Научная статья
УДК 517.925+515.162.323
ББК 22.161.6
У 95
DOI: 10.53598/2410-3225-2021-4-291-30-45

Некоторые применения теории индексов в качественной теории автономных полиномиальных дифференциальных систем на плоскости (часть I)

(*Рецензирована*)

Адам Дамирович Ушхо

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия, *uschho76@mail.ru*

Аннотация. *Рассмотрено применение теории индекса в качественной теории полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Например, показано, что кубическая дифференциальная система не может иметь три четырехсепаратрисных седла на экваторе сферы Пуанкаре. Кроме этого, сумма индексов всех бесконечно удаленных состояний равновесия этой системы принадлежит числовому отрезку* [–2, 4]. *Приведены примеры конкретных систем.*

Ключевые слова: *полиномиальные дифференциальные системы, индекс Пуанкаре, преобразование Пуанкаре, сфера Пуанкаре, состояние равновесия, цикл без контакта*

Original Research Paper

Some applications of index theory in qualitative theory of autonomous polynomial differential systems on the plane (Part I)

Adam D. Ushkho

Adyghe State University, Maikop, Russia, *uschho76@mail.ru*

Abstract. *The work considers application of index theory in qualitative theory of polynomial differential systems on plane. For example, we show that a cubic differential system cannot have three four-separatrix saddles at the equator of the Poincaré sphere. In addition, the sum of the indices of all infinitely distant equilibrium states of this system belongs to the number segment* [–2, 4]. *We give examples of specific systems.*

Keywords: *polynomial differential systems, Poincaré index, Poincaré transformation, Poincaré sphere, equilibrium state, no-contact cycle*

Одним из важнейших понятий теории векторных полей является понятие индекса Пуанкаре (в дальнейшем просто индекса) [1]. Оно находит широкое применение не только в топологии, но и в функциональном анализе и их многочисленных приложениях.

В общем случае пока неизвестны общие формулы или простые алгоритмы, которые позволяли выполнить вычисление индекса. Прекрасным исключением в определенном смысле являются плоскостные векторные поля, для которых можно построить общие методы вычисления индекса Пуанкаре. Некоторые из них приведены в работах [2, 3].

В данной работе речь идет о применении теории индекса в качественной теории полиномиальных дифференциальных систем на плоскости.

Рассмотрим фазовую плоскость динамической системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – функции, имеющие частные производные не ниже первого порядка.

Пусть C – простая замкнутая кривая, а d – прямая на плоскости (см. рис. 1).

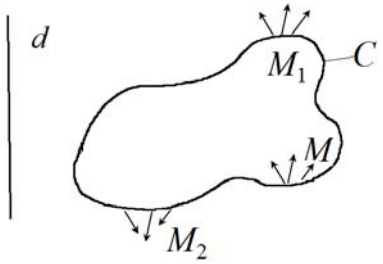

Рис. 1. C – простая замкнутая кривая, d – прямая на фазовой плоскости, $M_k (k = 1, 2, ...n)$ – точки кривой C

Fig. 1. C – a simple closed curve, d – a line on the phase plane, $M_k (k = 1, 2, ...n)$ – points of curve C

Предположим, что существует только конечное число точек $M_k (k = 1, 2, ...n)$ кривой C, в которых вектор $\vec{V}\ (P, Q)$ направлен параллельно прямой d. Для определенности положим, что кривую C обходит точка M один раз в положительном направлении, то есть против хода часовой стрелки. Пусть p – число точек M_k, при прохождении через которые вектор $\vec{V}$ вращается против хода часовой стрелки, q – число точек M_k, в которых вектор $\vec{V}$ проходит направление прямой d, вращаясь по ходу часовой стрелки.

Определение 1. Число $J(C) = \dfrac{p - q}{2}$ называется индексом цикла C по отношению к векторному полю системы (1).

Замечание 1. Определение 1 представляет собой определение индекса, данное Пуанкаре в его монографии [4] в несколько измененной форме. Оно приводится в книге [5].

Определение 2 [6]**.** Замкнутую кусочно-гладкую кривую C назовем циклом, если на C нет состояний равновесия системы (1). Совершая однократный обход цикла C в положительном направлении, будем следить за изменением знака функции $\dfrac{Q(x, y)}{P(x, y)}$ при обращении в нуль функции $P(x, y)$. Пусть h – число «скачков» от $-\infty$ до $+\infty$, а k – число «скачков» от $+\infty$ до $-\infty$, совершаемых функцией $\dfrac{Q(x, y)}{P(x, y)}$. Тогда число $J(C) = \dfrac{h - k}{2}$ называется индексом цикла C по отношению к векторному полю системы (1).

Лемма 1 [6]**.** *Индекс цикла есть число целое.*

В самом деле, когда точка M обходит цикл C и возвращается в исходное положение, функция $P(x,y)$, обращаясь в нуль, четное число раз изменит свой знак. Следовательно, число $h+k$ – четное, а значит, $h-k$ – четное число, и J – число целое.

Лемма 2 [6]**.** *Если область, ограниченная циклом* C, *разбита на* n *областей, ограниченных циклами* $C_1, C_2, ..., C_n$, *то* $J(C)=\sum_{i=1}^{n} J(C_i)$.

Действительно, если каждый из циклов обойдем в положительном направлении, то всякая часть циклов, расположенных внутри C, будет пройдена дважды во взаимно противоположных направлениях. Следовательно, вращение поля (по терминологии [5]) на указанных частях циклов $C_i (i=\overline{1,n})$ равно нулю**.**

Теорема 1 [6]**.** *Если внутри цикла* C *нет состояний равновесия, то* $J(C)=0$.

Доказательство. Пусть G – односвязная область, ограниченная циклом C. Относительно расположения главных изоклин системы (1) могут представиться два случая: а) хотя бы одна из изоклин $P(x,y)=0$ и $Q(x,y)=0$ пересекает область G; б) ни одна из главных изоклин системы (1) не пересекает область G.

В случае б) во всех точках области G функция $\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ не меняет знак, то есть $p=k=0$, следовательно, $J(C)=0$.

Пусть имеет место случай а). По условию теоремы внутри C нет состояний равновесия системы (1). Следовательно, область G будет разбита на циклы, внутри и на границе которых знак функции $\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ не меняется. Поэтому индекс каждого такого цикла равен нулю и по лемме 1 $J(C)=0$. Теорема доказана.

Определение 3. Индексом изолированного состояния равновесия O системы (1) называется индекс цикла C, содержащего внутри себя точку O, такого, что ни внутри, ни на нем самом нет состояний равновесия системы (1), отличных от O.

Из определения 3 следует, что индекс состояния равновесия O не зависит от цикла C, содержащего точку O, лишь бы C принадлежал некоторой проколотой окрестности точки O.

Индекс состояния равновесия O принято обозначать $J(O)$.

Теорема 2. *Пусть* C *– простая замкнутая кривая без состояний равновесия на фазовой плоскости, а* $O_1, O_2, ..., O_n$ *– состояния равновесия системы* (1), *расположенные внутри* C. *Тогда* $J(C)=\sum_{i=1}^{n} J(O_i)$.

Справедливость теоремы следует из определения 2 и леммы 2.

Теорема 3 [9]**.** *Пусть* $(P,Q)=1, P(x,y)\equiv P_n(x,y)+\varphi(x,y)$, $Q(x,y)\equiv Q_n(x,y)+\psi(x,y)$, *где* $P_n(x,y)$ *и* $Q_n(x,y)$ *– однородные многочлены степени* n, $\varphi(x,y)$ *и* $\psi(x,y)$ *– функции, разложения которых не содержат членов ниже* $(n+1)$*-й степени. Тогда* $|J(O)|\le n$.

Доказательство. Кривая $P_n(x,y)+\varphi(x,y)=0$ имеет не более $2n$ ветвей, входящих в начало координат $O(0,0)$. Следовательно, $0\le h\le 2n, 0\le k\le 2n$, откуда $|h-k|\le 2n$, то есть $|J(O)|\le n$.

Напомним определение цикла без контакта.

Определение 4. Простая замкнутая кривая (цикл) C называется циклом без контакта для траекторий системы (1), если на C нет ни одного состояния равновесия системы (1) и ни в одной своей точке она не имеет контакта, то есть не касается траекторий системы (1).

Приведем некоторые утверждения без доказательства, их доказательства имеются в [8].

Теорема 4. *Индекс любого цикла без контакта равен* $+1$.

Теорема 5. *Индекс любой замкнутой траектории системы* (1) *равен* $+1$.

Следствие 1. Индекс состояния равновесия типа «центр» равен $+1$.

Следствие 2. Сумма индексов состояний равновесия системы (1), расположенных внутри замкнутой траектории, равна $+1$.

Следствие 3. Внутри замкнутой траектории системы (1) имеется хотя бы одно состояние равновесия.

Теорема 6. *Индекс простого состояния равновесия равен* $+1$ (-1) *в случае узла*, *фокуса*, *центра* (*седла*).

Следствие 4. Если внутри замкнутой траектории системы (1) расположено одно состояние равновесия, то оно не может быть седлом.

Следствие 5. Если внутри замкнутой фазовой траектории системы (1) расположены только простые состояния равновесия, то их число нечетно, причем среди них седел меньше на единицу числа остальных состояний равновесия.

Теорема 7 [10]**.** *Если динамическая система* (1) *имеет только простые состояния равновесия и если изоклина* $P(x,y)=0$ (*или* $Q(x,y)=0$) *не имеет особых точек* (*то есть точек*, *в которых* $P'_x(x,y)$ *и* $P'_y(x,y)$ *одновременно равны нулю*), *то на этой изоклине состояния равновесия*, *для которых* $\Delta<0$, *чередуются с состояниями равновесия*, *для которых* $\Delta>0$. *Здесь* $\Delta=P'_xQ'_y-P'_yQ'_x$.

Для аналитических динамических систем (1) имеет место формула

$$J=1+\frac{e-h}{2}, \tag{2}$$

где e – число эллиптических секторов, h – число гиперболических секторов в достаточно малой окрестности состояния равновесия.

Формула (2) по праву называется формулой Бендиксона в честь шведского математика, получившего ее.

Рассмотрим некоторые приложения теории индексов к полиномиальным системам второго порядка.

Пусть дана система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^j \equiv P_2(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt}=\sum\limits_{i+j=0}^{2} b_{ij}x^i y^j \equiv Q_2(x,y), \end{cases} \tag{3}$$

где $a_{ij},b_{ij}\in\mathbb{R}$, $(P_2,Q_2)=1$.

Теорема 8. *Система* (3) *не может иметь три четырехсепаратрисных седла на экваторе сферы Пуанкаре*.

Доказательство. Применим к системе (3) преобразование Пуанкаре [8]. Первое

преобразование Пуанкаре вида $\begin{cases} x = \dfrac{1}{z}, \\ y = \dfrac{u}{z} \end{cases}$ переводит систему (3) в систему

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = b_{20} + (b_{11} - a_{20})u + b_{10}z + (b_{02} - a_{11})u^2 + (b_{01} - a_{10})uz + b_{00}z^2 - a_{02}u^3 - a_{01}u^2z - a_{00}uz^2, \\ \dfrac{dz}{dt} = -a_{20}z - a_{11}uz - a_{10}z^2 - a_{02}u^2z - a_{01}uz^2 - a_{00}z^3. \end{cases} \quad (4)$$

Другое преобразование Пуанкаре $\begin{cases} x = \dfrac{v}{z}, \\ y = \dfrac{1}{z} \end{cases}$ приводит систему (3) к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = a_{02} + (a_{11} - b_{02})v + a_{01}z + (a_{20} - b_{11})v^2 + (a_{10} - b_{01})vz + a_{00}z^2 - b_{20}v^3 - b_{10}v^2z - b_{00}vz^2, \\ \dfrac{dz}{dt} = -b_{02}z - b_{11}vz - b_{01}z^2 - b_{20}v^2z - b_{10}vz^2 - b_{00}z^3. \end{cases} \quad (5)$$

Состояния равновесия системы (3) на бесконечности удовлетворяют системам

$$\begin{cases} b_{20} + (b_{11} - a_{20})u + (b_{02} - a_{11})u^2 - a_{02}u^3 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} a_{02} + (a_{11} - b_{02})v + (a_{20} - b_{11})v^2 - b_{20}v^3 = 0. \\ z = 0, \end{cases} \quad (7)$$

Согласно [8] бесконечно удаленные состояния равновесия системы (3) удовлетворяют системе (6), за исключением одного состояния равновесия $(v = 0, z = 0)$ системы (5). Поэтому, если точка $(v = 0, z = 0)$ не является состоянием равновесия системы (3) на экваторе сферы Пуанкаре, то для исследования поведения траекторий системы (3) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости достаточно пользоваться системой (4).

Не ограничивая общности, будем полагать, что три седла на экваторе сферы Пуанкаре расположены в точках $(W_1(u = 0, z = 0), W_2(u = 1, z = 0), W_3(u = u_0, z = 0)$, где $u_0 > 1$.

Согласно статьям [11, 12], сумма числа контактов и числа состояний равновесия системы (3) на прямой, не являющейся для системы (3) инвариантной, не превосходит двух.

Изобразим на окружности круга Пуанкаре состояния равновесия $W_i(i = \overline{1,3})$, которые по предположению являются четырехсепаратрисными седлами (рис. 2). Здесь нами учтен тот факт, что квадратичная система (3) имеет на экваторе сферы Пуанкаре не более трех состояний равновесия.

Проведем на фазовой плоскости прямую $x = b$, не являющуюся инвариантной, где b – положительное число такое, что правее этой прямой не расположено ни одного состояния равновесия системы (3).

В силу выбора прямой $x = b$ всегда можно добиться того, чтобы сепаратрисы, примыкающие к седлам $W_i(i = \overline{1,3})$ и расположенные в первом квадранте, пресекали прямую $x = b$ в конечных точках A, B, C соответственно.

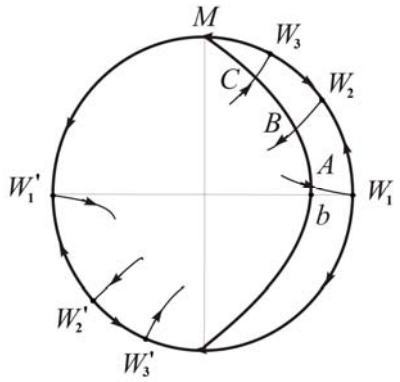

Рис. 2. Расположение трех четырехсепаратрисных седел на экваторе сферы Пуанкаре
Fig. 2. The location of three four-separatrix saddles on the equator of the Poincaré sphere

Введем обозначения: l_A – траектория системы (3), пересекающая отрезок $[AB]$ прямой $x = b$ вблизи точки A; $l_C^+(l_C^-)$ – траектория системы (3), пересекающая отрезок $[BC]$ (луч $[CM)$) прямой $x = b$ вблизи точки C. Пусть все указанные траектории пересекают прямую $x = b$ при $t = t_0$. Траектория l_C^- не может оказаться правее прямой $x = b$ при всех $t \in (t_0, +\infty)$, так как в противном случае l_C^- входит либо в точку M, либо в точку W_3. Но это невозможно в силу того, что M – не состояние равновесия, а к седлу W_3 уже примыкает одна ω – сепаратриса, расположенная в первом квадранте. Таким образом, с учетом непрерывности векторного поля системы (3) приходим к выводу, что на луче $[CM)$ есть по крайней мере один контакт. Аналогичными рассуждениями доказывается, что траектория $l_C^+(l_A)$ пресекает хотя бы один раз отрезок $[BC]([AB])$ прямой $x = b$ при $t > t_0$. Следовательно, на прямой $x = b$ система (3) имеет не менее трех контактов, что противоречит [11, 12]. Теорема доказана.

Теорема 9. *Сумма* Σ *индексов всех бесконечно удаленных состояний равновесия системы* (3) *удовлетворяет неравенству*

$$-1 \le \Sigma \le 3. \tag{8}$$

Доказательство. Сумма индексов состояний равновесия системы (3), расположенных в ограниченной части фазовой плоскости, в силу работы [9], принимает значения из множества $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Принимая во внимание тот факт, что сумма индексов всех состояний равновесия системы (3) как конечных, так и бесконечно удаленных, равна $+1$ [4], убеждаемся в выполнении (8). Теорема доказана.

Замечание 2. Для сравнения отметим, что сумма индексов состояний равновесия кубической дифференциальной системы, расположенных на экваторе сферы Пуанкаре, пробегает множество $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ [13].

Теорема 10. *Если система* (3) *имеет на экваторе сферы Пуанкаре три состояния равновесия, то среди них нет сложного состояния равновесия, с двумя нулевыми характеристическими корнями.*

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Пуанкаре, для чего обратимся к системам (4) и (5).

Не сужая общности, положим, что состояниями равновесия на экваторе сферы Пуанкаре являются точки $V_1(u = 0, z = 0)$, $V_2(u = 1, z = 0)$, $V_3(v = 0, z = 0)$. Тогда по необходимости выполняются условия

$$b_{20} = 0, a_{02} = 0, b_{11} - a_{20} = a_{11} - b_{02} \neq 0 . \qquad (*)$$

Характеристические корни состояний равновесия $V_i (i = \overline{1,3})$ задаются формулами:

$$\lambda_1(V_1) = b_{11} - a_{20}, \lambda_2(V_1) = -a_{20}, \qquad (9)$$

$$\lambda_1(V_2) = b_{02} - a_{11}, \lambda_2(V_2) = -(a_{20} + a_{11} + a_{02}), \qquad (10)$$

$$\lambda_1(V_3) = a_{11} - b_{02}, \lambda_2(V_3) = -b_{02} . \qquad (11)$$

Из (9)–(11) с учетом (*) следует, что ни одно из состояний равновесия V_1, V_2, V_3 не имеет два нулевых характеристических корня. Теорема доказана.

Теорема 11. *Если система* (3) *имеет в ограниченной части фазовой плоскости три и только три состояния равновесия, и все они простые, и на экваторе сферы Пуанкаре расположены также три состояния равновесия, то одно состояние равновесия из трех, расположенных на экваторе сферы Пуанкаре, является непременно сложным.*

Доказательство. Согласно работе [14] сумма индексов трех состояний равновесия системы (3), расположенных в ограниченной части фазовой плоскости, равна $+1$ или -1. Вопреки утверждению теоремы предположим, что все три бесконечно удаленных состояния равновесия простые. Тогда с учетом теоремы 8 сумма индексов всех бесконечно удаленных состояний равновесия системы (3) равна $+3$, либо $+1$, либо -1. Отсюда делаем вывод, что сумма индексов всех состояний равновесия системы (3), расположенных как в ограниченной части фазовой плоскости, так и в бесконечно удаленных ее частях, не равна $+1$, что противоречит [10]. Теорема доказана.

Следствие 6. Если система (3) имеет в ограниченной части фазовой плоскости три и только три состояния равновесия, в том числе два седла, а также три состояния равновесия на экваторе сферы Пуанкаре, то два из них являются узлами, а третье – седлоузлом.

В самом деле, по теореме 11 система имеет на экваторе сферы Пуанкаре одно сложное состояние равновесия, имеющее по теореме 10 один нулевой и один отличный от нуля характеристические корни. Сложное состояние равновесия такого типа согласно монографии [8] представляет собой либо седлоузел, либо седло, либо узел и однозначно определяется индексом [10]. А именно, индекс равен нулю в случае седлоузла и равен $+1$ (-1) в случае узла (седла). Учитывая [8], можно доказать, что третье состояние равновесия системы (3) в ограниченной части фазовой плоскости есть узел либо фокус, либо центр, то есть сумма индексов состояний равновесия системы (3), расположенных в ограниченной части фазовой плоскости, равна -1. Следовательно, сумма индексов состояний равновесия, расположенных на экваторе сферы Пуанкаре, равна $+2$, а это означает, что сложное состояние равновесия есть не что иное, как седлоузел, а два остальных являются узлами.

Пример 1. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5x^2 - xy + 6y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y + 10xy - 10y^2, \end{cases} \qquad (12)$$

имеет в ограниченной части фазовой плоскости два простых седла и простой устойчивый узел $B(1,2;1)$. На экваторе сферы Пуанкаре система (12) имеет три состояния равновесия $S_1(u = 0, z = 0)$ – простой неустойчивый узел, $S_2(u = -2,5; z = 0)$ – простой устойчивый узел, $S_3(u = 1, z = 0)$ – седлоузел. Фазовый портрет системы (12) изображен на рисунке 3. Система (12) удовлетворяет следствию 6.

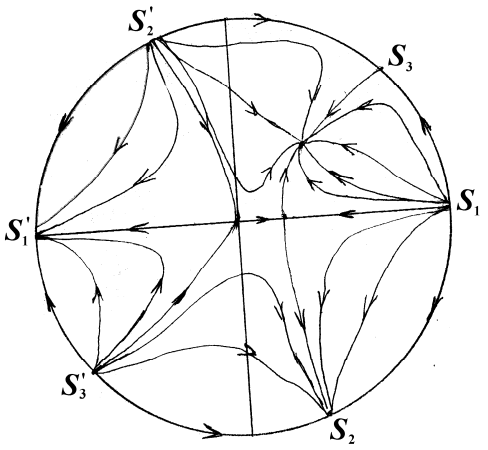

Рис. 3. Фазовый портрет системы (12) на сфере Пуанкаре
Fig. 3. Phase portrait of the system (12) on the Poincaré sphere

Теорема 12. *Если система* (3) *имеет четыре состояния равновесия в ограниченной части фазовой плоскости, то в случае, когда они определяют выпуклый четырехугольник, две его противоположные вершины будут седлами, а две другие – антиседлами, если же состояния равновесия определяют невыпуклый четырехугольник, то либо все внешние состояния равновесия будут седлами, а внутреннее – антиседлом, либо внешние точки суть антиседла, а внутренняя – седлом.*

Для доказательства теоремы 12 приведем некоторые утверждения из работы [15].

Теорема 13 [15]**.** *Пусть прямой* $l: y = kx + b$ *принадлежат* n *состояний равновесия системы* (1), *где* $P(x, y)$ *и* $Q(x, y)$ *– взаимно простые многочлены* n*-й степени с действительными коэффициентами. Тогда* l *– изоклина этой системы.*

В самом деле, $\dfrac{Q(x, kx+b)}{P(x, kx+b)} = \dfrac{\alpha(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{\beta(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)} \equiv \dfrac{\alpha}{\beta}$ – const.

Замечание 3. Если $Q(x, kx+b) \equiv 0$ $(P(x, kx+b) \equiv 0)$, то l – изоклина нуля (бесконечности). Одновременно эти два тождества не могут быть выполнены в силу взаимной простоты $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Следствие 7. Прямая, проходящая через два состояния равновесия системы (3), является изоклиной этой системы.

Будем говорить, что на изоклине L система (1) индуцирует направление m, если угловой коэффициент касательных к траекториям этой системы в точках их пересечения (быть может, касания) с L равен m.

Теорема 14 [15]**.** *Свойство кривой* L *быть изоклиной автономной системы* (1) *инвариантно относительно невырожденного преобразования*

$$\begin{cases} x = \alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \\ y = \gamma\overline{x} + \delta\overline{y}. \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система (1) индуцирует на L направление m, то есть имеет место равенство

$$\left(\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}\right)_{(x,y)\in L} \equiv m. \tag{14}$$

В силу (13) система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{d\tau} = \delta P(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \gamma\overline{x} + \delta\overline{y}) - \beta Q(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \gamma\overline{x} + \delta\overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{d\tau} = -\gamma P(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \gamma\overline{x} + \delta\overline{y}) + \alpha Q(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \gamma\overline{x} + \delta\overline{y}), \end{cases} \tag{15}$$

где $d\tau = \dfrac{dt}{\Delta}, \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Пусть в результате преобразования (13) кривая L переходит в кривую $\overline{L}$. Тогда с учетом (14) и (15) имеем равенство:

$$\left(\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}\right)_{(\overline{x},\overline{y})\in\overline{L}} \equiv \frac{-\gamma + \alpha m}{\delta - \beta m} = \overline{m} \ - \ const. \tag{16}$$

Из (16) следует, что $\overline{L}$ – изоклина системы (15). Теорема доказана.

Следствие 8. Произвольную изоклину системы (1) можно перевести в любую из двух главных изоклин.

Действительно, если $\gamma = \alpha m(\delta = \beta m)$, то $\overline{L}$ – изоклина нуля (бесконечности) системы (15).

Теорема 15. *Пусть* $M(x_0, y_0)$ *– состояние равновесия системы* (1), $L_1 : f(x, y) = 0, L_2 : g(x, y) = 0$ *– изоклины этой системы, на которых индуцировано одно и то же направление* m *и которые проходят через точку* M. *Тогда* M *– сложное состояние равновесия системы* (1).

Доказательство. Без потери общности считаем, что $M(x_0, y_0) \equiv O(0,0)$. Применим к системе (1) преобразование

$$\begin{cases} x = \overline{x} + \overline{y}, \\ y = m\overline{y}, m \neq 0. \end{cases} \tag{17}$$

Преобразование (17) трансформирует систему (1) в систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{d\tau} = mP(\overline{x} + \overline{y}, m\overline{y}) - Q(\overline{x} + \overline{y}, m\overline{y}) \equiv \overline{P}(\overline{x}, \overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{d\tau} = Q(\overline{x} + \overline{y}, m\overline{y}) \equiv \overline{Q}(\overline{x}, \overline{y}), где\, d\tau = \dfrac{dt}{m} \ . \end{cases} \tag{18}$$

Определитель $\overline{\Delta} = \begin{vmatrix} \overline{P}'_{\overline{x}}(\overline{x}, \overline{y}) & \overline{P}'_{\overline{y}}(\overline{x}, \overline{y}) \\ \overline{Q}'_{\overline{x}}(\overline{x}, \overline{y}) & \overline{Q}'_{\overline{y}}(\overline{x}, \overline{y}) \end{vmatrix}$ в точке $(\overline{x}, \overline{y}) \equiv (0,0)$ равен нулю.

В самом деле, согласно следствию 8, $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{f}(\overline{x}, \overline{y})\overline{g}(\overline{x}, \overline{y})r(\overline{x}, \overline{y})$, где $\overline{f}$ и $\overline{g}$ – это функции, в которые переходят f и g соответственно в результате преобразования (17). Поэтому $\overline{P}'_{\overline{x}}(0,0) = \overline{P}'_{\overline{y}}(0,0) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 16 [12]**.** *Пусть правые части уравнений системы* (1) *взаимно простые многочлены* n *-й степени над полем* $\mathbb{R}$. *Если эта система имеет* n^2 *состояний равновесия, то все они простые.*

Теперь вернемся к доказательству теоремы 12.

Пусть A, B, C, D – состояния равновесия системы (3) в ограниченной части фазовой плоскости.

Рассмотрим сначала случай, когда указанные четыре точки расположены в вершинах выпуклого четырехугольника (рис. 4).

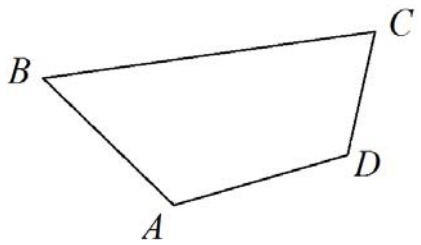

Рис. 4. Состояния равновесия A, B, C, D системы (3) образуют выпуклый четырехугольник

Fig. 4. Equilibrium states of A, B, C, D of system (3) form a convex quadrangle

В соответствии с теоремой 13 прямые AB, BC, CD, AD – изоклины системы (3), и при этом по теореме 16 все четыре состояния равновесия простые. Следовательно, по теореме 15 на прямых изоклинах, проходящих через вершины четырехугольника $ABCD$, индуцированы различные направления. Покажем, что на противоположных сторонах четырехугольника $ABCD$ индуцировано одно и то же направление. Рассуждения проведем применительно к противоположным сторонам AB и CD в целях определенности.

Предположим, что система (3) индуцирует на прямой $AB(CD)$ направление $m_1(m_2)$, причем $m_1 \neq m_2$.

Пусть прямая $AB(CD)$ задана уравнением $a_1x + b_1y + c_1 = 0\,(a_2x + b_2y + c_2 = 0)$.

Применив к системе (3) преобразование

$$\begin{cases} x = \overline{x} + \overline{y}, \\ y = m_2\overline{x} + m_1\overline{y}, \end{cases} \tag{19}$$

получим

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{d\tau} = (\overline{a}_1\overline{x} + \overline{b}_1\overline{y} + \overline{c}_1)(A_1\overline{x} + B_1\overline{y} + C_1), \\ \dfrac{d\overline{y}}{d\tau} = (\overline{a}_2\overline{x} + \overline{b}_2\overline{y} + \overline{c}_2)(A_2\overline{x} + B_2\overline{y} + C_2). \end{cases} \tag{20}$$

Согласно следствию 8 в результате преобразования (19) прямая AB перешла в изоклину бесконечности $\overline{a}_1\overline{x} + \overline{b}_1\overline{y} + \overline{c}_1 = 0$, а прямая CD – в изоклину нуля $\overline{a}_2\overline{x} + \overline{b}_2\overline{y} + \overline{c}_2 = 0$ системы (20). По условию на AB система (3) имеет два состояния равновесия, а значит, система (20) имеет на прямой $\overline{a}_1\overline{x} + \overline{b}_1\overline{y} + \overline{c}_1 = 0$ два состояния равновесия. Но это возможно тогда и только тогда, когда прямые $\overline{a}_1\overline{x} + \overline{b}_1\overline{y} + \overline{c}_1 = 0$ и $\overline{a}_2\overline{x} + \overline{b}_2\overline{y} + \overline{c}_2 = 0$ пересекаются в точке, являющейся состоянием равновесия системы (20). Приходим к противоречию с тем, что прямые AB и CD не имеют общих состояний равновесия.

Таким образом, на прямых AB и CD система (3) индуцирует направление m_1, а на прямых BC и AD – направление m_2, где $m_1 \neq m_2$. Поэтому вместо системы (3) рассматриваем систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2), \\ \dfrac{dy}{dt} = (a_3x + b_3y + c_3)(a_4x + b_4y + c_4), \end{cases} \tag{21}$$

для которой A и B принадлежат прямой $a_1x+b_1y+c_1=0$, C и D принадлежат прямой $a_2x+b_2y+c_2=0$, B и C принадлежат прямой $a_3x+b_3y+c_3=0$, A и D принадлежат прямой $a_4x+b_4y+c_4=0$. Поскольку на отрезке $[AB]$ нет особых точек изоклины бесконечности системы (21), то по теореме 7 $J(A)\cdot J(B)=-1$. Если $J(A)=+1(-1)$, то $J(B)=-1(+1)$, тогда A – антиседло (седло), B – седло (антиседло). Рассуждая аналогично относительно другой пары сторон четырехугольника $ABCD$, приходим к выводу, что две противоположные – вершины седла, а две другие – антиседла.

Замечание 4. Антиседло – это простое состояние равновесия, не являющееся седлом, то есть узел, фокус или центр.

Далее рассмотрим случай, когда четыре состояния равновесия системы (3) образуют невыпуклый четырехугольник (рис. 5).

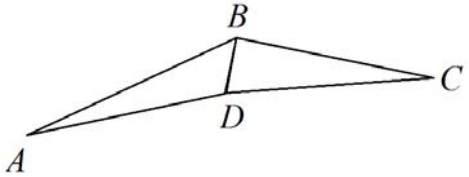

Рис. 5. Состояния равновесия A,B,C,D образуют невыпуклый четырехугольник, причем D – внутренняя вершина, A,B,C – внешние вершины

Fig. 5. The equilibrium states of A,B,C,D form a non-convex quadrangle, at that D – inner vertex, A,B,C – outer vertices

По теореме 16 на прямых DA,DB,DC индуцированы попарно различные направления m_1,m_2,m_3, то есть $(m_1-m_2)(m_1-m_3)(m_2-m_3)\neq 0$. Поэтому вместо системы (3) можно рассматривать систему (21). Определенности ради положим, что прямая DA задается уравнением $a_1x+b_1y+c_1=0$, а прямая DB – уравнением $a_3x+b_3y+c_3=0$. Система (21) имеет не более шести прямых изоклин, кроме указанных на рисунке 5 пяти прямых AD, AB, BC, DC, DB, эта система имеет прямую изоклину AC. Поэтому на отрезках DA и DB изоклины не имеют особых точек, и по теореме 7 $J(A)\cdot J(D)=-1, J(D)\cdot J(B)=-1$. Аналогично доказываем, что $J(D)\cdot J(C)=-1$. Таким образом, в рассматриваемом случае, если D – седло (антиседло), то A,B,C – антиседла (седла). Теорема доказана.

Теорема 17. *Пусть правые части системы*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt}=Q_n(x,y), \quad n-\text{нечетно} \end{cases} \tag{22}$$

суть однородные многочлены n-й степени над полем $\mathbb{R}$, причем взаимно простые. Тогда через начало координат $O(0,0)$ проходит хотя бы одна прямая изоклина нуля и одна прямая изоклина бесконечности.

Доказательство. Так как $P_n(x,y)$ и $Q_n(x,y)$ – взаимно просты, то рассмотрим следующие случаи:

а) $P_n(0,y)\equiv 0, Q_n(0,y)\not\equiv 0;$

б) $P_n(0,y)\not\equiv 0, Q_n(0,y)\equiv 0;$

в) $P_n(0,y) \not\equiv 0, Q_n(0,y) \not\equiv 0$.

В случае а) $x=0$ – изоклина бесконечности, $Q_n(1,k)$ – многочлен нечетной степени относительно $k=\dfrac{y}{x}$. Следовательно, уравнение $Q_n(1,k)=0$ имеет по крайней мере один вещественный корень $k=k_0$, а значит, $y=k_0x$ – изоклина нуля системы (22). В случае б) $x=0$ – изоклина бесконечности, $P_n(1,k)=0$ – уравнение нечетной степени относительно k. Следовательно, оно имеет корень $k=k_1$, то есть через начало координат проходит изоклина бесконечности $y=k_1x$ системы (22). В случае в) каждое из уравнений $P_n(1,k)=0$ и $Q_n(1,k)=0$ имеет не менее одного действительного корня. Поэтому и в этом случае через точку $O(0,0)$ проходит хотя бы одна прямая изоклина нуля и хотя бы одна прямая изоклина бесконечности. Теорема доказана.

Теорема 18. *Индекс состояния равновесия* $O(0,0)$ *системы* (22) *при* $n=3$ *принимает значения только из множества* $\{-3,-1,1,3\}$.

Доказательство. Предварительно покажем, что если при переходе через изоклину бесконечности $y=ax$ $(a\in\mathbb{R})$ функция $\dfrac{Q_3(x,y)}{P_3(x,y)}$ меняет свой знак, то только с отрицательного на положительный или с положительного на отрицательный.

Так как $P_3(x,y)$ и $Q_3(x,y)$ – однородные многочлены, то имеет место тождество

$$\frac{Q_3(x,ux)}{P_3(x,ux)} \equiv \frac{Q_3(1,u)}{P_3(1,u)} \quad (x\neq 0). \tag{23}$$

В силу непрерывности $P_3(1,u)$ и нечетной кратности корня $u=\alpha$ этой функции выполняются условия:

$$\forall u\in(\alpha,\alpha+\varepsilon)/P_3(1,u)>0(<0), \tag{24}$$

$$\forall u\in(\alpha-\varepsilon,\alpha)/P_3(1,u)<0(>0), \tag{25}$$

где ε – достаточно малое положительное число.

Поскольку $(P_3,Q_3)=1$, то $Q_3(1,\alpha)\neq 0$. Следовательно, $\exists\varepsilon_1>0$, такое, что $\forall u\in(\alpha-\varepsilon_1,\alpha+\varepsilon_1)/Q_3(1,u)>0(<0)$. Пусть $\varepsilon_2=\min(\varepsilon,\varepsilon_1)$. Тогда согласно (24) и (25) выполняются условия:

$$\begin{aligned}&\forall u\in(\alpha,\alpha+\varepsilon_2)/P_3(1,u)>0(<0),\\ &\forall u\in(\alpha-\varepsilon_2,\alpha)/P_3(1,u)<0(>0).\end{aligned} \tag{26}$$

Принимая во внимание равенство (23) и условия (26), приходим к выводу, что при переходе через изоклину бесконечности $y=\alpha x$, действительно, функция $\dfrac{Q_3(x,y)}{P_3(x,y)}$ меняет свой знак только с положительного на отрицательный или с отрицательного на положительный. Уравнение $P_3(1,u)=0$ имеет: а) либо один трехкратный корень; б) либо один простой и один двукратный корни; в) либо один простой действительный и два комплексно-сопряженных корня; г) либо три различных действительных корня (причем один из корней может быть ∞).

В случаях а), б), в) по доказанному выше функция $\dfrac{Q_3(x,y)}{P_3(x,y)}$ меняет свой знак два раза с положительного на отрицательный или с отрицательного на положительный.

Следовательно, либо $h=2,\ k=0$, либо $h=0,\ k=2$ (см. определение 2). Поэтому индекс точки $O(0,0)$, вычисляемый по формуле $J=\dfrac{h-k}{2}$, равен $+1$ или -1.

Если имеет место случай 2), то возможны следующие сочетания значений h и k:

$$1)\ \begin{cases} h=4, \\ k=2; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} h=2, \\ k=4; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} k=0, \\ h=6; \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} k=6, \\ h=0. \end{cases}$$

В случае 1) $J(O)=1$, в случае 2) $J(O)=-1$, в случае 3) $J(O)=3$, в случае 4) $J(O)=-3$. Теорема доказана.

Теорема 19. *Число эллиптических секторов, примыкающих к состоянию равновесия* $O(0,0)$ *системы* (22) *при* $n=3$, *не более четырех.*

Доказательство. В силу симметрии векторного поля системы (22) относительно начала координат $O(0,0)$ число e – эллиптических секторов (если они есть), примыкающих к состоянию равновесия $O(0,0)$, четно. Допустим, что $e=6$. Тогда к точке $O(0,0)$ примыкают еще по крайней мере два гиперболических сектора, то есть $h\geq 2$. В противном случае согласно формуле Бендиксона $J=1+\dfrac{e-h}{2}$ индекс точки $O(0,0)$ равен 4, что недопустимо по теореме 18.

Согласно монографии [8, с. 349–351] смежными с эллиптическим сектором, примыкающим к состоянию равновесия, могут быть один ω-параболический и один α- параболический секторы. Границу канонической окрестности состояния равновесия $O(0,0)$, следуя [8], будем называть канонической кривой.

По лемме 3 [8, с. 351], если положительное направление обхода канонической кривой индуцирует на эллиптической дуге направление, совпадающее с направлением по t (или противоположное направлению t), то направление положительного обхода петель, принадлежащих канонической окрестности точки $O(0,0)$, также совпадает с направлением по t (противоположно направлению по t). Отсюда следует, что между двумя соседними эллиптическими секторами расположен по крайней мере один гиперболический сектор (вообще говоря, нечетное количество таких секторов).

Учитывая центрально-симметричное расположение траекторий системы (22) при $n=3$ относительно точки $O(0,0)$, приходим к выводу, что наряду с шестью эллиптическими секторами система (22) имеет в достаточно малой окрестности точки $O(0,0)$ по меньшей мере шесть гиперболических секторов. Тогда окружность сколь угодно малого радиуса с центром в точке O будет иметь хотя бы один контакт с траекторией системы (22) в каждом эллиптическом и каждом гиперболическом секторе. Это противоречит работе [12], согласно которой сумма числа контактов и числа состояний равновесия кубической системы, расположенных на кривой второго порядка, не являющейся инвариантной, не превосходит восьми. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 9. Если индекс состояния равновесия $O(0,0)$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=P_3(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt}=Q_3(x,y), \end{cases} \tag{27}$$

где P_3 и Q_3 – взаимно простые и однородные многочлены третьей степени с вещест-

венными коэффициентами, равен 3, то окрестность $O(0,0)$ состоит из четырех эллиптических секторов (гиперболических секторов нет). При этом направления по t на петлях двух смежных эллиптических секторов взаимно противоположны.

Следствие 10. Если индекс состояния равновесия $O(0,0)$ системы (27) равен –3, то окрестность точки $O(0,0)$ состоит из восьми гиперболических секторов (эллиптических секторов нет). Состояние равновесия такого типа называется восьмисепаратрисным седлом.

Пример 2. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-2x)(3y^2-2xy-49x^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = 4(y-3x)(y^2-9xy+2x^2) \end{cases}$$

имеет сложное состояние равновесия $O(0,0)$ с индексом, равным 3. Из траекторий этой системы состоят прямые $y=4x$ и $y=x$. Окрестность точки $O(0,0)$ состоит из четырех эллиптических и четырех параболических секторов (см. рис. 6).

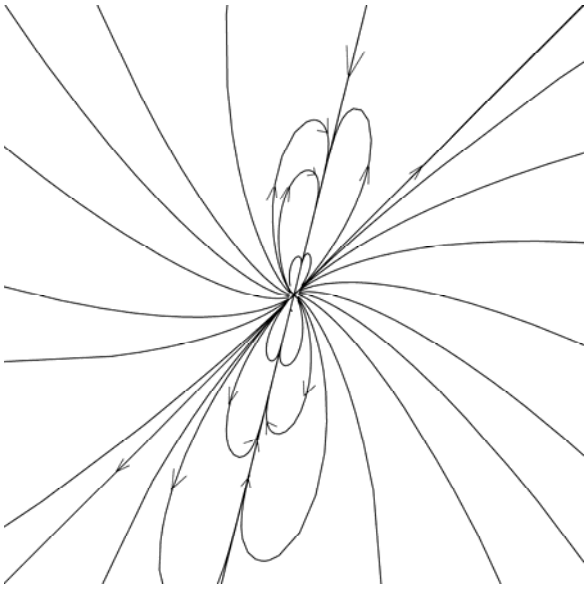

Рис. 6. Окрестность точки $O(0,0)$ состоит из четырех эллиптических и четырех параболических секторов

Fig. 6. The neighborhood of the point $O(0,0)$ consists of four elliptical and four parabolic sectors

Пример 3. Четыре прямые $y=\pm\dfrac{1}{4}x, y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ являются инвариантными для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 16y(y^2-x^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x\left(y^2-\dfrac{1}{4}x^2\right). \end{cases}$$

Индекс состояния равновесия $O(0,0)$ равен –3, следовательно, $O(0,0)$ – восьмисепаратрисное седло (см. рис. 7).

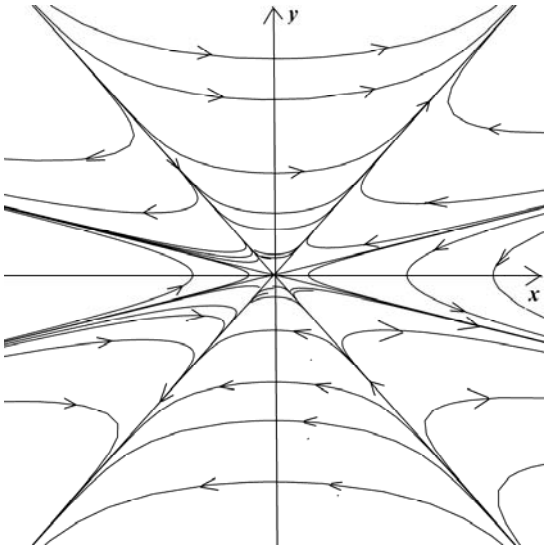

Рис. 7. Окрестность состояния равновесия $O(0,0)$ состоит из восьми гиперболических секторов

Fig. 7. The neighborhood of the equilibrium state of $O(0,0)$ consists of eight hyperbolic sectors

Продолжение следует.

To be continued.

Примечания

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. 2-е изд., перераб. и испр. Москва: Наука, 1981. 918 с.

2. Митин В.Ю. Вычисление индекса изолированной особой точки // Вестник Пермского государственного университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2009. Вып. 7 (33). С. 6–10.

3. Митин В.Ю. Определение индекса Пуанкаре: на пути от одномерных и плоскостных векторных полей к многомерному случаю // Вестник Пермского государственного университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 3 (3). С. 41–45.

4. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1947. 392 с.

5. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1966. 568 с.

6. Берлинский А.Н. О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения // Известия высших учебных заведений. 1960. № 2 (15). С. 3–18.

7. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1967. 488 с.

8. Тун-Цзинь-чжу. Расположение предельных циклов системы $dx/dt = X_2(x,y)$, $dy/dt = Y_2(x,y)$ // Периодический сборник переводов иностранных статей: Математика. 1962. Т. 6, № 6. С. 150–168.

9. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Состояния равновесия и смежные вопросы теории плоских векторных полей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 1. С. 30–54.

10. Ушхо Д.С., Ушхо А.Д. Исследование бесконечно удаленных особых точек кубических дифференциальных систем в одном случае // Труды физического общества Республики Адыгея. 2007. № 12. С. 19–29. URL: http://fora.adygnet.ru

11. Берлинский А.Н. О сожительстве особых точек различных типов // Известия высших учебных заведений. Математика. 1960. № 5 (18). С. 27–32.

12. Ушхо Д.С. Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференци-

альных систем на плоскости. Майкоп, 2007. 93 с.

13. Ляпунов А.М. Общая задача устойчивости движения. Москва: Гостехиздат, 1950. 472 с.

14. Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // Успехи математических наук. 1941. Т. 9. С. 191–211.

15. Морозов В.В. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // Труды Казанского института инженеров коммунального строительства. 1936. Вып. 4. С. 7–13.

References

1. Andronov A.A., Witt A.A., Khaykin S.E. Theory of oscillations. 2nd ed., revised and corrected. Moscow: Nauka, 1981. 918 p.

2. Mitin V.Yu. Calculating the index of an isolated singular point // The Bulletin of the Perm State University. Ser.: Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2009. Iss. 7 (33). P. 6–10.

3. Mitin V.Yu. The Poincaré index determination: on the path from univariate and flat vector fields to the multidimensional case // The Bulletin of the Perm State University. Ser.: Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2010. No. 3 (3). P. 41–45.

4. Poincaré Poincare A. On curves defined by differential equations. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1947. 392 p.

5. Qualitative theory of second-order dynamical systems / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon and A.G. Maier. New York: John Wiley and Sons, 1973. 568 p.

6. Berlinsky A.N. On the behavior of integral curves of one differential equation // News of Higher Schools. 1960. No. 2 (15). P. 3–18.

7. Bifurcation theory of dynamical systems on the plane / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Mayer. Moscow: Nauka, 1967. 488 p.

8. Tung Chin-Chu. Positions of limit-cycles of the system $dx/dt = X_2(x,y),\ dy/dt = Y_2(x,y)$ // The periodic collection of transfers of foreign articles: Mathematics. 1962. Vol. 6, No. 2. P. 150–168; Sci. Sinica, 1959. Vol. 8, No. 2. P. 151–171.

9. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. Equilibrium states and ajacent questions of the plane polynomial vector fields theory // Differential Equations and Control Processes. 2020. No. 1. P. 30–54.

10. Uskho D.S., Uskho A.D. Examination of perpetually remote singular points of cubic differential system in one case // Proceedings of Physical Society of Adyghea Republic. 2007. No. 12. P. 19–29. URL: http://fora.adygnet.ru

11. Berlinsky A.N. On the cohabitation of special points of various types // News of Higher Schools. Mathematics. 1960. No. 5 (18). P. 27–32.

12. Ushkho D.S. Straight isoclines and canonical forms of polynomial differential systems on the plane. Maikop: ASU Publishing House, 2007. 93 p.

13. Lyapunov A.M. The general problem of motion stability. Moscow: Gostekhizdat, 1950. 472 p.

14. Bendixson I. On curves defined by differential equations // Successes of Mathematical Sciences. 1941. Vol. 9. P. 191–211.

15. Morozov V.V. On curves defined by differential equations // Proceedings of the Kazan Institute of Municipal Construction Engineers. 1936. Iss. 4. P. 7–13.

Статья поступила в редакцию 9.11.2021; одобрена после рецензирования 8.12.2021; принята к публикации 9.12.2021.

The article was submitted 9.11.2021; approved after reviewing 8.12.2021; accepted for publication 9.12.2021.

© А.Д. Ушхо, 2021