mathrm{T}).$$

Случайный процесс $\xi(t,\omega)$, $t \in \mathrm{T} = [a,b]$, называется процессом с некоррелированными приращениями, если его приращения на неперекрывающихся отрезках некоррелированы, то есть если для любых $a \le t_0 < t_1 \le t_2 < t_3 \le b$ имеем $\operatorname{cov}(\xi(t_1)-\xi(t_0), \xi(t_3)-\xi(t_2)) = 0$.

Если $\mathrm{M}\xi(t,\omega) \equiv 0$, то некоррелированность приращений совпадает с их ортогональностью относительно скалярного произведения $(\xi,\eta) = \mathrm{M}\xi\eta$.

В этом случае имеем

$$\mathrm{M}(\xi(t_1)-\xi(t_0))(\xi(t_3)-\xi(t_2)) = \operatorname{cov}(\xi(t_1)-\xi(t_0), \xi(t_3)-\xi(t_2)) = 0.$$

Случайный процесс $\xi(t,\omega)$, $t \in \mathrm{T} = [a,b]$, удовлетворяющий условию $\mathrm{M}(\xi(t_1)-\xi(t_0))(\xi(t_3)-\xi(t_2)) = 0$ для любых $a \le t_0 < t_1 \le t_2 < t_3 \le b$, называется процессом с ортогональными приращениями.

Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathrm{T} \subset R$, называется стационарным в узком смысле, если для любого вещественного h и для любых $t_1, t_2, \ldots t_n$ таких, что $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_1+h, t_2+h, \ldots, t_n+h \in T$, совместное распределение случайных величин $\xi(t_1+h), \xi(t_2+h), \ldots, \xi(t_n+h)$ не зависит от h:

$$\mathrm{F}_{t_1, t_2 \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{F}_{t_1+\mathrm{h}, \mathrm{t}_2+\mathrm{h} \ldots, t_n+h}(x_1, \ldots, x_n).$$

Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathrm{T} \subset R$, называется стационарным в широком смысле, если $\mathrm{M}|\xi(t)|^2 < \infty$ и $\mathrm{M}\xi(t)$ не зависит от t, а корреляционная функция зависит только от разности $t-s$:

$$\mathrm{M}\xi(t) = m = const, \qquad K(s,t) = K(t-s).$$

Здесь вторая функция $K(t-s)$ обозначается тоже буквой K и носит название корреляционной функции стационарного процесса.

2.2.1. Гауссовский процесс

Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathrm{T}$ (со значениями в $\mathbb{R}$) называется гауссовским, если его значения $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$ при любых $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}$ в совокупности являются гауссовскими случайными величинами, то есть если все его совместные функции распределения $\mathrm{F}_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n)$ (конечномерные распределения) являются нормальными (гауссовскими).

Напомним, что совместная функция распределения $\mathrm{F}_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n)$ является нормальной, если ее плотность распределения $f_t(x) = p_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид: $f_t(x) = \mathrm{k}\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle \mathrm{A}(x-a), (x-a)\rangle\right\}$, где $\mathrm{k} = \left((2\pi)^n \cdot \det \mathrm{K}\right)^{-1/2}$, A – положительно-определенная матрица: $\mathrm{A} = K^{-1}$, K – корреляционная матрица, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_1 = \mathrm{M}\xi(t_1), \ldots, a_n = \mathrm{M}\xi(t_n)$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение.

Так что $\mathrm{F}_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_t(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n$ $(t = (t_1, \ldots, t_n))$, где f_t – выписанная выше экспоненциальная функция.

2.2.2. Винеровский процесс

Очень важным для теории стохастических дифференциальных уравнений является понятие винеровского процесса.

Стандартным одномерным винеровским процессом, выходящим из 0, называется случайный процесс $\mathrm{w}(t)$, $0 \le t < +\infty$, обладающий свойствами:

1) $\mathrm{w}(0) = 0$ (точнее, $\mathrm{w}(0, \omega) = 0$ для почти всех ω, то есть для всех $\omega \in \Omega$, за исключением меры нуль);

2) для любых $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины $\mathrm{w}(t_0) - \mathrm{w}(0)$, $\mathrm{w}(t_1) - \mathrm{w}(t_0)$, $\mathrm{w}(t_2) - \mathrm{w}(t_1), \ldots, \mathrm{w}(t_n) - \mathrm{w}(t_{n-1})$ независимы;

3) для любых $0 \le s < t < +\infty$ случайная величина $\mathrm{w}(t) - \mathrm{w}(s)$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией $t - s$, то есть $\mathrm{w}(t) - \mathrm{w}(s)$ является гауссовской случайной величиной с плотностью вероятности

$$p(x, t-s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(t-s)}\right\}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

(Плотность вероятности такого вида называется нормальной или гауссовской.)

Если заменить требование $\mathrm{w}(0) = 0$ на $\mathrm{w}(0) = x$, то получим определение стандартного винеровского процесса, выходящего из точки x.

Свойства 2) и 3) означают, что винеровский процесс является процессом с независимыми приращениями, для которого распределение $\mathrm{P}(s, h, \mathrm{B}) \equiv \mathrm{P}\{\mathrm{w}(s+h) - \mathrm{w}(s) \in \mathrm{B}\}$ является гауссовым ($\mathbb{B} \subset \mathbb{R}$ – борелевское множество, $s \ge 0$, $h = t - s > 0$).

Поскольку винеровский процесс $\mathrm{w}(t)$, $0 \le t < \infty$, является процессом с независимыми приращениями, то он является также и процессом с некоррелированными приращениями, и так как $\mathrm{Mw}(t) = 0$, то и процессом с ортогональными приращениями.

Из свойства 3) определения (стандартного) винеровского процесса $\mathrm{w}(t)$ следует, что

$$\mathrm{Mw}(t) \equiv 0, \qquad \mathrm{Dw}(t) = \mathrm{Mw}(t)^2 = t$$

для любого $t \ge 0$.

Нетрудно подсчитать, что корреляционная функция

$$K_{\mathrm{w}}(s, t) = \mathrm{M}\left(\mathrm{w}(s)\mathrm{w}(t)\right) - \mathrm{Mw}(s) \cdot \mathrm{Mw}(t) = \mathrm{M}\left(\mathrm{w}(s) \cdot \mathrm{w}(t)\right) = \min(s, t).$$

Из свойства 3) также следует, что винеровский процесс $\mathrm{w}(t)$, $t \ge 0$, является однородным процессом, то есть при любом $h > 0$ случайная величина $\mathrm{w}(t+h, \omega) - \mathrm{w}(t, \omega)$ имеет одно и то же распределение (зависящее только от h) для всех $t \in [0, +\infty)$.

Винеровский процесс $\mathrm{w}(t, \omega)$ обладает многими важными свойствами. Отметим некоторые из них:

1) $\mathrm{w}(t, \omega)$ есть *гауссовский процесс*;

2) винеровский процесс $\mathrm{w}(t)$, $t \ge 0$, есть процесс со *стационарными приращениями*, то есть при любом сдвиге $t_0, t_1, \ldots, t_n$ на $h > 0$ совместные распределения случайных величин $w(t_1) - w(t_0)$, $w(t_2) - w(t_1)$, ... , $\mathrm{w}(t_n) - w(t_{n-1})$ не меняются.

3) при почти всех $\omega \in \Omega$ (то есть за исключением множества меры нуль) функция $\mathrm{t} \to \mathrm{w}(t, \omega)$ непрерывна, то есть почти все *выборочные траектории винеровского*

процесса непрерывны;

4) при почти всех $\omega \in \Omega$ функция $t \to \mathrm{w}(t, \omega)$ *нигде не дифференцируема*;

5) на каждом интервале $(a, b) \subset [0, +\infty)$ при почти всех $\omega \in \Omega$ функция $t \to \mathrm{w}(t, \omega)$ имеет полную *вариацию, равную бесконечности*.

Многомерный винеровский процесс $\mathrm{w}(t) = \mathrm{w}(t, \omega) = (\mathrm{w}_1(t, \omega), \ldots, \mathrm{w}_m(t, \omega))$, $t \geq 0$, определяется как векторный случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}^m$, обладающей двумя свойствами:

1) случайные процессы $\mathrm{w}_i(t, \omega)$ $(i = 1, \ldots, m)$ являются числовыми (одномерными) винеровскими процессами;

2) случайные процессы $\mathrm{w}_i(t, \omega)$ $(i = 1, \ldots, m)$ являются независимыми, то есть σ-алгебры $\mathcal{F}_i = \sigma(\mathrm{w}_i(t, \omega) : 0 \leq t < \infty)$, порождаемые процессами $\mathrm{w}_i(t, \omega)$ $(i = 1, \ldots, m)$, являются независимыми.

Винеровский процесс служит в каком-то приближении моделью движения взвешенной в жидкости частицы под действием хаотических ударов молекул; поэтому его называют стандартным процессом броуновского движения или просто броуновским движением (названным в честь шотландского ботаника Р. Броуна (R. Brown), который впервые наблюдал это явление).

2.2.3. «Белый шум»

Следующее понятие, которое следует определить, – это «белый шум». При математическом моделировании динамических систем, подверженных воздействию реальных шумов, последние, как правило, заменяются так называемыми «белыми шумами». Это оправдано тем, что реальные шумы во многих случаях могут быть хорошо аппроксимированы белыми шумами.

Формально «белый шум» определяют как производную винеровского процесса $\mathrm{w}(t)$: $\dfrac{d\mathrm{w}(t)}{dt} =: \dot{\mathrm{w}}(t)$. Это формальное определение становится корректным, если под производным понимать обобщенную производную (в обычном смысле производная не существует, ибо винеровский процесс недифференцируем).

Строгое математическое определение «белого шума», как обобщенного случайного процесса $\dot{\mathrm{w}}(t) \equiv \dfrac{d\mathrm{w}(t)}{dt}$, где $\mathrm{w}(t)$ – винеровский процесс, дается в рамках теории обобщенных случайных процессов. Обобщенный случайный процесс определяется как непрерывный линейный функционал $\mathcal{L}(\varphi)$, определенный на пространстве всех бесконечно дифференцируемых функций $\mathcal{D} = \{\varphi\}$ на $\mathbb{R}$ с компактным носителем, то есть равных нулю вне ограниченных замкнутых множеств из $\mathbb{R}$.

В общем, одномерным «белым шумом» называют обобщенную производную $\dfrac{d\xi(t)}{dt}$ от любого числового случайного процесса $\xi(t)$ с независимыми приращениями (рассматриваемого как обобщенный процесс), удовлетворяющего условиям:

$$\xi(0) = 0, \quad \mathrm{M}\xi(t) = 0, \quad \mathrm{D}\xi(t) = \mathrm{M}\xi(t)^2 = t$$

для всех $t \geq 0$.

В частности, *когда* $\xi(t)$ есть *винеровский процесс*: $\xi(t) = \mathrm{w}(t)$, соответствующий обобщенный процесс $\dfrac{d\mathrm{w}(t)}{dt}$ называют гауссовским белым шумом. (Подробности

см., например, [36, с. 307–316].) В дальнейшем под белым шумом мы будем понимать гауссовский белый шум.

Часто, особенно в технической литературе, белый шум определяют как гауссовский случайный процесс $\dot{w}(t)$, для которого

$$M\dot{w}(t)=0 \quad \text{для всех} \quad t\in\mathbb{R}, \qquad M[\dot{w}(t)\dot{w}(s)]=\delta(t-s) \quad \text{для всех} \quad s,t\in\mathbb{R} \qquad (**)$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, то есть

$$M\dot{w}(t)=0 \quad \text{для всех} \quad t\in\mathbb{R}, \qquad K(t,s)=M[\dot{w}(t)\dot{w}(s)]=0 \quad \text{при} \quad t\neq s,$$

$$D\dot{w}(t)=M\dot{w}(t)^2=\infty \quad \text{для всех} \quad t\in\mathbb{R}.$$

Предыдущие равенства означают, что белый шум – это стационарный гауссовский процесс с некоррелированными (и так как процесс – гауссовский, то и с независимыми) значениями со средним значением, тождественно равным нулю и дисперсией, равной бесконечности для всех t. Однако так определенный объект не является случайным процессом в обычном смысле этого слова (процесс с указанными свойствами может не существовать). Но, несмотря на это, указанные выше свойства, вытекающие из соотношений (**), дают существенную информацию о гауссовском белом шуме, понимаемом строго как обобщенный случайный процесс.

Продолжение следует.

To be continued.

Примечания

1. Гихман И.И. К теории дифференциальных уравнений случайных процессов // Украинский матем. журн. 1950. Т. 2, № 3. С. 45–69.
2. Ito K. On stochastic differential equations // Memoirs Amer. Math. Soc. 1951. No. 4 (Russian transl.: Ito K. On stochastic differential equations // Mathematics. 1957. No. 1:1. P. 78–116.)
3. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Москва; Ленинград, 1950. 472 с. (Английские переводы: 1966; 1992).
4. Bertram J.E., Sarachik P.E. Stability of circuits with randomly time-varying parameters // Proc. Internat. Sympos. on Circuit and Information Theory. Los Angeles, 1959. Vol. CT-6. P. 809–823.
5. Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 809–823.
6. Wonham W.M. Liapunov criteria for weak stability stochastic equation // Journ. Diff. Equat. 1966. Vol. 2, No. 2. P. 195–207.
7. Wonham W.M. A Lyapunov method for the estimation of statistical averages // Journ. Diff. Equat. 1966. Vol. 2, No. 3. P. 365–377.
8. Kushner H.J. Stochastic Stability and Control. New York: Academic Press, 1967. 198 p.
9. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Москва: Наука, 1969. 368 с.
10. Левит М.В. Частотный критерий абсолютной стохастической устойчивости нелинейных систем дифференциальных уравнений Ито // Успехи математических наук. 1972. Т. 27, вып. 4 (166). С. 215–216.
11. Левит М.В., Якубович В.А. Алгебраические критерии стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействием типа «белый шум» // Прикладная математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 143–146.
12. Пакшин П.В. Устойчивость одного класса нелинейных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 1977. Вып. 4. С. 27–36.
13. Пакшин П.В. Экспоненциальная устойчивость одного класса нелинейных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 1980. Вып. 2. С. 65–71.
14. Пакшин П.В., Угриновский В.А. Стохастические задачи абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2006. Вып. 11. С. 122–158.
15. Кореневский Д.Г. Коэффициентный критерий и достаточные условия асимптотической устойчивости с вероятностью единица линейных систем стохастических дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290, № 5. С. 1041–1044.

16. Arnold L., Schmalfuss B. Lyapunov's Second Method for Random Dynamical Systems // J. Differential Equations. 2001. Vol. 177. P. 235–265.
17. Mao X. Lyapunov's Second Method for Stochastic Differential Equations // Proc. Intern. Conf. Diff. Equations.Berlin, 1999. Vol. 1. P. 136–141.
18. Mao X. Some Contributions to Stochastic Asymptotic Stability and Boundedness via Multiple Lyapunov Functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2001. Vol. 260. P. 325–340.
19. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd ed. Chichester, UK: Horwood Publishing Limited, 2007. 422 p.
20. Kushner H.J. On the construction stochastic Lyapunov functions // IEEE Trans. Autom. Control. 1965. Vol. 10, No. 4. P. 477–478.
21. Шумафов М.М. О построении функций Ляпунова для некоторых нелинейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка и вопросы устойчивости // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 6. С. 1143–1145.
22. Шумафов М.М. О диссипативности случайных процессов, определяемых некоторыми нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 175–176.
23. Шумафов М.М. Функции Ляпунова для двумерных линейных стационарных стохастических систем // Труды физического общества Республики Адыгея. 1997. № 2. С. 1–26. URL: http://fora.adygnet.ru
24. Shumafov M.M. On the stochastic stability of a nonlinear system perturbed by a "white" noise random process // Proceedings of Physical Society of Adyghea Republic. 1999. No. 4. P. 118–124. URL: http://fora.adygnet.ru
25. Shumafov M.M. On the stability of a second-order nonlinear stochastic system // Proceedings of Physical Society of Adyghea Republic. 2002. No. 7. P. 98–102. URL: http://fora.adygnet.ru
26. Шумафов М.М. О диссипативности решений стохастических дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник Адыгейского госуниверситета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2008. Вып. 4 (32). С. 11–17. URL: http://vestnik.adygnet.ru
27. Шумафов М.М. О стохастической устойчивости некоторых двумерных динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 6. С. 892–896.
28. Шумафов М.М., Тлячев В.Б. Построение функций Ляпунова для линейных стохастических стационарных систем второго порядка // Итоги науки и техники. Сер.: Современная математика и ее приложения. Тематический обзор. 2018. Т. 149. С. 118–128.
29. Shumafov M.M., Tlyachev V.B. Criteria of stochastic stability of two-dimensional linear stationary systems perturbed by white noise // International Workshop on Dynamical Systems in Science and Technology (DSST-2018), Aluschta, September 17–21 2018. Aluschta, 2018. 63 p.
30. Shumafov M.M., Tlyachev V.B. On the stochastic stability of the second-order differential systems // Nonlocal Boundary Problems and Related Mathematical Biology, Informatic and Physic Problems. 5th International Conference, dedicated to the 80th birthday of IAAS academician A.M. Nakhushev, Nalchik, December 4–7 2018. Nalchik, 2018. 243 p.
31. Shumafov M.M., Tlyachev V.B. On the Stability of Random Processes Defined by Second Order Differential Equations // Equations of Convolution Type in Science and Technology (ECTST-2019): International Conference, dedicated to the 90th birthday of Professor Yu.I. Cherskii, Yalta, September 25–28 2019. Yalta, 2019. P. 6–8.
32. Shumafov M.M., Tlyachev V.B. Stochastic stability criteria for two-dimensional linear autonomous systems perturbed by white noise // arXiv: 2104.01637v1 [math DS] 4 Apr. 2021.
33. Thygesen Uffe Hogsbro. A Survey of Lyapunov Techniques for Stochastic Differential Equations // IMM Tech. Report. 1997. No. 18. 25 p. URL: http://www.imm.dtu.dk
34. Visentin F. A Survey on Stability for Stochastic Differential Equations // Scientiae Mathematical Japonicae. 2013. Vol. 76, No. 1. P. 147–152.
35. Shumafov M.M. Second-Order Stochastic Differential Equations: Stability, Dissipativity, Periodicity. V. – A Survey // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2021. Iss. 2 (281). P. 11–31. URL: http://vestnik.adygnet.ru
36. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: Вища школа, 1979. 408 с.
37. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Москва: Наука, 1965. 656 с.
38. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. Москва: Наука, 1985. 320 с.
39. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. Москва: Наука, 1975. 320 с.
40. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. Москва: Мир, 2003. 407 с.
41. Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. New York: John Wiley and Sons, 1974. 228 p.
42. Friedman A. Stochastic Differential Equations and Applications // Academic Press. 1975.

Vol. I. 248 p.
43. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd ed. Chichester, UK: Horwood Publishing Limited, 2007. 422 p.

References

1. Gikhman I.I. On the theory of differential equations of stochastic processes // Ukraine Mathem. Journ. 1950. Vol. 2, No. 3. P. 45–69.
2. Ito K. On stochastic differential equations // Memoirs Amer. Math. Soc. 1951. No. 4 (Russian transl.: Ito K. On stochastic differential equations // Mathematics. 1957. No. 1:1. P. 78–116.)
3. Lyapunov A.M. General problem on stability of motion: Doctoral dissertation. Kharkov University, 1892. 251 p. (English transl.: 1966; 1992).
4. Bertram J.E., Sarachik P.E. Stability of circuits with randomly time-varying parameters // Proc. Internat. Sympos. on Circuit and Information Theory. Los Angeles, 1959. Vol. CT-6. P. 809–823.
5. Kats I.Ya., Krasovsky N.N. On the stability of systems with random parameters // Prikl. Mat. Mekh. 1960.Vol. 24, No. 5. P. 809–823. (English transl.: J. Appl. Math. Mech. 1960. No. 24. P. 1225–1246).
6. Wonham W.M. Liapunov criteria for weak stability stochastic equation // Journ. Diff. Equat. 1966. Vol. 2, No. 2. P. 195–207.
7. Wonham W.M. A Lyapunov method for the estimation of statistical averages // Journ. Diff. Equat. 1966. Vol. 2, No. 3. P. 365–377.
8. Kushner H.J. Stochastic Stability and Control. New York: Academic Press, 1967. 198 p.
9. Khasminsky R.Z. Stochastic Stability of Differential Equations. 2nd ed. Heidelberg; Dordrecht; London; New York: Springer, 2012. 339 p.
10. Levit M.V. Frequency Domain Criterion for Absolute Stochastic Stability of Nonlinear Systems of Ito's Differential Equations // Successes of Mathematical Sciences. 1972. Vol. 27, Iss. 4 (166). P. 215–216.
11. Levit M.V., Yakubovich V.A. Algebraic criteria for stochastic stability of linear systems with parametric control of the type of "white noise" // Applied Mathematics and Mechanics. 1972. Vol. 36, Iss. 1. P. 143–146.
12. Pakshin P.V. Stability of one class of nonlinear stochastic systems // Automation and Remote Control. 1977. Vol. 38, No. 4. P. 474–481.
13. Pakshin P.V. Exponential Stability of a Class of Nonlinear Stochastic Systems // Automation and Remote Control. 1980. Vol. 41, No. 2. P. 189–194.
14. Pakshin P.V., Ugrinovsky V.A. Stochastic problems for absolute stability // Autom. Remote Control. 2006. Vol. 67, No. 11. P. 1811–1846.
15. Korenevsky D.G. Coefficient criterion and sufficient conditions for asymptotic stability with probability one of linear systems of Ito stochastic differential equations // Reports of Academy of Sciences of the USSR. 1986. Vol. 290, No. 5. P. 1041–1044.
16. Arnold L., Schmalfuss B. Lyapunov's Second Method for Random Dynamical Systems // J. Differential Equations. 2001. Vol. 177. P. 235–265.
17. Mao X. Lyapunov's Second Method for Stochastic Differential Equations // Proc. Intern. Conf. Diff. Equations.Berlin, 1999. Vol. 1. P. 136–141.
18. Mao X. Some Contributions to Stochastic Asymptotic Stability and Boundedness via Multiple Lyapunov Functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2001. Vol. 260. P. 325–340.
19. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd ed. Chichester, UK: Horwood Publishing Limited, 2007. 422 p.
20. Kushner H.J. On the construction stochastic Lyapunov functions // IEEE Trans. Autom. Control. 1965. Vol. 10, No. 4. P. 477–478.
21. Shumafov M.M. On the construction of Lyapunov functions for some second order nonlinear stochastic differential equations and questions of stability // Differential Equations. 1981. Vol. 17, No. 6. P. 1143–1145.
22. Shumafov M.M. On the dissipativity of random processes defined by some nonlinear second order differential equations // Differential Equations. 1993. Vol. 29, No. 1. P. 175–176.
23. Shumafov M.M. Lyapunov Functions for Two-Dimensional Linear Stationary Stochastic Systems // Proceedings of Physical Society of Adyghea Republic. 1997. No. 2. P. 1–26. URL: http://fora.adygnet.ru
24. Shumafov M.M. On the stochastic stability of a nonlinear system perturbed by a "white" noise random process // Proceedings of Physical Society of Adyghea Republic. 1999. No. 4. P. 118–124. URL: http://fora.adygnet.ru
25. Shumafov M.M. On the stability of a second-order nonlinear stochastic system // Proceedings of Physical Society of Adyghea Republic. 2002. No. 7. P. 98–102. URL: http://fora.adygnet.ru
26. Shumafov M.M. On the dissipativity of solutions of the second order stochastic differential equations // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences.

2008. Iss. 4 (32). P. 11–17. URL: http://vestnik.adygnet.ru

27. Shumafov M.M. On the Stochastic Stability of Some Two-Dimensional Dynamical Systems // Differential Equations. 2010. Vol. 46, No. 6. P. 892–896.

28. Shumafov M.M., Tlyachev V.B. Construction of Lyapunov functions for the second-order linear stationary stochastic systems // Results of Science and Technology. Ser.: Modern Mathematics and Its Applications. Thematic review. 2018. Vol. 149. P. 118–128.

29. Shumafov M.M., Tlyachev V.B. Criteria of stochastic stability of two-dimensional linear stationary systems perturbed by white noise // International Workshop on Dynamical Systems in Science and Technology (DSST-2018), Aluschta, September 17–21 2018. Aluschta, 2018. 63 p.

30. Shumafov M.M., Tlyachev V.B. On the stochastic stability of the second-order differential systems // Nonlocal Boundary Problems and Related Mathematical Biology, Informatic and Physic Problems. 5th International Conference, dedicated to the 80th birthday of IAAS academician A.M. Nakhushev, Nalchik, December 4–7 2018. Nalchik, 2018. 243 p.

31. Shumafov M.M., Tlyachev V.B. On the Stability of Random Processes Defined by Second Order Differential Equations // Equations of Convolution Type in Science and Technology (ECTST-2019): International Conference, dedicated to the 90th birthday of Professor Yu.I. Cherskii, Yalta, September 25–28 2019. Yalta, 2019. P. 6–8.

32. Shumafov M.M., Tlyachev V.B. Stochastic stability criteria for two-dimensional linear autonomous systems perturbed by white noise // arXiv: 2104.01637v1 [math DS] 4 Apr. 2021.

33. Thygesen Uffe Hogsbro. A Survey of Lyapunov Techniques for Stochastic Differential Equations // IMM Tech. Report. 1997. No. 18. 25 p. URL: http://www.imm.dtu.dk

34. Visentin F. A Survey on Stability for Stochastic Differential Equations // Scientiae Mathematical Japonicae. 2013. Vol. 76, No. 1. P. 147–152.

35. Shumafov M.M. Second-Order Stochastic Differential Equations: Stability, Dissipativity, Periodicity. V. – A Survey // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2021. Iss. 2 (281). P. 11–31. URL: http://vestnik.adygnet.ru

36. Gikhman I.I., Skorokhod A.V., Yadrenko M.I. Theory of probability and mathematical statistics. Kiev: Vishcha Shkola, 1979. 408 p.

37. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Introduction to the Theory of Random Processes. Philadelphia: Saunders, 1969. 516 p.

38. Rozanov Yu.A. Probability Theory, Random Processes and Mathematical Statistics. Dordrecht: Springer Science and Business Media, 1995. 259 p.

44. Wentzel A.D. The course of the theory of random processes. Moscow: Nauka, 1975. 320 p.

39. Oksendal B. Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 2007. 332 p.

40. Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. New York: John Wiley and Sons, 1974. 228 p.

41. Friedman A. Stochastic Differential Equations and Applications // Academic Press. 1975. Vol. I. 248 p.

42. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd ed. Chichester, UK: Horwood Publishing Limited, 2007. 422 p.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 20.09.2021; одобрена после рецензирования 19.10.2021; принята к публикации 20.10.2021.

The article was submitted 20.09.2021; approved after reviewing 19.10.2021; accepted for publication 20.10.2021.

© М.М. Шумафов, Т.А. Панеш, М.А. Хаваджа, 2021