Научная статья
УДК 517.925.4:515.164
ББК 22.161.6
Р 65
DOI: 10.53598/2410-3225-2021-4-291-24-29

О грубых непрерывных кусочно-гладких динамических системах на плоскости

(*Рецензирована*)

Владимир Шлеймович Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Россия, vroitenberg@mail.ru

Аннотация. *Показано, что непрерывное кусочно-гладкое векторное поле на плоскости, имеющее только гиперболические особые точки, не лежащие на линиях переключения, только гиперболические замкнутые траектории, трансверсальные линиям переключения, и не имеющее траекторий, идущих из седла в седло, является грубым. Множество таких полей открыто и всюду плотно в пространстве всех непрерывных кусочно-гладких векторных полей.*

Ключевые слова: *векторное поле на плоскости, непрерывная кусочно-гладкая динамическая система, грубость, типичность*

Original Research Paper

On structurally stable continuous piecewise-smooth dynamical systems on the plane

Vladimir Sh. Roytenberg

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia, vroitenberg@mail.ru

Abstract. *We show, that a continuous piecewise-smooth vector field in the plane, which has only hyperbolic singular points, that do not lie on the switching lines, only hyperbolic closed trajectories transverse to the switching lines, and does not have trajectories going from saddle to saddle, is structurally stable. The set of such fields is open and everywhere dense in the space of all continuous piecewise smooth vector fields.*

Keywords: *planar vector field, continuous piecewise-smooth dynamical system, structural stability, generality*

Введение

Динамические системы, задаваемые непрерывными кусочно-гладкими векторными полями, занимают «промежуточное» положение между системами, задаваемыми гладким векторными полями и разрывными кусочно-гладкими векторными полями. Все эти типы систем используются при математическом моделировании реальных процессов.

Понятие грубости впервые было введено в 1937 г. А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным для гладких динамических систем на плоскости. Суть их определения состоит в том, что при малых в C^1-норме возмущениях грубого векторного поля существует близкий к тождественному гомеоморфизм, переводящий фазовый портрет возмущенной системы в фазовый портрет невозмущенной системы. Для C^r-гладких систем $(r \geq 1)$ на замкнутых многообразиях получены естественные необходимые и

достаточные условия грубости [1, 2]. Для разрывных кусочно-гладких векторных полей на плоскости в [3] дано определение грубости и получены необходимые и достаточные условия грубости (см. также [4]). Понятие грубости и условия грубости для непрерывных кусочно-гладких векторных полей, по-видимому, до сих пор явно не формулировались, что не мешало изучению бифуркации таких систем, то есть описанию изменения структуры фазовых портретов при изменении параметров [5].

В настоящей работе дан вариант определения грубости непрерывных кусочно-гладких векторных полей и описано открытое всюду плотное множество Σ_+^r в пространстве всех таких полей, состоящее из грубых векторных полей. Это множество не совпадает с множеством всех грубых векторных полей. Примеры грубых векторных полей, не принадлежащих Σ_+^r, приведены в п. 3.

1. Непрерывные кусочно-гладкие векторные поля на плоскости

Пусть M – замкнутая область на плоскости $\mathbf{R}^2$ с C^{r+1}-гладкой границей ∂M, $S_1,\ldots,S_l$ – непересекающиеся между собой и с ∂M замкнутые C^{r+1}-гладкие кривые в M, $r \geq 1$, $S := \bigcup_{i=1}^{l} S_i$, $D = \{M_1, M_2, ..., M_n\}$ – разбиение множества $M \setminus S$ на связные компоненты. Пусть $\mathrm{X}^r(\overline{M_i})$ – банахово пространство C^r-векторных полей на $\overline{M_i}$ с C^r-нормой [6], которую обозначим $\|\cdot\|_r^i$. Обозначим $\mathrm{X}^r(M,D)$ банахово пространство непрерывных векторных полей X на M таких, что для любого $i = 1,2,...,n$ $X^i := X\big|_{\overline{M_i}} \in \mathrm{X}^r(\overline{M_i})$, с нормой $\|X\|_r := \max\limits_{i=1,..,n} \left\| X\big|_{\overline{M_i}} \right\|_r^i$. Пространство $\mathrm{X}^r(M)$ C^r-гладких векторных полей на M можно рассматривать как подпространство в $\mathrm{X}^r(M,D)$. Векторное поле $X \in \mathrm{X}^r(M,D)$ назовем *непрерывным кусочно-гладким векторным полем в области* M *с разбиением* D. Множество S и его компоненты S_i будем называть *линиями переключения* поля X.

Пусть $\mathrm{X}_+^r(M,D)$ – открытое подмножество в $\mathrm{X}^r(M,D)$, состоящее из векторных полей, не касающихся ∂M, $\mathrm{X}_+^r(M) := \mathrm{X}^r(M) \cap \mathrm{X}_+^r(M,D)$.

Векторное поле $X \in \mathrm{X}^r(M,D)$ удовлетворяет условию Липшица. Поэтому для любой точки $x^0 \in M$ однозначно определена траектория, выходящая из этой точки, – кривая $\xi(x^0,\cdot): J \to M$, где J – наибольший промежуток такой, что $0 \in J$, $\xi(x^0,0) = x^0$, $\forall t \in J$ $\frac{d}{dt}\xi(x^0,t) = X(\xi(x^0,t))$. Множество точек $L = \{x = \xi(x^0,t),\ t \in J\}$, также будем называть траекторией. Из контекста обычно ясно, что под траекторией понимается.

2. Основные результаты

Векторное поле $X \in \mathrm{X}^r(M,D)$ называется *грубым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого векторного поля $\tilde{X} \in \mathrm{X}^r(M,D)$, удовлетворяющего условию $\left\|\tilde{X} - X\right\|_r < \delta$, существует такой гомеоморфизм $h: M \to M$, что для любой траектории L поля X $h(L)$ – траектория поля $\tilde{X}$, при этом $\forall x \in M$ $\left|h(x) - x\right| < \varepsilon$.

Особую точку x^0 поля $X \in \mathrm{X}^r(M,D)$ назовем *гиперболической*, если $x^0 \in \operatorname{int} M_i$ при некотором $i = 1,2,...,n$ и x^0 – гиперболическая точка для векторного

поля $X^i \in \mathrm{X}^r(\overline{M_i})$, то есть $\det dX^i(x^0) \neq 0$. Пусть замкнутая траектория $\Gamma : x = \xi(t)$ поля X трансверсальна линии переключения S поля, $x^0 = \xi(t_0) \in M \setminus S$. Выберем трансверсаль к Γ в точке x^0 – такое C^{r+1} – отображение $\eta : (-1,1) \to M \setminus S$, что $\eta(0) = x^0$, $\forall u \in (-1,1)$ векторы $\eta'(u)$ и $X(\eta(u))$ линейно независимы. Тогда определено отображение последования по траекториям поля: $\eta(u) \mapsto \eta(f(u))$, $|u| < \bar{u} < 1$, где $f(\cdot) \in C^r$, $f(0) = 0$, $f'(u) > 0$. Производная $f'(0)$ не зависит от выбора точки $x^0 \in \Gamma$ и трансверсали к Γ в этой точке. Назовем Γ *гиперболической замкнутой траекторией*, если $f'(0) \neq 1$.

Обозначим Σ_+^r множество векторных полей из $\mathrm{X}_+^r(M,D)$, для которых все особые точки и замкнутые траектории гиперболические и не существует траекторий, идущих из седла в седло.

Теорема. *Множество* Σ_+^r *открыто и всюду плотно в* $\mathrm{X}_+^r(M,D)$ *и состоит из грубых векторных полей.*

Доказательство. Доказательство открытости Σ_+^r и грубости векторных полей из Σ_+^r аналогично соответствующему доказательству в [7] для гладких векторных полей. Существенно используется следующая лемма, аналогичная утверждениям пп. 4.1 и 4.2 книги [7] об элементарных четырехугольниках.

Лемма. *Пусть* L *– незамкнутая траектория векторного поля* $X \in \mathrm{X}_+^r(M,D)$, x_0 *и* x_1 *две различные точки на ней,* $\eta_k : (-1,1) \to M$ $(k = 0,1)$ *– трансверсали к* L *в точках* $\eta_k(0) = x_k$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие* $\delta > 0$ *и* $0 < \bar{u} < 1$, *что для каждого векторного поля* $\tilde{X} \in \mathrm{X}_+^r(M,D)$, $\left\|\tilde{X} - X\right\|_r < \delta$, *существует гомеоморфизм* $\Phi_{\tilde{X}} : [-\bar{u},\bar{u}] \times [0,1] \to M$ *такой, что* $\forall u \in [-\bar{u},\bar{u}]$ $\Phi_{\tilde{X}}(\{u\} \times [0,1])$ *– дуга траектории поля,* $\Phi_{\tilde{X}}(u,0) = \eta_0(u)$, $\Phi_{\tilde{X}}(u,1) \in \eta_1(-1,1)$, $\forall (u,s) \in [-\bar{u},\bar{u}] \times [0,1]$ $|\Phi_{\tilde{X}}(u,s) - \Phi_X(u,s)| < \varepsilon$.

Для гладких векторных полей отображения $\Phi_{\tilde{X}}$ являются диффеоморфизмами, однако в доказательстве достаточных условий грубости в [7] используется только их гомеоморфность.

Докажем плотность Σ_+^r. Пусть $X \in \mathrm{X}_+^r(M,D) \setminus \Sigma_+^r$. Зададим число $\varepsilon > 0$. Согласно доказательству теоремы Вейерштрасса о приближении [8] для любого $N \geq 4$ на M существует полиномиальное векторное поле Y такое, что $\left\|Y - X^i\right\|_r^i < \varepsilon / N$ для всех $i = 1,2,...,n$. Выбрав достаточно большое N, можно считать, что $Y \in \mathrm{X}_+^r(M)$. Так как грубые векторные поля всюду плотны в $\mathrm{X}_+^r(M)$ [6, 7], то существует векторное поле $Z \in \mathrm{X}_+^r(M)$, для которого $\left\|Y - Z\right\|_r < \varepsilon / 4$, имеющее только гиперболические особые точки и замкнутые траектории и не имеющее траекторий, идущих из седла в седло. Так как у поля Z особые точки могут находиться на линии S, а замкнутые траектории касаться S, то Z может не принадлежать Σ_+^r.

Выберем цилиндрические C^{r+1}-координаты $\rho, \varphi \bmod 2\pi$, $|\rho| < 2$, в непересекающихся между собой окрестностях каждой кривой S_i, $i = 1,...,l$, так, чтобы S_i

имело уравнение $\rho = 0$. Обозначим U_i окрестность кривой S_i, задаваемую неравенством $|\rho| < 1$. Пусть в $\overline{U_i}$ $Z(\rho,\varphi) = P_i(\rho,\varphi)\partial/\partial\rho + Q_i(\rho,\varphi)\partial/\partial\varphi$, $a:(-1,1)\to[0,1]$ – такая C^∞-функция, что $a(\rho)=1$ при $|\rho|\le 1/3$ и $a(\rho)=0$ при $|\rho|\ge 2/3$. Рассмотрим отображения $g_\mu : M \to M$, определенные следующим образом: в точках каждой окрестности U_i g_μ переводит точку с координатами $(\rho, \varphi \bmod 2\pi)$ в точку с координатами $(\rho - \mu a(\rho), \varphi \bmod 2\pi)$, а в остальных точках $g_\mu(x) = x$. При достаточно малых μ $(0<\mu<\mu_0)$ g_μ – диффеоморфизм, поле $Z_\mu := (dg_\mu)^{-1}\circ Z \circ g_\mu$ имеет только гиперболические особые точки и замкнутые траектории и не имеет траекторий, идущих из седла в седло, $\|Z - Z_\mu\|_r < \varepsilon/4$.

Пусть замкнутая траектория Γ поля Z периода T пересекается с S_i. Связные компоненты $\Gamma\cap U_i$, содержащие точки, принадлежащие $\Gamma\cap S_i$, будем называть отмеченными. Любая компонента $\Gamma\cap U_i$ задается уравнениями $\rho=\rho_*(t)$, $\varphi=\varphi_*(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$, где $0\le\alpha<\beta\le T$, $\dot\rho_*(t) = P_i(\rho_*(t),\varphi_*(t))$. Все функции $|P_i(\rho,\varphi)|$, $|\rho|\le 1$, $\varphi\in[0,2\pi]$, $i=1,...,l$, ограничены сверху одной постоянной, которую обозначим C. Если $\rho_*(t_0)=0$ при некотором $t_0\in(\alpha,\beta)$, то

$$1 = \rho_*(\beta) - \rho_*(t_0) = \int_{t_0}^{\beta} P_i(\rho_*(t),\varphi_*(t))\,dt \le C(\beta-\alpha),$$

и потому $\beta-\alpha\ge 1/C$. Так как интервалы (α,β) для разных компонент $\Gamma\cap U_i$ между собой не пересекаются, то отмеченных компонент $\Gamma\cap U_i$ конечное число.

Без ограничения общности можно считать, что эти компоненты задаются в цилиндрических координатах уравнениями $p=\hat p_{ij}(t)$, $\varphi=\hat\varphi_{ij}(t)$, $t\in(\alpha_{ij},\beta_{ij})$, $0\le\alpha_{ij}<\beta_{ij}\le T$, $j=1,...,p_j$. Для векторного поля Z_μ $\Gamma_\mu := g_\mu(\Gamma)$ – замкнутая траектория, а любая компонента $\Gamma_\mu\cap U_i$ задается уравнениями $\rho=\rho_*(t)-\mu a(\rho_*(t))$, $\varphi=\varphi_*(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$, где $\rho=\rho_*(t)$, $\varphi=\varphi_*(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$ – уравнение какой-нибудь компоненты $\Gamma\cap U_i$. При достаточно малых $\mu\in(0,\mu_0)$ имеем следующие утверждения: если $\rho_*(t)\ne 0$ при $t\in(\alpha,\beta)$, то и $\rho_*(t)-\mu a(\rho_*(t))\ne 0$, то есть, если компонента $\Gamma\cap U_i$ не пересекается с S_i, то и соответствующая компонента $\Gamma_\mu\cap U_i$ не пересекается с S_i. Нули функции $\hat p_{ij}(t)-\mu a(\hat p_{ij}(t))$, $t\in(\alpha_{ij},\beta_{ij})$ совпадают с нулями функции $\hat p_{ij}(t)-\mu$, $t\in(\alpha_{ij},\beta_{ij})$, причем в окрестности каждого нуля $\hat p_{ij}(t)-\mu a(\hat p_{ij}(t)) = \hat p_{ij}(t)-\mu$. По теореме Сарда [9] множество критических значений функции $\hat p_{ij}(t)$, $t\in(\alpha_{ij},\beta_{ij})$ имеет нулевую меру. Так как замкнутых траекторий у поля Z конечное число, то найдется такое $\mu\in(0,\mu_0)$, что для любой замкнутой траектории Γ при всех $i=1,...,l$, $j=1,...,p_j$ нули функций $\hat p_{ij}(t)-\mu a(\hat p_{ij}(t))$, $t\in(\alpha_{ij},\beta_{ij})$ простые, и потому Γ_μ трансверсально S. Так как любая замкнутая траектория поля Z_μ имеет вид $g_\mu(\Gamma)$, где Γ – замкнутая траектория поля Z, то все замкнутые траектории поля $V_0 = Z_\mu$ трансверсальны S.

При достаточно малом $\nu>0$ векторное поле $V_\nu := (dg_\nu)^{-1}\circ V_0\circ g_\nu$ имеет только гиперболические замкнутые траектории, трансверсальные S, гиперболические особые

точки, принадлежащие $M \setminus S$, не имеет траекторий, идущих из седла в седло, $\|V_\nu - V_0\|_r < \varepsilon/4$. Следовательно, векторное поле $V_\mu \in \Sigma_+^r$, $\|V_\mu - X\|_r < \varepsilon$, и плотность Σ_+^r в $\mathrm{X}_+^r(M,D)$ доказана.

3. О грубых векторных полях, не принадлежащих множеству Σ_+^r

В типичных однопараметрических семействах векторных полей из $\mathrm{X}_+^r(M,D)$ уже могут встретиться векторные поля, у которых замкнутая траектория Γ имеет квадратичное касание с линией переключения S. Из работы [10] следует, что на трансверсали к Γ определена C^1-функция последования $f(u)$, $f(0)=0$; и в случае $f'(0) \neq 1$ Γ является грубой траекторией. Поэтому в $\mathrm{X}_+^r(M,D)$ существуют грубые векторные поля, имеющие такие траектории и потому не принадлежащие Σ_+^r.

В типичных однопараметрических семействах векторных полей из $\mathrm{X}_+^r(M,D)$ также могут встретиться векторные поля, у которых есть грубые особые точки, принадлежащие S. Такой особой точкой, например, является точка $x_0 \in \bar{M}_i \cap \bar{M}_j$, для которой линейные операторы $dX^i(x_0)$ и $dX^j(x_0)$ имеют различные отрицательные собственные значения, а соответствующие одномерные собственные подпространства трансверсальны касательной к S в точке x_0. Точка x_0 является для поля X грубым устойчивым топологическим узлом [5]. Поэтому в $\mathrm{X}_+^r(M,D)$ существуют грубые векторные поля, имеющие такие особые точки и потому не принадлежащие Σ_+^r.

Нетрудно построить векторное поле из $\mathrm{X}_+^r(M,D)$, имеющее замкнутую траекторию, для которой множество точек касания с S бесконечно. Функция последования на трансверсали к такой траектории определена и непрерывна, но вряд ли дифференцируема. Поэтому полное решение вопроса, какие замкнутые траектории могут быть у грубого векторного поля из $\mathrm{X}_+^r(M,D)$, представляется бесперспективным. Это же замечание относится и к особым точкам грубых векторных полей на линии переключения.

Примечания

1. Hayashi S. Connecting Invariant Manifolds and the Solution of C^1 Stability and Ω-Stability Conjectures for Flows // Annals of Mathematics. Second Series. 1997. Vol. 145, No. 1. P. 81–137.

2. Robinson C. Structural stability of vector fields // Annals of Mathematics. Second Series. 1974. Vol. 99, No. 1. P. 154–175.

3. Козлова В.С. Грубость разрывных систем // Вестник МГУ. Сер.: Математика и механика. 1984. № 5. С. 16–20.

4. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Москва: Наука, 1985. 224 с.

5. Simpson D.J.W. Bifurcations in piecewise-smooth continuous dynamical systems // World Scientific Series on Nonlinear Science. New-Jersey: World Scientific, 2010. Ser. A. Vol. 69. 238 p.

6. Палис Ж., Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. Москва: Мир, 1986. 301 с.

7. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1967. 488 с.

8. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. Москва: Мир, 1971. 232 с.

9. Хирш М. Дифференциальная топология. Москва: Мир, 1976. 280 с.

10. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях сшитого тройного цикла // Математика и матема-

тическое образование. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2014. Вып. 9. С. 54–67.

References

1. Hayashi S. Connecting Invariant Manifolds and the Solution of C^1 Stability and Ω-Stability Conjectures for Flows // Annals of Mathematics. Second Series. 1997. Vol. 145, No. 1. P. 81–137.

2. Robinson C. Structural stability of vector fields // Annals of Mathematics. Second Series. 1974. Vol. 99, No. 1. P. 154–175.

3. Kozlova V.S. Structural stability of discontinuous systems // Bulletin of Moscow State University. Ser.: Mathematics and Mechanics. 1984. No. 5. P. 16–20.

4. Filippov A.F. Differential equations with a discontinuous right-hand side. Moscow: Nauka, 1985. 224 p.

5. Simpson D.J.W. Bifurcations in piecewise-smooth continuous dynamical systems // World Scientific Series on Nonlinear Science. New-Jersey: World Scientific, 2010. Ser. A. Vol. 69. 238 p.

6. Palis J., Melo W. Geometric theory of dynamical systems. An introduction. New-York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag. 1982. 198 p.

7. Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier. New York; Toronto; Jerusalem; London: Halsted Press [A division of John Wiley & Sons] and Israel Program for Scientific Translations, 1973. DOI: 10.1177/058310247600800807

8. Narasimhan R. Analysis on real and complex manifolds. Paris: Masson & Cie, 1968. 232 p.

9. Hirsch M.W. Differential Topology. New-York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag. 1976. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9449-5

10. Roytenberg V.Sh. On bifurcations of a sewn triple cycle // Mathematics and mathematical education. Theory and practice: inter-higher school coll. of scient. works. Yaroslavl: YaSTU Publishing House, 2014. P. 54–67.

Статья поступила в редакцию 14.10.2021; одобрена после рецензирования 15.11.2021; принята к публикации 16.11.2021.

The article was submitted 14.10.2021; approved after reviewing 15.11.2021; accepted for publication 16.11.2021.

© В.Ш. Ройтенберг, 2021